CP200. Devoir surveillé d'algèbre de mars 2017

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. Partout $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Question de cours 1. Énoncer et démontrer le lemme de Gauss.

Question de cours 2. Écrire la formule de Taylor pour les polynômes (sans justification).

Exercice 1. Si $A \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme non nul, on définit l'*ordre* de A, qu'on note $\omega(A)$, comme étant le degré du monôme de plus bas degré dans A. Autrement dit,

$$A(X) = a_{\omega(A)} X^{\omega(A)} + \text{monômes de degrés supérieurs.}$$

En s'inspirant de ce qui a été fait en cours pour le degré :
(1) Trouver et prouver une formule exprimant $\omega(AB)$ en fonction de $\omega(A)$ et $\omega(B)$.
(2) Si $\omega(A) < \omega(B)$, déterminer $\omega(A + B)$.
(3) Si $\omega(A) = \omega(B)$, à quelle condition a-t-on $\omega(A+B) = \omega(A)$? Et sinon, que peut-on dire de $\omega(A + B)$?
(4) Quelle valeur doit-on donner à $\omega(0)$ (l'ordre du polynôme nul) pour que les formules des questions (1) et (2) restent vraies même si A ou B est nul ?

Exercice 2. Soient $S(X) = X^3 - 2X^2 + X - 2$ et $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. Soient $Q(X)$ et $R(X)$ le quotient et le reste (respectivement) de la division de P par S.
(1) Montrer que les restes des divisions euclidiennes de P et R par $X^2 + 1$ sont égaux.
(2) Même question pour les restes des divisions de P et R par $X - 2$.
(3) On suppose que ces restes sont 7 et 2. Si $R(X) = aX^2 + bX + c$, déterminer a, b, c.

Exercice 3. Soient $E(X) = X^4 + 6X^3 + 10X^2 + 3X - 6$ et $F(X) = X^2 + 3X$. Effectuer la division euclidienne de E par F. En déduire une décomposition de E en produit de deux polynômes de degré 2. (*Indication. On pourra reconnaître une expression de la forme* $F(F + 1) - G(G + 1)$ *et chercher à la factoriser.*)

Exercice 4.
(1) Soit $a \in \mathbb{K}$. Trouver un polynôme de degré 2 dont le carré soit le polynôme

$$Q(X) = X(X + a)(X + 2a)(X + 3a) + a^4.$$

(2) En déduire une factorisation de $X(X + 1)(X + 2)(X + 3) - 8$ en polynômes de degré 2.

Exercice 5. Soient

$$A(X) = X^5 - 3X^4 - 10X^3 + 13X^2 - 15X + 2$$
$$B(X) = X^4 + 2X^3 - X^2 + 2X + 1.$$

(1) Calculer leur PGCD (unitaire) $D(X)$ par l'algorithme d'Euclide.
(2) Calculer A/D et B/D.
(3) Calculer le PPCM (unitaire) $M(X)$ de $A(X)$ et $B(X)$, en le développant complètement.
(4) Trouver deux polynômes $U_0, V_0 \in \mathbb{R}[X]$ tels que $U_0(X)A(X) + V_0(X)B(X) = D(X)$.
(5) Déterminer, aussi explicitement que possible, l'ensemble des polynômes $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $U(X)A(X) + V(X)B(X) = D(X)$.

FIN.