université de BORDEAUX	**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2015-2016** **DS TERMINAL DE PRINTEMPS** **Parcours :** CPBX **UE :** CP200ADST **Épreuve :** Algèbre 1 MPC **Date :** 9 juin 2016 **Heure :** 14h **Durée :** 3 heures Documents non autorisés Épreuve de M. : É. Charpentier	**Collège Sciences et technologies**

N.B. Seule la calculatrice CASIO FX 92 COLLÈGE est autorisée.
L'énoncé est recto-verso (ne pas oublier de tourner la page).
Les exercices sont indépendants. Les réponses doivent être convenablement justifiées.

Question de cours. Démontrer le lemme de Gauss dans $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) : si A est premier avec B et divise BC, alors A divise C.

Exercice 1. On considère les polynômes

$$A(X) = X^5 - 3X^4 - 7X^3 - 10X^2 - 10X + 12 \qquad \text{et} \qquad B(X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X - 2.$$

(1) Calculer leur PGCD (unitaire) $D(X)$ par l'algorithme d'Euclide.
(2) Calculer $A(X)/D(X)$ et $B(X)/D(X)$.
(3) Déterminer (aussi explicitement que possible) l'ensemble des polynômes $U(X), V(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$U(X)A(X) + V(X)B(X) = D(X).$$

Exercice 2.
(1) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{2X-1}{(X+3)^2(X^2+X+1)}.$$

(2) Poursuivre la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 3. Résoudre, *par la méthode du pivot*, le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x + 3y - 4z = 2 \\ 2x + 3y - 5z = 1 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Préciser son rang. Déterminer l'espace affine des solutions en donnant un de ses points et une base de sa direction vectorielle. Quelle égalité exprime ici le théorème du rang ?

Exercice 4. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$: $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$. On considère les sous-espaces vectoriels

$$V = \mathrm{Vect}\{e_1 + e_4, e_2 + e_4, e_3 + 2e_4\}, \qquad W = \mathrm{Vect}\{e_1 - e_4, e_2 + 2e_4, e_3 - e_4\}.$$

(1) Quelle est la dimension de V ? Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ pour qu'il appartienne à V (« équation de V »).
(2) Quelle est la dimension de W ? Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ pour qu'il appartienne à W (« équation de W »).
(3) Quelle est la dimension de $V + W$?
(4) Quelle est la dimension de $V \cap W$?

Exercice 5. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $p \geq 1$. Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de F.
(1) Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $v \notin F$. Montrer que la famille $(u_i + v)_{1 \leq i \leq p}$ est libre.
(2) Soit maintenant v un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $v \in F$: on notera $v = \sum_{1 \leq i \leq p} x_i u_i$.

T.S.V.P.

(i) Montrer que si $\sum_{1\leq i\leq p} x_i = -1$, alors la famille $(u_i + v)_{1\leq i\leq p}$ est liée.

(ii) Montrer que si $\sum_{1\leq i\leq p} x_i \neq -1$, alors la famille $(u_i + v)_{1\leq i\leq p}$ est libre.

Exercice 6. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.

(1)

(i) On suppose que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. Montrer que $n = 2\dim(\operatorname{Im} f)$ et que $f \circ f = 0$.

(ii) Réciproquement, on suppose que $n = 2\dim(\operatorname{Im} f)$ et que $f \circ f = 0$: montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

(2) On suppose que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. On note $p = \dim(\operatorname{Im} f)$ (on a donc $n = 2p$). Soient F un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E, $(e_1, ..., e_p)$ une base de F et $(e'_1, ..., e'_p)$ une base de $\operatorname{Ker} f$.

(i) Que peut-on dire de la famille $(e_1, ..., e_p, e'_1, ..., e'_p)$?

(ii) Justifier que $\big(f(e_1), ..., f(e_p)\big)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

(iii) Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq p$, posons $e_{p+i} = f(e_i)$. Calculer $f(e_{p+i})$.

(iv) Montrer que la famille $(e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_{2p})$ est une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Exercice 7. Pour tout réel a, on note f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2a \\ 0 & 3 & 2a \\ 2 & 2 & 2a+3 \end{pmatrix}.$$

On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ (qui envoie tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ sur lui-même : $\operatorname{id}(v) = v$). Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la notation $f_a - \lambda \operatorname{id}$ désigne donc l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui envoie tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$ sur $f_a(v) - \lambda v$. La matrice de $f_a - \lambda \operatorname{id}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M_a - \lambda I$ où I est la matrice unité à 3 lignes $\times$ 3 colonnes.

(1)

(i) Trouver une base de $\operatorname{Ker}(f_a - \operatorname{id})$.

(ii) On suppose que $a \neq 0$. Trouver une base de $\operatorname{Ker}(f_a - 3\operatorname{id})$.

(iii) On suppose encore que $a \neq 0$. Trouver une base de $\operatorname{Ker}(f_a - (2a+3)\operatorname{id})$.

(2) On suppose ici que $a \notin \{-1, 0\}$.

(i) Donner une base (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$ telle que $u \in \operatorname{Ker}(f_a - \operatorname{id})$, $v \in \operatorname{Ker}(f_a - 3\operatorname{id})$ et $w \in \operatorname{Ker}(f_a - (2a+3)\operatorname{id})$ (justifiez que vos trois vecteurs forment bien une base de $\mathbb{R}^3$).

(ii) Donner *sans aucun calcul* une matrice inversible P_a et une matrice diagonale Δ_a telles que $M_a = P_a \Delta_a P_a^{-1}$.

(iii) Calculer P_a^{-1} par la méthode du pivot.

(3) On prend ici $a = 0$.

(i) Trouver une base de $\operatorname{Ker}(f_0 - 3\operatorname{id})$.

(ii) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f_0 - \operatorname{id}) \oplus \operatorname{Ker}(f_0 - 3\operatorname{id})$.

(iii) Donner *sans aucun calcul* une matrice inversible P_0 et une matrice diagonale Δ_0 telles que $M_0 = P_0 \Delta_0 P_0^{-1}$.

(iv) Calculer P_0^{-1} par la méthode du pivot.

(v) En déduire explicitement (sous sa forme de matrice à 3 lignes et 3 colonnes) la puissance M_0^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(4) On prend désormais $a = -1$.

(i) Montrer que pour tout réel $\lambda \notin \{1, 3\}$, $f_{-1} - \lambda \operatorname{id}$ est injective.

(ii) En déduire qu'il n'existe pas de base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f_{-1} soit diagonale.

(iii) Calculer la matrice $(M_{-1} - I)^2$.

(iv) En déduire une équation et la dimension de $\operatorname{Ker}(f_{-1} - \operatorname{id})^2$ (où $(f_{-1} - \operatorname{id})^2$ signifie $(f_{-1} - \operatorname{id}) \circ (f_{-1} - \operatorname{id})$).

(v) Justifier l'existence d'une base (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$ telle que $u \in \operatorname{Ker}(f_{-1} - \operatorname{id})$, $v \in \operatorname{Ker}(f_{-1} - \operatorname{id})^2$ et $w \in \operatorname{Ker}(f_{-1} - 3\operatorname{id})$. Montrer que pour *toute* telle base, $(f_{-1} - \operatorname{id})(v)$ est colinéaire à u et en déduire que la matrice de f_{-1} y est triangulaire supérieure, c'est-à-dire qu'elle n'a que des 0 sous la diagonale descendante. Expliciter en particulier les éléments de sa diagonale.

(vi) Donner un exemple d'une base comme dans le (v) et expliciter complètement la matrice de f_{-1} dans cette base.

FIN