CP200. Corrigé du DS d'algèbre de février 2015

Question de cours.
La formule de Taylor en a donne :

$$P(X) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(X-a) + \cdots + \frac{P^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}(X-a)^{m-1} + (X-a)^m Q(X)$$

où $Q(X) = \displaystyle\sum_{\substack{k\geq 0 \\ m+k\leq \deg P}} \frac{P^{(m+k)}(a)}{(m+k)!}(X-a)^k$.
Le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-a)^m$ est donc

$$R(X) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(X-a) + \cdots + \frac{P^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}(X-a)^{m-1}$$

et il est nul si et seulement si tous les $P^{(k)}(a)$, pour $0 \leq k \leq m-1$, sont nuls : cqfd.

Exercice 1.
(1) Les divisions successives donnent :
$A(X) = B(X)(X^2+X+1) - (X^3+4X^2+6X+9)$,
$B(X) = (X^3+4X^2+6X+9)(X-4) + 14(X^2+X+3)$,
$X^3+4X^2+6X+9 = (X^2+X+3)(X+3)$.
Donc $D(X) = X^2+X+3$.
(2) On trouve $A(X) = D(X)(X^4+2X^2-1)$ et $B(X) = D(X)(X^2-X+2)$.
(3)

$$\begin{aligned} M(X) &= \frac{A(X)}{D(X)}B(X) = (X^4+2X^2-1)(X^4+4X^2-X+6) \\ &= X^8+6X^6-X^5+13X^4-2X^3+8X^2+X-6. \end{aligned} \tag{1}$$

(4) En remontant l'algorithme d'Euclide on trouve :

$$\begin{aligned} 14D(X) &= B(X) - (X^3+4X^2+6X+9)(X-4) \\ &= B(X) + [A(X) - B(X)(X^2+X+1)](X-4) \\ &= (X-4)A(X) + [1-(X^2+X+1)(X-4)]B(X) \\ &= (X-4)A(X) - (X^3-3X^2-3X-5)B(X) \end{aligned} \tag{2}$$

d'où $U_0(X) = \frac{1}{14}(X-4)$ et $V_0(X) = -\frac{1}{14}(X^3-3X^2-3X-5)$.
(5) La solution générale est :
$U(X) = U_0(X) + S(X)\frac{B(X)}{D(X)} = U_0(X) + S(X)(X^2-X+2)$,
$V(X) = V_0(X) - S(X)\frac{A(X)}{D(X)} = V_0(X) - S(X)(X^4+2X^2-1)$,
avec $S(X) \in \mathbb{R}[X]$ quelconque.

Exercice 2. On écrit $X^n + X + 1 = Q(X)(X-1)^2 + aX + b$. Puis :
- On prend $X = 1$, ce qui donne : $3 = a + b$.
- On dérive puis on prend $X = 1$, ce qui donne : $nX^{n-1} + 1 = Q'(X)(X-1)^2 + 2Q(X)(X-1) + a$ puis $n+1 = a$.

Conclusion : $a = n + 1$, $b = 3 - a = 2 - n$ et le reste est $R(X) = (n + 1)X + 2 - n$.

Exercice 3. Le reste est de la forme $R(X) = aX + b$. On écrit donc

$$P(X) = Q(X)(X^2 + X + 1) + aX + b$$

et on prend $X = j$, d'où : $j^{2015} - 3j^{1915} + 2j^{1815} - 1 = aj + b$. Mais :
$j^{2015} = j^{2013+2} = j^2 = -1 - j$,
$j^{1915} = j^{1914+1} = j$
$j^{1815} = 1$,
donc $aj + b = -j - 1 - 3j + 2 - 1 = -4j$, d'où $a = -4$, $b = 0$ et le reste est $R(X) = -4X$.

Exercice 4. Tout monôme de $P(X)$ s'écrit $a_k X^k = a_{3q+r} X^{3q+r} = a_{3q+r}(X^3)^q X^r$ où $k = 3q + r$ est la division euclidienne de k par 3 ($r \in \{0, 1, 2\}$). On obtient $P_0(X^3)$ en regroupant les monômes où $r = 0$, $P_1(X^3)X$ en regroupant les monômes où $r = 1$ et $P_2(X^3)X^2$ en regroupant les monômes où $r = 2$: d'où l'existence et l'unicité de l'écriture proposée.

FIN