université de BORDEAUX	**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2016-2017** **CPBX SESSION DE PRINTEMPS** **Parcours :** CP200AMPC **UE :** 4TBX207EX2 **Épreuve :** Algèbre 1 MPC **Date :** 14 juin 2017 **Heure :** 9h **Durée :** 3 heures Documents non autorisés Épreuve de M. : É. Charpentier	**Collège Sciences et technologies**

N.B. Seule la calculatrice CASIO FX 92 COLLÈGE est autorisée.
L'énoncé est recto-verso (ne pas oublier de tourner la page).
Les exercices sont indépendants. Les réponses doivent être convenablement justifiées.

Questions de cours. (1) Énoncer et démontrer le théorème du rang.
(2) Donner la décomposition de $X^{2n}+1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) en facteurs unitaires irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
(3) Montrer que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux.

Exercice 1. Soient $A(X) = X^5 - 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 5X + 2$ et $B(X) = X^4 - X^3 - 6X^2 + 5X - 1$.
(1) Calculer leur PGCD (unitaire) $D(X)$ par l'algorithme d'Euclide.
(2) Calculer $A(X)/D(X)$ et $B(X)/D(X)$.
(3) Déterminer (aussi explicitement que possible) l'ensemble des polynômes $U(X), V(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$U(X)A(X) + V(X)B(X) = D(X).$$

Exercice 2. **(1)** Justifier que l'application $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), qui à une matrice associe sa trace, est linéaire.
(2) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Existe-t-il des endomorphismes $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = \mathrm{id}$?
(3) On considère les endomorphismes u, v de $\mathbb{R}[X]$ définis par $u(P) = P'$ (dérivation) et $v(P)(X) = XP(X)$ (multiplication par X). Déterminer $u \circ v - v \circ u$.

Exercice 3. On étudie la répartition de la population française entre la métropole et l'extérieur (outre-mer et étranger). Pour chaque année $k \geqslant 0$, on note a_k la proportion de la population qui vit en métropole et b_k la proportion qui vit à l'extérieur ; et on considère le vecteur $S_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$. Au début de l'enquête (année étiquetée $k = 0$), 96% de la population vit en métropole et 4% à l'extérieur : donc $S_0 = \begin{pmatrix} 0,96 \\ 0,04 \end{pmatrix}$. Les statistiques de flux de population se traduisent par :

$$S_{k+1} = AS_k \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,02 \\ 0,05 & 0,98 \end{pmatrix}.$$

(1) Expliciter la matrice $A - x\,\mathrm{I}$ où $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice unité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et x un réel indéterminé. Calculer son déterminant $\det(A - x\,\mathrm{I})$. On observera que c'est un polynôme du second degré en x : déterminer ses racines r_1, r_2. Que peut-on dire de $A - x\,\mathrm{I}$ quand $x \in \{r_1, r_2\}$?
(2) Trouver un vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ *non nul* tel que $A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.
(3) Trouver un vecteur $V_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *non nul* tel que $A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = r_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.
(4) Justifier que (V_1, V_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (l'espace des matrices colonnes à deux lignes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$). Quelle est la matrice de passage P de la base canonique $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ à la base (V_1, V_2) ? Calculer P^{-1}.
(5) *Sans calcul*, déterminer la matrice $A' = P^{-1}AP$ ainsi que A'^k.
(6) Exprimer A^k en fonction de A'^k, P et P^{-1}. En déduire explicitement A^k, puis S_k.
(7) (Répartition limite) Montrer que $a_k \to a$ et $b_k \to b$ quand $k \to +\infty$, où a et b sont des nombres qu'on explicitera.

T.S.V.P.

Exercice 4. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & -1 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. On va calculer M^k ($k \in \mathbb{N}$) par deux méthodes différentes. Les questions **(1)** et **(2)** sont indépendantes.

(1) (i) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(X-2)^2(X+4)}$.

(ii) On pose $Q_1(X) = (X-2)^2$, $Q_2(X) = X+4$. En utilisant le résultat précédent, trouver des polynômes $U_1(X), U_2(X)$ tels que $U_1Q_1 + U_2Q_2 = 1$, $\deg(U_1) = 0$, $\deg(U_2) = 1$.

(iii) Dans les polynômes ci-dessus on prend $X = M$, donc $X^0 = M^0 = \mathrm{I}$ (la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).
Ainsi, $Q_1(M) = (M - 2\,\mathrm{I})^2$, $Q_2(M) = M + 4\,\mathrm{I}$ et $U_1(M)Q_1(M) + U_2(M)Q_2(M) = \mathrm{I}$.
On pose $\Pi_1 = U_1(M)Q_1(M)$ et $\Pi_2 = U_2(M)Q_2(M)$. Expliciter Π_1 et Π_2 sous forme de matrices à trois lignes et trois colonnes. Calculer Π_1^2, Π_2^2, $\Pi_1\Pi_2$ et $\Pi_2\Pi_1$. Interprétation géométrique ?

(iv) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $\lambda_k, \mu_k \in \mathbb{R}$ tels que $(\lambda\Pi_1 + \mu\Pi_2)^k = \lambda_k\Pi_1 + \mu_k\Pi_2$.

(v) On note $T = -4\Pi_1 + 2\Pi_2$ et $N = M - T$. Justifier que $TN = NT$. Calculer N^2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = T^k + kT^{k-1}N$.

(vi) Calculer $\Pi_1 N$ et $\Pi_2 N$. En déduire, avec les deux questions précédentes, une expression de M^k ($k \in \mathbb{N}$) sous la forme $a_k\Pi_1 + b_k\Pi_2 + c_kN$ (expliciter a_k, b_k, c_k). Puis expliciter M^k comme matrice à trois lignes et trois colonnes.

(2) (a) Soient $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (0,0,1)$, $u_3 = (1,1,1)$. Justifier que $B = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Exprimer les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans cette base. Donner la matrice de passage P de la base canonique à B, ainsi que P^{-1}.

(b) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M. Calculer la matrice M' de f dans la base B. Montrer qu'on peut écrire $M' = D' + N'$ où D' est une matrice diagonale et où N' n'a qu'un élément non nul. Calculer $D'N'$, $N'D'$ et N'^2. En déduire M'^k puis M^k ($k \in \mathbb{N}$), qu'on explicitera sous forme de matrices à trois lignes et trois colonnes.

Exercice 5. Inverser par la méthode de votre choix la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On se donne $n+1$ points dans $\mathbb{R}^2$: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ où les x_i sont distincts deux à deux. On va montrer qu'il existe un unique polynôme S de degré $\leqslant n$ tel que $S(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{0, 1, ..., n\}$, et le déterminer.
(1) Soient $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré $\leqslant n$ et $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ l'application définie par

$$\varphi(P) = \big(P(x_0), P(x_1), ..., P(x_n)\big).$$

Justifier que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$. En déduire l'existence et l'unicité du polynôme S. Écrire la matrice A de φ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$. Traduire matriciellement les conditions $S(x_i) = y_i$ ($i \in \{0, 1, ..., n\}$) et en déduire une expression de la colonne des coefficients de S en fonction de A et des y_i.

(2) Pour $k \in \{0, 1, ..., n\}$ on pose $L_k(X) = \displaystyle\prod_{j \in \{0,...,n\} \setminus \{k\}} \left(\frac{X - x_j}{x_k - x_j}\right)$. Déterminer $L_k(x_i)$ pour $i, k \in \{0, 1, ..., n\}$ (distinguer les cas $i = k$, $i \neq k$). En déduire que $(L_0, L_1, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner l'expression de S dans cette base.

Exercice 7. On considère le déterminant (dit « de Vandermonde ») $V(a_1, ..., a_n) = \det\big((a_i^{j-1})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}\big)$ (i : numéro de la ligne ; j : numéro de la colonne). Qu'obtient-on si à chaque colonne C_j ($j \geqslant 2$) on retranche a_1C_{j-1} ? En déduire une relation entre $V(a_1, ..., a_n)$ et $V(a_2, ..., a_n)$, puis en déduire $V(a_1, ..., a_n)$ comme fonction explicite des a_i.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F = \dim G$. Montrer que F et G admettent un *même* sous-espace supplémentaire S. (On pourra partir d'une base de $F \cap G$.)

FIN