| | | |
|---|---|---|
| | **ANNÉE UNIVERSITAIRE 2014-2015**<br>**DS TERMINAL DE PRINTEMPS**<br><br>**Parcours :** CPBX **UE :** CP200ADST<br>**Épreuve :** Algèbre 1 MPC<br>**Date :** 12 juin 2015 **Heure :** 14h **Durée :** 3 heures<br>Documents non autorisés<br>Épreuve de M. : É. Charpentier | **Collège Sciences et technologies** |

*N.B. Seule la calculatrice CASIO FX 92 COLLÈGE est autorisée.*
*L'énoncé est recto-verso (ne pas oublier de tourner la page).*
*Les exercices sont indépendants. Les réponses doivent être convenablement justifiées.*

**Exercice 1**.
On considère les polynômes

$$A(X) = X^5 - 3X^3 - 4X^2 + 2X + 4 \qquad \text{et} \qquad B(X) = X^4 - 4X^2 - X + 2.$$

**(1)** Calculer leur PGCD (unitaire) $D(X)$ par l'algorithme d'Euclide.
**(2)** Calculer $A(X)/D(X)$ et $B(X)/D(X)$.
**(3)** Déterminer (aussi explicitement que possible) l'ensemble des polynômes $U(X), V(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$U(X)A(X) + V(X)B(X) = D(X).$$

**Exercice 2**.
**(1)** Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{2X^2 + X - 1}{(X-2)^3(X^2+2)}.$$

**(2)** Poursuivre la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$.

**Exercice 3**. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 1, \quad T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

**(1)** Expliciter les polynômes $T_2$ et $T_3$.
**(2)** Déterminer le degré et le coefficient dominant de $T_n$ ($n \in \mathbb{N}$).
**(3)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(T_0, ..., T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (l'espace des polynômes de degré $\leq n$).
**(4)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos x) = \cos(nx)$.
**(5)** En déduire les racines de $T_n$ dans $[-1, 1]$, puis dans $\mathbb{R}$, et la décomposition de $T_n$ en facteurs irréductibles unitaires dans $\mathbb{R}[X]$.

**Exercice 4**. Soit $E$ un espace vectoriel (de dimension finie ou non). Soient $V$ et $W$ deux sous-espaces vectoriels de $E$, de dimensions finies. L'objet de cet exercice est de prouver (par une méthode différente de celle du cours) que $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$.
**(1)** Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $V \times W$ ? (On ne demande pas *ici* de justification.)
**(2)** Soit $f : V \times W \to E$ l'application définie par $f(v, w) = v + w$. Justifier que $f$ est linéaire. Quelle est son image ? Quel est son noyau ? Quelle est la dimension de son noyau ? Appliquer le théorème du rang et conclure.

**Exercice 5**. Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.
**(1)** Soit $f$ un endomorphisme de $E$. Soit $A$ la matrice de $f$ dans une base quelconque : justifier que la trace de $A$ ne change pas si on change de base. Dans la suite on la notera $\mathrm{Tr}(f)$.

**T.S.V.P.**

**(2)** On suppose ici que $f$ est un projecteur. Montrer que $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{rg}(f)$. (*On pourra choisir une base de $E$ adaptée à la définition de $f$.*)
**(3)** Montrer qu'il existe un endomorphisme $f$ de $E$ tel que $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{rg}(f) = 2$ et qui *n'est pas* un projecteur (donner un exemple).
**(4)** Soit $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{rg}(f) = 1$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de $f$ n'a que sa dernière colonne qui ne soit pas nulle ; en déduire que $f$ est un projecteur.
**(5)** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A$ est la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, d'un projecteur, dont on déterminera une base de l'image et une base du noyau.

**Exercice 6**. On étudie des objets qui peuvent être mis dans trois états (exclusifs) $A$, $B$, $C$. Chaque jour ils changent d'état. On note $a_k$, $b_k$, $c_k$ la proportion d'objets qui sont respectivement dans l'état $A$, l'état $B$, l'état $C$ au jour $k$ ($k = 0, 1, 2, ...$). Les règles de changement d'état sont données par

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

et la situation initiale est $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (tous les objets dans l'état $A$).
**(1)** Trouver un vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ *non nul* tel que $A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{4} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$.
**(2)** Trouver un vecteur $V_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ *non nul* tel que $A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.
**(3)** Trouver un vecteur $V_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ *non nul* tel que $A \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$.
**(4)** Justifier que $(V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (on identifie les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ aux colonnes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$). Quelle est la matrice de passage $P$ de la base canonique à la base $(V_1, V_2, V_3)$ ?
**(5)** Calculer $P^{-1}$ par la *méthode du pivot*. On mettra *le dénominateur commun en facteur*.
**(6)** *Sans aucun calcul*, déterminer la matrice $A' = P^{-1}AP$ ainsi que $A'^k$.
**(7)** Exprimer $\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$ en fonction de $A'^k$, $P$ et $P^{-1}$ (on ne demande pas de *calculer* $a_k$, $b_k$, $c_k$). En déduire que $a_k \to a$, $b_k \to b$, $c_k \to c$ quand $k \to +\infty$, où $a$, $b$, $c$ sont des nombres qu'on explicitera (répartition limite).

**FIN**