CP200. Corrigé du DS d'algèbre de mars 2018

Question de cours 1. *Lemme d'Euclide.* Soient $P, A, B \in \mathbb{K}[X]$; si P est irréductible et divise AB, alors P divise A ou P divise B.

Preuve. Si P ne divise pas A, comme $D = \mathrm{PGCD}(P, A)$ (le PGCD unitaire) divise P (donc c'est 1 ou $P/\operatorname{cd} P$) et A (donc ce n'est pas $P/\operatorname{cd} P$), on a $D = 1$. Ainsi, P est premier avec A et divise AB, donc (par le lemme de Gauss) P divise B : cqfd.

Question de cours 2.

$$\begin{aligned} X^{2n+1} + 1 &= (X+1) \prod_{k=0}^{n-1} \big(X - e^{i\frac{\pi(2k+1)}{2n+1}}\big)\big(X - e^{-i\frac{\pi(2k+1)}{2n+1}}\big) \quad \text{dans } \mathbb{C}[X] \\ &= (X+1) \prod_{k=0}^{n-1} \Big(X^2 - 2X \cos\big(\frac{\pi(2k+1)}{2n+1}\big) + 1\Big) \quad \text{dans } \mathbb{R}[X]. \end{aligned}$$

Exercice 1. **(1)** L'algorithme d'Euclide donne : $A(X) = (X+6)B(X) + R_1(X)$ avec $R_1(X) = X^3 - 10X^2 - 12X + 11$, puis $B(X) = (X+8)R_1(X) + R_2(X)$ avec $R_2(X) = 90(X^2 + X - 1)$, et enfin $R_1(X) = (X - 11)(X^2 + X - 1)$: donc $D(X) = X^2 + X - 1$ (dernier reste non nul rendu unitaire).

(2) Les divisions donnent $A(X)/D(X) = X^3 + 3X^2 - 15X + 1$ et $B(X)/D(X) = X^2 - 3X + 2$.

(3) $M(X) = A(X)\,\dfrac{B(X)}{D(X)} = (X^5 + 4X^4 - 13X^3 - 17X^2 + 16X - 1)(X^2 - 3X + 2)$, d'où en développant : $M(X) = X^7 + X^6 - 23X^5 + 30X^4 + 41X^3 - 83X^2 + 35X - 2$.

(4) On remonte le cours des divisions de l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} D(X) &= \frac{1}{90}\big(B(X) - (X+8)R_1(X)\big) = \frac{1}{90}\,B(X) - \frac{X+8}{90}\big(A(X) - (X+6)B(X)\big) \\ &= -\frac{X+8}{90}\,A(X) + \frac{(X+8)(X+6)+1}{90}\,B(X) \\ &= -\frac{X+8}{90}\,A(X) + \frac{X^2+14X+49}{90}\,B(X) \end{aligned}$$

donc on peut prendre $U_0(X) = -\frac{1}{90}(X+8)$ et $V_0(X) = \frac{1}{90}(X^2 + 14X + 49)$.

(5) La solution générale est :

$$\begin{aligned} U(X) &= U_0(X) + S(X)\frac{B(X)}{D(X)} = -\frac{1}{90}(X+8) + (X^2 - 3X + 2)S(X), \\ V(X) &= V_0(X) - S(X)\frac{A(X)}{D(X)} = \frac{1}{90}(X^2 + 14X + 49) - (X^3 + 3X^2 - 15X + 1)S(X) \end{aligned}$$

avec $S(X) \in \mathbb{R}[X]$ quelconque.

Exercice 2. $S(1) = 1 - 4 + 5 - 1 - 2 + 1 = 0$.
$S'(X) = 5X^4 - 16X^3 + 15X^2 - 2X - 2 \Rightarrow S'(1) = 5 - 16 + 15 - 2 - 2 = 0$.

$S''(X) = 20X^3 - 48X^2 + 30X - 2 \Rightarrow S''(1) = 20 - 48 + 30 - 2 = 0.$
$S'''(X) = 60X^2 - 96X + 30 \Rightarrow S'''(1) = 60 - 96 + 30 = -6 \neq 0.$
Donc 1 est racine triple de S. Par conséquent :

$$S(X) = X^5 - 4X^4 + 5X^3 - X^2 - 2X + 1 = (X-1)^3(X^2 + bX + c).$$

Le terme de degré nul est $1 = -c$ et le coefficient de X dans $S(X)$ est $-2 = -b+3c$ (puisque $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$). Donc $c = -1$ et $b = -1$ et donc $S(X) = (X-1)^3(X^2 - X - 1)$. Enfin $X^2 - X - 1 = \left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$. Donc la décomposition de $S(X)$ en produit de facteurs irréductibles unitaires dans $\mathbb{R}[X]$ est

$$S(X) = (X-1)^3\left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Exercice 3. Les racines multiples de P (qui sont donc aussi racines de P') sont : 2 (racine d'ordre 6 dans P et donc d'ordre 5 dans P') et -3 (racine d'ordre 4 dans P et donc d'ordre 3 dans P'). D'où : $P'(X) = (X-2)^5(X+3)^3 Q(X)$ où Q est premier avec P. Donc $\mathrm{PGCD}(P, P') = (X-2)^5(X+3)^3$.

Exercice 4. Si C_n a une racine triple x alors $C_n(x) = 0$, $C_n'(x) = 0$ et $C_n''(x) = 0$. Or :

$$C_n'(X) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j)!}\,(2j)X^{2j-1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j-1)!}\,X^{2j-1}$$

$$\begin{aligned} C_n''(X) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j-1)!}\,(2j-1)X^{2j-2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j-2)!}\,X^{2j-2} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-2)!}\,X^{2j-2} \\ &= -C_n(X) + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,X^{2n}. \end{aligned}$$

Donc, si C_n avait une racine triple x, on aurait $C_n(x) = 0$ et $-C_n(x) + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n} = 0$ d'où $x = 0$. Mais $C_n(0) = 1 \neq 0$. Conclusion : C_n n'a pas de racine triple.

Exercice 5. On a $T(X) = Q_1(X)(X-1) + 8 = Q_2(X)(X+5) - 4 = Q(X)(X^2 + 4X - 5) + aX + b$. On remarque que $X^2 + 4X - 5 = (X-1)(X+5)$. On a donc $T(1) = 8 = a + b$ et $T(-5) = -4 = -5a + b$. D'où par différence $6a = 12$, donc $a = 2$ et $b = 6$, et le reste cherché est $R(X) = 2X + 6$.

Exercice 6. On peut utiliser la formule de Taylor : $e = P(2) = 0$; $P'(X) = 4X^3 - 15X^2 + 10X + 8$ donc $d = P'(2) = 0$; $P''(X) = 12X^2 - 30X + 10$, donc $c = P''(2)/2 = -2/2 = -1$; $P'''(X) = 24X - 30$, donc $b = P'''(2)/3! = 18/6 = 3$; et $P^{(4)}(X) = 24$ d'où $a = 24/4! = 1$ (bien sûr !). Conclusion : $P(X) = (X-2)^4 + 3(X-2)^3 - (X-2)^2$.

Exercice 7. Si $P(X^n)$ est divisible par $X - 1$ alors 1 est racine de $P(X^n)$, donc $P(1^n) = 0$, c'est-à-dire $P(1) = 0$, donc 1 est racine de $P(X)$, donc il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = Q(X)(X-1)$, d'où (en remplaçant X par X^n) : $P(X^n) = Q(X^n)(X^n - 1)$.

FIN.