CP200. Corrigé du devoir surveillé d'algèbre de mars 2017

Questions de cours. Voir le cours.

Exercice 1.
(1) On écrit

$$A(X) = a_{\omega(A)}X^{\omega(A)} + \text{monômes de degrés supérieurs}$$
$$B(X) = b_{\omega(B)}X^{\omega(B)} + \text{monômes de degrés supérieurs}$$

donc

$$A(X)B(X) = a_{\omega(A)}b_{\omega(B)}X^{\omega(A)+\omega(B)} + \text{monômes de degrés supérieurs}$$

d'où $\omega(AB) = \omega(A) + \omega(B)$.
(2) De même, avec $\omega(B) > \omega(A)$, on obtient

$$A(X) + B(X) = a_{\omega(A)}X^{\omega(A)} + \text{monômes de degrés supérieurs}$$

et donc $\omega(A + B) = \omega(A)$.
(3) Si $\omega(A) = \omega(B)$, on a

$$A(X) + B(X) = (a_{\omega(A)} + b_{\omega(A)})X^{\omega(A)} + \text{monômes de degrés supérieurs}$$

donc $\omega(A + B) = \omega(A)$ ssi $a_{\omega(A)} + b_{\omega(A)} \neq 0$. Et si $a_{\omega(A)} + b_{\omega(A)} = 0$, il ne reste que

$$A(X) + B(X) = \text{somme de monômes de degrés } > \omega(A)$$

donc $\omega(A + B) > \omega(A)$.
(4) On doit avoir $\omega(0) = \omega(X^n 0) = n + \omega(0)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, donc $\omega(0) = \pm\infty$. Si on avait $\omega(0) = -\infty$, comme on veut que le résultat de la question (2) reste valable pour $A = 0$, $B = X^n$, on aurait la contradiction $n = \omega(X^n) = \omega(0 + X^n) = \omega(0) = -\infty$. Donc la seule solution est $\omega(0) = +\infty$.

Exercice 2.
(1) et **(2)** On a $P(X) = Q(X)S(X)+R(X)$ et on remarque que $S(X) = X^3+X-2X^2-2 = (X^2+1)(X-2)$; donc, dans la division euclidienne par X^2+1 (respectivement par $X-2$), $R(X)$ a le même reste que $Q(X)S(X) + R(X)$, c'est-à-dire que P.
(3) Par hypothèse, $R(X) = Q_1(X)(X^2 + 1) + 7$ et $R(X) = Q_2(X)(X - 2) + 2$, où $R(X) = aX^2 + bX + c$. Prenant $X = i$ puis $X = 2$ on obtient : $-a + bi + c = 7$ puis $4a + 2b + c = 2$; donc $b = 0$, $c - a = 7$, $4a + c = 2$; d'où $a = -1$, $b = 0$, $c = 6$. Et donc $R(X) = -X^2 + 6$.

Exercice 3. La division euclidienne de E par F donne $E(X) = F(X)(X^2+3X+1)-6$, c'est-à-dire $E(X) = F(X)\big(F(X)+1\big)-G(X)\big(G(X)+1\big)$ où $G(X) = 2$. Mais $F(F+1)-G(G+1) = F^2 + F - G^2 - G = F^2 - G^2 + F - G = (F - G)(F + G + 1)$. Et donc

$$E(X) = \big(F(X) - G(X)\big)\big(F(X) + G(X) + 1\big) = (X^2 + 3X - 2)(X^2 + 3X + 3).$$

Exercice 4.
(1) On cherche b, c tels que $X(X+a)(X+2a)(X+3a)+a^4 = (X^2+bX+c)^2$. En développant les deux membres on obtient

$$X^4 + 6aX^3 + 11a^2X^2 + 6a^3X + a^4 = X^4 + 2bX^3 + (b^2+2c)X^2 + 2bcX + c^2.$$

La comparaison des coefficients de X^3 donne $2b = 6a$, donc $b = 3a$; et celle des coefficients de X^2 donne alors $9a^2+2c = 11a^2$ d'où $c = a^2$. Et on constate que la comparaison des autres coefficients donne des résultats cohérents. Donc $Q(X) = (X^2+3aX+a^2)^2$.
(2) Si on prend $a = 1$, on a $X(X+1)(X+2)(X+3)-8 = Q(X)-9 = (X^2+3X+1)^2-3^2 = (X^2+3X-2)(X^2+3X+4)$.

Exercice 5.

1. Les divisions donnent : $A(X) = (X-5)B(X) + R_1(X)$ avec $R_1(X) = X^3+6X^2-6X+7$, puis $B(X) = (X-4)R_1(X)+R_2(X)$ avec $R_2(X) = 29(X^2-X+1)$, et enfin $R_1(X) = (X+7)(X^2-X+1)$: donc $D(X) = X^2-X+1$ (dernier reste non nul rendu unitaire).
2. Les divisions donnent $A(X)/D(X) = X^3-2X^2-13X+2$ et $B(X)/D(X) = X^2+3X+1$.
3. $M(X) = A(X)\,\dfrac{B(X)}{D(X)} = (X^5-3X^4-10X^3+13X^2-15X+2)(X^2+3X+1)$, d'où en développant :
$$M(X) = X^7-18X^5-20X^4+14X^3-30X^2-9X+2.$$
4. On remonte le cours des divisions de l'algorithme d'Euclide :
$B(X) = (X-4)R_1(X)+R_2(X)$ avec $R_2(X) = 29D(X)$ donc
$$D(X) = \frac{1}{29}\left[B(X)-(X-4)R_1(X)\right].$$
Mais $R_1(X) = A(X)-(X-5)B(X)$ donc
$$\begin{aligned} D(X) &= \frac{1}{29}\left[B(X)-(X-4)A(X)+(X-4)(X-5)B(X)\right] \\ &= -\frac{1}{29}(X-4)A(X) + \frac{1}{29}\left[1+(X-4)(X-5)\right]B(X) \end{aligned}$$
donc on peut prendre :
$U_0(X) = -\frac{1}{29}(X-4)$ et $V_0(X) = \frac{1}{29}\left[1+(X-4)(X-5)\right] = \frac{1}{29}(X^2-9X+21)$.
5. La solution générale est :
$U(X) = U_0(X)+S(X)B(X)/D(X) = -\frac{1}{29}(X-4)+S(X)(X^2+3X+1)$,
$V(X) = V_0(X)-S(X)A(X)/D(X) = \frac{1}{29}(X^2-9X+21)-S(X)(X^3-2X^2-13X+2)$,
avec $S(X) \in \mathbb{R}[X]$ quelconque.

FIN