CP200. Corrigé du devoir surveillé d'algèbre de février 2016

Question de cours 1.

1. Si $\deg A > \deg B$, on écrit $A = \mathrm{cd}(A)X^{\deg A}$+termes de degrés moindres (où cd = coefficient dominant), donc $A+B = \mathrm{cd}(A)X^{\deg A}$ + termes de degrés moindres, et donc $\deg(A+B) = \deg A$.
2. Si $\deg A = \deg B = n$, on écrit $A = \mathrm{cd}(A)X^n$+termes de degrés moindres et $B = \mathrm{cd}(B)X^n$+ termes de degrés moindres, donc $A+B = \big(\mathrm{cd}(A)+\mathrm{cd}(B)\big)X^n$ + termes de degrés moindres, et donc on a $\deg(A+B) = \deg A = n$ ssi $\mathrm{cd}(A)+\mathrm{cd}(B) \neq 0$. Et sinon, c'est-à-dire si $\mathrm{cd}(A)+\mathrm{cd}(B) = 0$, on a $\deg(A+B) < n$.

Question de cours 2. *Lemme d'Euclide :* si P est irréductible et divise un produit AB, alors $P|A$ ou $P|B$.

Question de cours 3.

1. $X^{2m}+1 = 0 \Leftrightarrow X^{2m} = -1 = e^{i\pi(2k+1)} \Leftrightarrow X = \exp\big(i\pi\frac{2k+1}{2m}\big)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Si on prend k de 0 à $m-1$ on a déjà m racines *distinctes* situées au-dessus de l'axe réel (car alors l'argument $\pi\frac{2k+1}{2m}$ croît strictement de $\pi\frac{1}{2m}$ à $\pi\frac{2m-1}{2m}$, toutes ses valeurs étant donc entre 0 et π) ; si on prend les racines conjuguées (symétriques par rapport à l'axe réel) on obtient m autres racines distinctes sous l'axe réel : ce qui fait en tout $2m$ racines (distinctes), donc on les a toutes. Par conséquent :

$$X^{2m}+1 = \prod_{k=0}^{m-1}\left(X - \exp\left(i\pi\frac{2k+1}{2m}\right)\right)\prod_{k=0}^{m-1}\left(X - \exp\left(-i\pi\frac{2k+1}{2m}\right)\right) \quad \text{dans } \mathbb{C}[X].$$

2. On regroupe les facteurs conjugués :

$$\left(X - \exp\left(i\pi\frac{2k+1}{2m}\right)\right)\left(X - \exp\left(-i\pi\frac{2k+1}{2m}\right)\right) = X^2 - 2\cos\left(\pi\frac{2k+1}{2m}\right)X + 1$$

d'où

$$X^{2m}+1 = \prod_{k=0}^{m-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\pi\frac{2k+1}{2m}\right)X+1\right) \quad \text{dans } \mathbb{R}[X].$$

Exercice 1.

1. Les divisions donnent : $A(X) = (X+1)B(X) + R_1(X)$ avec $R_1(X) = X^3+3X^2+3X+9$, puis $B(X) = (X-2)R_1(X) + R_2(X)$ avec $R_2(X) = 4X^2+12 = 4(X^2+3)$, et enfin $R_1(X) = (X+3)(X^2+3)$: donc $D(X) = X^2+3$ (dernier reste non nul rendu unitaire).
2. Les divisions donnent $A(X)/D(X) = X^3+2X^2+1$ et $B(X)/D(X) = X^2+X-2$.
3. $M(X) = \frac{A(X)}{D(X)}B(X) = (X^3+2X^2+1)(X^4+X^3+X^2+3X-6)$, d'où en développant :

$$M(X) = X^7+3X^6+3X^5+6X^4+X^3-11X^2+3X-6.$$

4. On remonte le cours des divisions de l'algorithme d'Euclide :
$B(X) = (X-2)R_1(X)+R_2(X)$ avec $R_2(X) = 4D(X)$ donc $D(X) = \frac{1}{4}\,[B(X) - (X-2)R_1(X)]$.
Mais $R_1(X) = A(X) - (X+1)B(X)$ donc

$$\begin{aligned} D(X) &= \frac{1}{4}\,[B(X) - (X-2)A(X) + (X-2)(X+1)B(X)] \\ &= -\frac{1}{4}\,(X-2)A(X) + \frac{1}{4}\,[1 + (X-2)(X+1)]\,B(X) \end{aligned}$$

donc on peut prendre :
$U_0(X) = -\frac{1}{4}\,(X-2)$ et $V_0(X) = \frac{1}{4}\,[1 + (X-2)(X+1)] = \frac{1}{4}\,(X^2 - X - 1)$.

5. La solution générale est :
$U(X) = U_0(X) + S(X)B(X)/D(X) = -\frac{1}{4}\,(X-2) + S(X)(X^2 + X - 2)$,
$V(X) = V_0(X) - S(X)A(X)/D(X) = \frac{1}{4}\,(X^2 - X - 1) - S(X)(X^3 + 2X^2 + 1)$,
avec $S(X) \in \mathbb{R}[X]$ quelconque.

Exercice 2.

1. Les racines de $X^2 - X + 1$ sont $-j$ et $-\overline{j}$.
2. On a :
$P(X) = Q_1(X)(X-1) + 2$,
$P(X) = Q_2(X)(X^2 - X + 1) + X + 2$,
$P(X) = Q_3(X)(X-1)(X^2 - X + 1) + aX^2 + bX + c$: on cherche a, b, c.
• $X = 1 \Rightarrow a + b + c = P(1) = 2$;
• $X = -j \Rightarrow aj^2 - bj + c = P(-j) = -j + 2 \Rightarrow a(-j-1) - bj + c = -j + 2$ (car $j^2 = -j - 1$) $\Rightarrow -(a+b)j - a + c = -j + 2$.
On a donc le système $\begin{cases} a + b + c &= 2 \quad (1) \\ \quad a + b &= 1 \quad (2) \\ -a + c &= 2 \quad (3) \end{cases}$
(2) + (3) donne $b + c = 3$ et alors (1) donne $a = -1$; d'où l'on déduit avec (2) et (3) que $b = 2$ et $c = 1$. Conclusion : le reste cherché est $-X^2 + 2X + 1$.

Exercice 3.

1. On a $P(X) = Q(X)(X-a)(X-b) + \lambda X + \mu$: on cherche λ et μ.
• $X = a \Rightarrow P(a) = \lambda a + \mu$;
• $X = b \Rightarrow P(b) = \lambda b + \mu$.
Par différence : $\lambda = \dfrac{P(b) - P(a)}{b - a}$ puis $\mu = P(a) - \lambda a = \dfrac{bP(a) - aP(b)}{b - a}$.
Conclusion : le reste cherché est $\dfrac{P(b) - P(a)}{b - a}\,X + \dfrac{bP(a) - aP(b)}{b - a}$.
2. Avec $P(X) = X^n$ et $X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$, le résultat précédent donne le reste $(3^n - 2^n)X + 3(2^n) - 2(3^n)$.

FIN