CPBx. Corrigé du DS d'algèbre d'avril 2014

Durée : 1h20. Tous documents interdits.

Question de cours. Tout $x \in E$ s'écrit $x = (x - f(x)) + f(x)$ où $f(x) \in \operatorname{Im} f$ et $x - f(x) \in \operatorname{Ker} f$ car $f(x - f(x)) = f(x) - f \circ f(x) = f(x) - f(x) = 0$. Cela prouve que $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. Pour montrer que la somme est directe, prouvons que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$: pour $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ on a $x = f(y)$ (car $x \in \operatorname{Im} f$) et $f(x) = 0$; or $f(x) = f \circ f(y) = f(y) = x$, d'où $x = 0$. Donc $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$. Ainsi tout $x \in E$ se décompose de manière unique sous la forme $x = u + v$ avec $u \in \operatorname{Ker} f$ et $v \in \operatorname{Im} f$, et la projection p sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$ envoie x sur $p(x) = v$; vu ce qui précède, on a $v = f(x)$ (et $u = x - f(x)$), donc $p(x) = f(x)$, et donc f coïncide avec p.

Exercice 1.

(1) $P\mathbb{K}[X]$ contient 0 $(= P \times 0)$ et est stable par combinaisons linéaires : $\alpha PA + \beta PB = P(\alpha A + \beta B) \in P\mathbb{K}[X]$. Donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Ou bien : il est clair que l'application $A \mapsto PA$ de $\mathbb{K}[X]$ dans lui-même est linéaire, et $P\mathbb{K}[X]$ est son image.

(2) Il s'agit de justifier que tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un polynôme de $P\mathbb{K}[X]$ et d'un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$: or c'est exactement ce que dit le théorème de la division euclidienne.

Exercice 2. (1) Supposons f injective. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Il s'agit de montrer que si $(f(x_i))_{i\in I}$ est liée, alors $(x_i)_{i\in I}$ est liée. Or, si $(f(x_i))_{i\in I}$ est liée, écrivons $\sum_{i\in I} \lambda_i f(x_i) = 0$ avec des λ_i non tous nuls ; cela équivaut à $f(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i) = 0$, d'où $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$ car f est injective, et donc $(x_i)_{i\in I}$ est liée.

(2) Réciproquement, supposons que f transforme toute famille libre en une famille libre. Elle envoie tout vecteur non nul x (donc libre) sur un vecteur $f(x)$ non nul (libre), donc $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et f est injective.

Exercice 3. Vu le théorème du rang, une condition nécessaire est que $\dim V + \dim W = \dim E$ (elle implique, en particulier, que W doit être de dimension finie). Montrons qu'elle est suffisante. Notons $m = \dim V$. Soit $(e_1, ..., e_m)$ une base de V (ou l'ensemble $\varnothing$ si $m = 0$). Complétons-la en une base $(e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_n)$ de E. Soit $(e'_{m+1}, ..., e'_n)$ une base de W (ou l'ensemble $\varnothing$ si $m = n$). On définit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ par $f(e_i) = 0$ si $1 \leq i \leq m$ et $f(e_i) = e'_i$ si $m+1 \leq i \leq n$. Il est clair que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{e'_{m+1}, ..., e'_n\} = W$, donc $\dim \operatorname{Ker} f = m$ par le théorème du rang, d'où $\operatorname{Ker} f = V$ (car $\operatorname{Ker} f$ contient V et est de même dimension).

Exercice 4.

(1) (v_1, v_2, v_3, v_4) est libre (par hypothèse), donc (v_1, v_2, v_3) aussi (*a fortiori*). Donc c'est une base de F (famille libre et génératrice), et donc $\dim F = 3$.

(2) De même, (v_4, v_5) est libre donc c'est une base de G et $\dim G = 2$.

(3) $F + G = \operatorname{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = \operatorname{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ (car, d'après la relation $(*)$, v_5 est combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3, v_4). Or, (v_1, v_2, v_3, v_4) est libre, donc c'est une base de $F + G$ et $\dim(F + G) = 4$.

(4) $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 3 + 2 - 4 = 1$.

(5) La relation $(*)$ se réécrit

$$5v_1 + 4v_2 + 3v_3 = -(2v_4 + v_5)$$

où le premier membre est dans F et le second dans G. Le vecteur $5v_1 + 4v_2 + 3v_3$ $(= -(2v_4 + v_5))$ est donc dans $F \cap G$, et il est non nul puisque (v_1, v_2, v_3) (ou (v_4, v_5)) est libre. Comme $\dim(F \cap G) = 1$, ce vecteur constitue donc à lui seul une base de $F \cap G$.

Exercice 5.

(1) Soit $\lambda \neq 0$. Si $f(x) = 0$, alors $0 = f(f(x)) = f \circ f(x) = \lambda x$, donc $x = 0$ (puisque $\lambda \neq 0$) : cela montre que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, et donc que f est injectif.

(2) Soit $\lambda = 0$. Si f était injective, on aurait $x \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0 \Rightarrow f \circ f(x) \neq 0$; et comme il existe bien un $x \in E$ tel que $x \neq 0$ (par hypothèse), cela contredirait $f \circ f = 0$. Donc f n'est pas injective.

(3) Soit $\lambda < 0$. Soit $x \in E$ non nul. Si la famille $(x, f(x))$ n'est pas libre, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \mu x$; donc $f(f(x)) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu^2 x$ et par ailleurs $f(f(x)) = f \circ f(x) = \lambda x$, d'où $\lambda = \mu^2$ (car $x \neq 0$) : or c'est impossible puisque $\lambda < 0$.

(4) On peut prendre $f(x, y) = (0, x)$: ce n'est pas l'application nulle et pourtant $f(f(x, y)) = f(0, x) = (0, 0)$.

Exercice 6.

(1) $(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (2y, y, -y) = y(2, 1, -1)$ donc $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}(2, 1, -1)$ et $\{(2, 1, -1)\}$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.

(2) $f(x, y, z) = x(2, 1, -1) + y(-3, 0, 2) + z(1, 2, 0)$, donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{(2, 1, -1), (-3, 0, 2), (1, 2, 0)\}$. Or le théorème du rang montre, avec la question précédente, que $\dim \operatorname{Im} f = 3 - 1 = 2$. Il suffit donc d'extraire de la partie génératrice $\{(2, 1, -1), (-3, 0, 2), (1, 2, 0)\}$ deux vecteurs non colinéaires pour avoir une base de $\operatorname{Im} f$: on peut prendre $((2, 1, -1), (-3, 0, 2))$ (ou $((2, 1, -1), (1, 2, 0))$, ou $((-3, 0, 2), (1, 2, 0))$).

(3) Le vecteur $(2, 1, -1)$, qui engendre $\operatorname{Ker} f$, est dans $\operatorname{Im} f$, donc $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f$ et donc $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires. Un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$ est une droite vectorielle dirigée par un vecteur qui n'est pas dans $\operatorname{Im} f$, c'est-à-dire un vecteur (a, b, c) tel que $\{(2, 1, -1), (-3, 0, 2), (a, b, c)\}$ soit libre. On peut trouver un tel vecteur dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Essayons $(a, b, c) = (1, 0, 0)$: $\operatorname{Vect}\{(2, 1, -1), (-3, 0, 2), (1, 0, 0)\} = \operatorname{Vect}\{(0, 1, -1), (0, 0, 2), (1, 0, 0)\} = \operatorname{Vect}\{(0, 1, -1), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\} = \operatorname{Vect}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\} = \mathbb{R}^3$. Donc un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$ est $\mathbb{R}(1, 0, 0)$.

Exercice 7.

(1) E contient la suite nulle et il est stable par combinaisons linéaires car si $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n$ et $y_{n+2} = 2y_{n+1} + 3y_n$, en multipliant la première relation par un coefficient λ et la seconde par un coefficient μ et en ajoutant on trouve $\lambda x_{n+2} + \mu y_{n+2} = 2(\lambda x_{n+1} + \mu y_{n+1}) + 3(\lambda x_n + \mu y_n)$.

(2) $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans E, avec $r \neq 0$, si et seulement si $r^{n+2} = 2r^{n+1} + 3r^n$, donc ssi $r^2 = 2r + 3$, et donc ssi $r = -1$ ou 3. Donc $a = -1$, $b = 3$.

(3) Les deux suites $(a^n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, a, a^2, ...)$ et $(b^n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, b, b^2, ...)$ ne sont pas colinéaires, donc elles sont linéairement indépendantes. Il faut montrer qu'elles engendrent E. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$. Soient λ, μ tels que $x_0 = \lambda + \mu$ et $x_1 = -\lambda + 3\mu$ $(= \lambda a + \mu b)$: ils existent bien, et les formules de Cramer donnent $\lambda = (3x_0 - x_1)/4$ et $\mu = (x_0 + x_1)/4$. Par récurrence on a $x_n = \lambda a^n + \mu b^n$: en effet, c'est vrai par hypothèse pour les indices $n = 0$ et $n = 1$, et supposant que c'est vrai pour n et $n + 1$ on en déduit

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n = 2(\lambda a^{n+1} + \mu b^{n+1}) + 3(\lambda a^n + \mu b^n) = \lambda(2a^{n+1} + 3a^n) + \mu(2b^{n+1} + 3b^n) = \lambda a^{n+2} + \mu b^{n+2}$$

donc c'est vrai pour $(n + 1$ et$)$ $n + 2$.

Finalement $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \lambda((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(3^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec (comme on l'a dit) $\lambda = (3x_0 - x_1)/4$ et $\mu = (x_0 + x_1)/4$.

FIN