CP200. Devoir surveillé d'algèbre d'avril 2015

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Question de cours [2 pts] *(Preuve du théorème de la base incomplète.)* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et ayant une partie génératrice G *finie*. Soit L une partie libre de E. Prouver qu'il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset L \cup G$.

Exercice 1. [2 pts] Décomposer $F(X) = \frac{X^5+2}{(X^2+X+1)^3}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$. *(On pourra commencer par faire la division euclidienne de $X^5 + 2$ par $X^2 + X + 1$.)*

Exercice 2. [3 pts]
(1) Trouver deux polynômes $U(X)$ et $V(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$(X^2 - X + 1)U(X) + (X - 1)^2 V(X) = 1.$$

(2) En déduire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{1}{(X^2 - X + 1)(X - 1)^2}.$$

Exercice 3. [3,5 pts] Décomposer $F(X) = \frac{X^5+1}{(X-1)^3 X^2}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 4. [1,5 pts] Soit $F = \mathrm{Vect}\{(2, -1, -2), (1, -2, -1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ? Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $(x, y, z) \in F$ ("équation de F").

Exercice 5. [3 pts]
(1) Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs $u_1 = (1, 2, 0, 1)$, $u_2 = (2, 1, 3, 1)$, $u_3 = (2, 4, 0, 2)$. Extraire de $\{u_1, u_2, u_3\}$ une base B de $V = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$.
(2) Justifier (sans calcul) qu'on peut former une base B' de $\mathbb{R}^4$ en adjoignant à B des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Donner un exemple d'une telle base B' (justifier).
(3) Extraire de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ une base de $W = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, où $v_1 = (1, 2, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 1, 1, 1)$, $v_3 = (2, -1, 0, 1)$, $v_4 = (2, 2, 2, 2)$.

Exercice 6. [1,5 pts] Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$. Soient f_1, f_2, f_3, f_4 les éléments de E définis par : $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f_2(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $f_3(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $f_4(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Soit $F = \mathrm{Vect}\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Extraire de $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ une base de F.

Exercice 7. [3,5 pts] Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré ≤ 2.
(1) Quelle est la dimension de E ?
(2) Pour $P \in E$, on note E_P l'ensemble des restes des multiples de P dans la division euclidienne par $X^3 + 1$. Justifier que E_P est un sous-espace vectoriel de E.
(3) Quelle est la dimension de E_{X^2-X+1} ?

FIN