Corrigé du DS d'algèbre d'avril 2013

Question de cours.
Théorème du rang. Soient E, F deux espaces vectoriels (sur un même corps K). On suppose que E est de dimension finie (pour pouvoir *justifier* que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ ont des bases). Alors pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on a : $\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = \dim E$.

Preuve. Soient $(u_i)_i$ une base de $\mathrm{Ker} f$, $(f(v_j))_j$ une base de $\mathrm{Im} f$. Montrons que la famille formée des $(u_i)_i$ et des $(v_j)_j$ est une base de E. Elle est génératrice : car pour tout $x \in E$ on peut écrire $f(x) = \sum_j \lambda_j f(v_j)$ donc $x - \sum_j \lambda_j v_j \in \mathrm{Ker}\, f$ et donc $x = \sum_j \lambda_j v_j + \sum_i \mu_i u_i$. Elle est libre : car si $\sum_j \lambda_j v_j + \sum_i \mu_i u_i = 0$, en appliquant f on obtient $\sum_j \lambda_j f(v_j) = 0$, ce qui montre que les λ_j sont nuls (puisque $(f(v_j))_j$ est libre) ; il reste alors $\sum_i \mu_i u_i = 0$, ce qui montre que les μ_i aussi sont nuls (puisque $(u_i)_i$ est libre).

Exercice 1. **(ii)⇒(i)** : évident, car si $V \subset W$ on a $V \cup W = W$, et si $W \subset V$ on a $V \cup W = V$.
(i)⇒(ii) Montrons la contraposée : non (ii)⇒non (i). On suppose donc que $V \not\subset W$ et $W \not\subset V$; donc il existe $v \in V$ tel que $v \notin W$ et $w \in W$ tel que $w \notin V$. Alors $v + w \notin V$, car sinon on aurait $w = (v+w) - v \in V$; et $v + w \notin W$, car sinon on aurait $v = (v+w) - w \in W$. Donc $v + w \notin V \cup W$, et $V \cup W$ n'est pas stable par combinaisons linéaires donc n'est pas un sous-espace vectoriel de E. CQFD.

Exercice 2. **(1)** $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} = \mathrm{Vect}\{f(e_1) - f(e_2) - f(e_3), f(e_2) - f(e_3), f(e_3)\} = \mathrm{Vect}\{-2(e_2 - e_3), e_2 - e_3, e_1 + e_2 - 2e_3\} = \mathrm{Vect}\{e_2 - e_3, e_1 - e_3\}$ et $\{e_2 - e_3, e_1 - e_3\}$ est clairement libre donc c'est une base de $\mathrm{Im}\, f$. Donc le rang de f est 2. Le théorème du rang indique que $\dim \ker f = 1$, i.e. $\ker f$ est une droite. On voit que $f(e_1 + e_2 - 3e_3) = f(e_1) + f(e_2) - 3f(e_3) = 0$, donc $e_1 + e_2 - 3e_3 \in \ker f$ et donc $\ker f$ est la droite vectorielle dirigée par $e_1 + e_2 - 3e_3$. On a $\mathrm{Im}\, f + \ker f = \mathrm{Vect}\{e_2 - e_3, e_1 - e_3\} + \mathrm{Vect}\{e_1 + e_2 - 3e_3\} = \mathrm{Vect}\{e_2 - e_3, e_1 - e_3, e_1 + e_2 - 3e_3\} = \mathrm{Vect}\{e_2 - e_3, e_1 - e_3, -e_3\} = \mathrm{Vect}\{e_2, e_1, e_3\} = \mathbb{R}^3$ et comme $\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \ker f = 3$ on en déduit que $\mathrm{Im}\, f$ et $\ker f$ sont supplémentaires.
(2) On calcule f^2 sur la base (e_1, e_2, e_3) ou sur la base $(e_2 - e_3, e_1 - e_3, e_1 + e_2 - 3e_3)$: on trouve que $f^2 = f$. Donc f est le projecteur sur $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\{e_2 - e_3, e_1 - e_3\}$ parallèlement à $\ker f = \mathrm{Vect}\{e_1 + e_2 - 3e_3\}$.

Exercice 3.
(1) L'hypothèse $u^2 = u + 2\,\mathrm{Id}_E$ équivaut à $u^2 - u = 2\,\mathrm{Id}_E$, donc à $u \circ \frac{1}{2}(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_E$, ce qui montre que u est inversible (et que $u^{-1} = \frac{1}{2}(u - \mathrm{Id}_E)$).
(2) $E_\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$: c'est donc un sous-espace vectoriel de E.
(3) Si $x \in E_\lambda$, on a $u(x) = \lambda x$ et $u^2(x) = u(\lambda x) = \lambda u(x) = \lambda^2 x$, et en appliquant $u^2 = u + 2\mathrm{Id}_E$ à x on obtient $(\lambda^2 - \lambda - 2)x = 0$. Or, $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$, donc si $\lambda \notin \{-1, 2\}$ on a $\lambda^2 - \lambda - 2 \neq 0$, et la relation $(\lambda^2 - \lambda - 2)x = 0$ donne $x = 0$: par conséquent, si $\lambda \notin \{-1, 2\}$, $E_\lambda = \{0\}$.
(4) $u(y) = u^2(x) + u(x)$; mais $u^2 = u + 2\mathrm{Id}_E$, donc $u^2(x) = u(x) + 2x$, d'où $u(y) = 2u(x) + 2x = 2y$ et $y \in E_2$. De même : $u(z) = u^2(x) - 2u(x) = -u(x) + 2x = -z$ et $z \in E_{-1}$.
(5) Avec les notations ci-dessus, on a $3x = y - z \in E_2 + E_{-1}$, donc $x \in E_2 + E_{-1}$, ce qui prouve que $E = E_2 + E_{-1}$. De plus, si $x \in E_2 \cap E_{-1}$, on a $u(x) = 2x = -x$ donc $x = 0$, ce qui montre que $E_2 \cap E_{-1} = \{0\}$. Conclusion : $E = E_2 \oplus E_{-1}$.

Exercice 4. Il est clair que F et G contiennent 0. F est stable par combinaisons linéaires, car pour $f, g \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\int_0^1 (\lambda f(t) + \mu g(t))\, dt = \lambda \int_0^1 f(t)\, dt + \mu \int_0^1 g(t)\, dt = 0$. G est stable par combinaisons linéaires, car si c_1, c_2 sont des fonctions constantes et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda c_1 + \mu c_2$ est constante. Donc F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

Autre méthode possible : $F = \ker(f \mapsto \int_0^1 f(t)\, dt)$ et $G = \ker(f \mapsto f - \int_0^1 f(t)\, dt)$ donc ce sont des sous-espaces vectoriels de E. Justification : la linéarité de l'intégrale implique celle des applications $f \mapsto \int_0^1 f(t)\, dt$ et $f \mapsto f - \int_0^1 f(t)\, dt$; le fait que $F = \ker(f \mapsto \int_0^1 f(t)\, dt)$ est clair ; et pour justifier que $G = \ker(f \mapsto f - \int_0^1 f(t)\, dt)$ on remarque que $f - \int_0^1 f(t)\, dt = 0 \Rightarrow f = \int_0^1 f(t)\, dt$ (qui est une constante) et que, réciproquement, si f est une constante c alors $\int_0^1 f(t)\, dt = c$ donc $f - \int_0^1 f(t)\, dt = 0$.

Soit $f \in E$. Notons $c = \int_0^1 f(t)\, dt$. Alors $f - c \in F$ (car $\int_0^1 (f(t) - c)\, dt = \int_0^1 f(t)\, dt - c = 0$). En écrivant $f = (f - c) + c$, on voit que $E = F + G$. De plus, $F \cap G = \{0\}$ (car si $\int_0^1 a\, dt = 0$ avec a constante alors $a = 0$). Donc la somme est directe : $E = F \oplus G$, cqfd.

Exercice 5.

(1) $f(P)=0 \Leftrightarrow P(a_0)=...=P(a_n)=0 \Leftrightarrow \Big((X-a_0) \mid P(X),...,(X-a_n) \mid P(X)\Big) \Leftrightarrow \prod_{i=0}^n (X-a_i) \mid P(X)$.
Donc, si on pose $T(X)=\prod_{i=0}^n (X-a_i)$, on a $\ker f = T(X)\,\mathbb{R}[X]$ (l'ensemble des polynômes multiples de $T(X)$). Il n'est pas de dimension finie car pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la famille $(T(X), T(X)X, ..., T(X)X^k)$ est libre : en effet,

$$\sum_{j=0}^k \lambda_j T(X)X^j = 0 \Rightarrow T(X)\sum_{j=0}^k \lambda_j X^j = 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^k \lambda_j X^j = 0 \Rightarrow \lambda_0 = ... = \lambda_k = 0.$$

(2) Le polynôme T ci-dessus est de degré $n+1$. Le seul polynôme de $\ker f$ qui soit de degré $\leq n$ est 0. Donc $\ker f_n = \{0\}$. Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, on en déduit que f_n est un isomorphisme. Ce qui signifie que tout élément de $\mathbb{R}^{n+1}$ a un unique antécédent par f_n : donc il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f_n(P)=(b_0,...,b_n)$, i.e. tel que pour tout $i \in \{0,...,n\}$ on ait $P(a_i)=b_i$.
(3) $Q_i(a_i) = \prod_{j\in\{0,...,n\}\setminus\{i\}} \left(\frac{a_i-a_j}{a_i-a_j}\right) = 1$ et si $k \in \{0,...,n\} \setminus \{i\}$, $Q_i(a_k) = \prod_{j\in\{0,...,n\}\setminus\{i\}} \left(\frac{a_k-a_j}{a_i-a_j}\right) = 0$ puisque l'un des j vaut k. Donc $Q_i(a_j)=\delta_{i,j}$ ($=1$ si $j=i$, 0 sinon). On en déduit que $\sum_{i=0}^n b_iQ_i(a_j) = b_j$. Or tous les Q_i sont de degré n, donc le degré de $\sum_{i=0}^n b_iQ_i$ est $\leq n$. Il en résulte que $\sum_{i=0}^n b_iQ_i$ est le polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in \{0,...,n\}$ on ait $P(a_i)=b_i$.
(4) Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $P(a_i)=b_i$ pour tout $i \in \{0,...,n\}$ ssi $P - \sum_{i=0}^n b_iQ_i \in \ker f$. Donc l'ensemble des polynômes cherchés est $\sum_{i=0}^n b_iQ_i + \ker f = \sum_{i=0}^n b_iQ_i + T(X)\,\mathbb{R}[X]$ où $T(X)=\prod_{i=0}^n (X-a_i)$ (cf. la première question).

Exercice 6. E est l'ensemble des suites de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence : $x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n=0$ ($n \in \mathbb{N}$).
(1) Il est clair que la suite nulle appartient à E. Par ailleurs, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans E et λ, μ dans $\mathbb{R}$, on a $\lambda(x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n)=0$ et $\mu(y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n)=0$ d'où, en ajoutant et en regroupant les termes de même indice :

$$(\lambda x_{n+2}+\mu y_{n+2}) - 2(\lambda x_{n+1}+\mu y_{n+1}) + (\lambda x_n + \mu y_n) = 0,$$

ce qui montre que E est stable par combinaison linéaire. Donc E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites de réels.

Autre méthode possible : $E = \ker(p_{n+2}-2p_{n+1}+p_n)$ où $p_n : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ est la forme linéaire $(x_k)_{k\geq 0} \mapsto x_n$.
(2) $a_n = 1$ ($n \in \mathbb{N}$) donc $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n = 1-2+1 = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$; $b_n = n$ ($n \in \mathbb{N}$), donc $b_{n+2}-2b_{n+1}+b_n = n+2-2n-2+n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes, car non colinéaires (c'est évident, puisqu'on voit par exemple que $a_1 = b_1$ et $a_0 \neq b_0$).
(3) Pour voir si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, regardons $u_{n+1}-u_n$:

$$u_{n+1}-u_n = (x_{n+2}-x_{n+1}) - (x_{n+1}-x_n) = x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n = 0$$

puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Cela prouve que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien constante. On a donc $u_n = u_0$ ($n \in \mathbb{N}$), i.e. $x_{n+1}-x_n = x_1-x_0$ ($n \in \mathbb{N}$) ; ce qui signifie que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme x_0 et de raison x_1-x_0. On en déduit que $x_n = x_0 + (x_1-x_0)n$ ($n \in \mathbb{N}$).
(4) Le résultat qu'on vient d'obtenir montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = x_0(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (x_1-x_0)(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ engendrent E, et comme elles sont linéairement indépendantes, elles forment une base de E.

FIN