CP200. Devoir surveillé d'algèbre d'avril 2017

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. Partout $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Question de cours 1 *(Lemme préliminaire au théorème de décomposition en éléments simples)* Soit $F = \frac{A}{B_1 B_2}$ une fraction rationnelle de degré < 0 avec B_1, B_2 premiers entre eux (A, B_1, B_2 sont des polynômes). Montrer qu'on peut écrire $F = \frac{C_1}{B_1} + \frac{C_2}{B_2}$ où C_1, C_2 sont des polynômes ; puis $F = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2}$ où A_1, A_2 sont des polynômes et $\deg \frac{A_1}{B_1} < 0$, $\deg \frac{A_2}{B_2} < 0$.

Question de cours 2. Soient E, F des $\mathbb{K}$-e.v. de même dimension *finie* et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
a. Montrer que f est un isomorphisme si et seulement si f est injective.
b. Montrer, par un contre-exemple, que ce n'est plus vrai si $E = F = \mathbb{K}[X]$.

Exercice 1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, V un s.e.v. de E, W un s.e.v. de F. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les dimensions de V et W pour qu'existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\operatorname{Ker} f = V$ et $\operatorname{Im} f = W$.

Exercice 2. Décomposer $F(X) = \dfrac{1}{(X-1)^3(X^2+1)}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 3. Soient $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, $P_2(X) = X(X-1)/2$, $P_3(X) = X(X-1)(X-2)/6$.
(1) Justifier que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
(2) Décomposer le polynôme $P(X) = 1 + X + X^2 + X^3$ dans cette base.

Exercice 4. Soit $F = \operatorname{Vect}\{(4,1,3), (2,-1,1), (0,3,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.
(1) Quelle est sa dimension ?
(2) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $(x, y, z) \in F$ ("équation de F").

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^5$, soient $\varepsilon_1 = (1,2,3,4,5)$, $\varepsilon_2 = (5,4,3,2,1)$, $\varepsilon_3 = (0,1,0,1,0)$. Vérifier que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre. Justifier (sans calcul) qu'on peut la compléter par des vecteurs de la base canonique pour obtenir une base de $\mathbb{R}^5$. Donner un exemple d'une telle base.

Exercice 6. Soient $F_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x + z = t \text{ et } y + 2z = 0\}$, $F_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x = y + z + t \text{ et } x + z = y\}$.
(1) Justifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ en donnant une base de chacun d'eux.
(2) Donner une base de $F_1 + F_2$. Quelle est la dimension de $F_1 \cap F_2$?

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) \mapsto (x+y-z, x+z, y-x-3z)$. Justifier qu'elle est linéaire et déterminer son noyau $\operatorname{Ker} f$ et son image $\operatorname{Im} f$.

Exercice 8. On note $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel formé des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée seconde est partout continue. Soit E l'ensemble des $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation différentielle $y'' + y' - 6y = 0$ (c.-à-d. $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$). *Cet exercice ne suppose aucune connaissance sur les équations différentielles.*
(1) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
(2) Chercher les fonctions de E de la forme $y(t) = e^{rt}$. *On trouvera pour r deux valeurs : r_1, r_2.*
(3) Justifier que les fonctions $e^{r_1 t}$ et $e^{r_2 t}$ trouvées sont linéairement indépendantes.
(4) On va montrer qu'elles forment une base de E. Soit $y \in E$. On cherche λ, μ dans $\mathbb{R}$ tels que $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En dérivant cette relation, obtenir un système, en déduire λ et μ et montrer qu'ils sont bien indépendants de t (en utilisant le fait que $y \in E$).

FIN