CP200. Devoir surveillé d'algèbre d'avril 2016

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. Partout $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Question de cours 1. Énoncer le théorème de la base incomplète.

Question de cours 2. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2. On pose $p_1(X) = X+1$, $p_2(X) = X^2+X+1$, $p_3(X) = X^2+3X+2$. Montrer que (p_1, p_2, p_3) est une base de E. Décomposer $A = 5X^2 + 12X + 9$ dans cette base.

Exercice 2. Soit $F = \operatorname{Vect}\{(1, 1, -1), (2, -1, -2), (1, -2, -1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ? Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $(x, y, z) \in F$ ("équation de F").

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^5$, soient $\varepsilon_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $\varepsilon_2 = (1, 0, -1, 0, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 1, 0, 2, 0)$. Vérifier que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre. Justifier (sans calcul) qu'on peut la compléter par des vecteurs de la base canonique pour obtenir une base de $\mathbb{R}^5$. Donner un exemple d'une telle base.

Exercice 4. Soient $F_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y-2z+t = 0\}$, $F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z = t\}$.
(1) Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Donner la dimension et une base de chacun d'eux.
(2) Quelle est la dimension de $F_1 + F_2$? Et celle de $F_1 \cap F_2$?

Exercice 5.
(1) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) \mapsto (x+z, y+z)$. Justifier qu'elle est linéaire et déterminer son noyau $\operatorname{Ker} f$ et son image $\operatorname{Im} f$.
(2) Mêmes questions pour $g : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $g(P) = P'' + 2P' + P$ (où $\mathbb{R}_2[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes réels de degré ≤ 2).

Exercice 6. Pour $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ on note V_P l'ensemble des polynômes divisibles par P.
(1) Justifier que V_P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Est-il de dimension finie ?
(2) Soient a, b deux éléments *distincts* de $\mathbb{K}$. Justifier que $V_{X-a} + V_{X-b} = \mathbb{K}[X]$. Les sous-espaces V_{X-a} et V_{X-b} sont-ils supplémentaires ?

Exercice 7. Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites de réels. Soit E l'ensemble des $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
(1) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
(2) Chercher les suites de E de la forme $(r^n)_n$, où $r \in \mathbb{R}^*$. *On trouvera pour r deux valeurs : r_1, r_2.*
(3) Justifier que les suites (r_1^n) et (r_2^n) trouvées sont linéairement indépendantes.
(4) Montrer qu'elles forment une base de E. (On pourra montrer que pour toute suite (u_n) de E il existe λ et μ dans $\mathbb{R}$ tels que la double relation $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$, $u_{n+1} = \lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}$ ait lieu pour $n = 0$ et soit héréditaire.)

FIN