CP200. Corrigé du DS d'algèbre d'avril 2015

Question de cours.

Parmi les parties S de G telles que $L \cup S$ soit libre (il en existe : c'est le cas de $S = \emptyset$), prenons-en une qui soit maximale (il en existe, car il n'y a qu'un nombre fini de parties de G) : alors $L \cup S$ est une partie libre maximale dans la partie génératrice $L \cup G$ et donc c'est une base ; et elle répond à la question.

Exercice 1. La division donne $X^5 + 2 = (X^2 + X + 1)(X^3 - X^2 + 1) - X + 1$ donc $F(X) = \frac{X^3 - X^2 + 1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{-X+1}{(X^2+X+1)^3}$. Divisant ensuite $X^3 - X^2 + 1$ par $X^2 + X + 1$, on trouve : $X^3 - X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X - 2) + X + 3$, donc $F(X) = \frac{X-2}{X^2+X+1} + \frac{X+3}{(X^2+X+1)^2} + \frac{-X+1}{(X^2+X+1)^3}$.

Exercice 2.

(1) La division de $A(X) = X^2 - X + 1$ par $B(X) = (X - 1)^2 = X^2 - 2X + 1$ donne $A(X) = B(X) + X$, puis la division de $B(X)$ par X donne $B(X) = X(X - 2) + 1$, d'où $1 = B(X) - X(X - 2) = B(X) - [A(X) - B(X)](X - 2) = -A(X)(X - 2) + B(X)(X - 1)$. On peut donc prendre $U(X) = -(X - 2)$ et $V(X) = (X - 1)$.

(2) On en déduit que

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{(X^2 - X + 1)U(X) + (X - 1)^2 V(X)}{(X^2 - X + 1)(X - 1)^2} = \frac{U(X)}{(X-1)^2} + \frac{V(X)}{X^2 - X + 1} \\ &= \frac{-(X-2)}{(X-1)^2} + \frac{X-1}{X^2 - X + 1} = \frac{-(X-1)+1}{(X-1)^2} + \frac{X-1}{X^2-X+1} \\ &= \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X-1} + \frac{X-1}{X^2-X+1} \end{aligned} \tag{1}$$

qui est la décomposition en éléments simples de $F(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 3. Le degré de $F(X)$ est 0 : il y a une partie entière de degré 0. Comme le numérateur et le dénominateur sont unitaires, il est clair que cette partie entière (qui est leur quotient euclidien) est 1. La forme de la décomposition est donc :

$$F(X) = \frac{X^5 + 1}{(X-1)^3 X^2} = 1 + \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X^2} + \frac{e}{X}$$

et

$$a = \left.\frac{X^5+1}{X^2}\right|_{X=1} = \left.\left(X^3 + \frac{1}{X^2}\right)\right|_{X=1} = 2$$

$$b = \left.\left(X^3 + \frac{1}{X^2}\right)'\right|_{X=1} = \left.\left(3X^2 - \frac{2}{X^3}\right)\right|_{X=1} = 1$$

$$c = \frac{1}{2!}\left.\left(X^3 + \frac{1}{X^2}\right)''\right|_{X=1} = \frac{1}{2}\left.\left(6X + \frac{6}{X^4}\right)\right|_{X=1} = 6$$

$$d = \frac{X^5+1}{(X-1)^3}|_{X=0} = -1$$

$$e = \left(\frac{X^5+1}{(X-1)^3}\right)'|_{X=0} = \left.\left(\frac{5X^4(X-1)^3 - 3(X-1)^2(X^5+1)}{(X-1)^6}\right)'\right|_{X=0} = -3$$

Conclusion :
$$F(X) = 1 + \frac{2}{(X-1)^3} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{6}{X-1} - \frac{1}{X^2} - \frac{3}{X}.$$

N.B. On peut aussi poser $Y = X - 1$, ce qui transforme $F(X)$ en $\frac{(1+Y)^5+1}{Y^3(1+Y)^2}$, et faire la division de $(1+Y)^5 + 1 = 2 + 5Y + 10Y^2 + 10Y^3 + 5Y^4 + Y^5$ par $(1+Y)^2 = 1 + 2Y + Y^2$ suivant les puissances croissantes : la division donne $(1+Y)^5+1 = (1+Y)^2(2+Y+6Y^2)+Y^3(-3-Y+Y^2)$, d'où
$$\frac{(1+Y)^5+1}{Y^3(1+Y)^2} = \frac{2+Y+6Y^2}{Y^3} + \frac{-3-Y+Y^2}{(1+Y)^2}$$
et donc, vu que $-3 - Y + Y^2 = -3 - X + 1 + X^2 - 2X + 1 = X^2 - 3X - 1$:
$$F(X) = \frac{2}{(X-1)^3} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{6}{X-1} + \frac{X^2-3X-1}{X^2}$$
et on retrouve la décomposition précédente.

Exercice 4. $\{(2,-1,-2),(1,-2,-1)\}$ est libre car la relation $a(2,-1,-2)+b(1,-2,-1) = (0,0,0)$ implique $2a + b = 0$ et $-a - 2b = 0$ donc, par somme et différence, $a - b = 0$ et $3(a+b) = 0$, d'où $a = b = 0$. Donc $\dim F = 2$. Et $(x,y,z) \in F$ ssi existent a, b dans $\mathbb{R}$ tels que $(x,y,z) = a(2,-1,-2) + b(1,-2,-1) = (2a+b, -a-2b, -2a-b)$: une condition nécessaire est que $z = -x$, et elle est suffisante car alors le système $2a+b = x$ et $-a-2b = y$ (d'inconnues a, b) a une solution, à savoir $a = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y$, $b = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y$.

Exercice 5.

(1) $u_3 = 2u_1$ donc $V = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}$; u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires (si on avait $u_1 = \alpha u_2$ la comparaison des troisièmes composantes donnerait $\alpha = 0$ donc $u_1 = 0$, ce qui n'est pas le cas) : donc $B = (u_1, u_2)$ est une base de V.

(2) Le théorème de la base incomplète garantit qu'on peut former une base B' de $\mathbb{R}^4$ en adjoignant à B des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Comme $u_1 = e_1+2e_2+e_4$ et $u_2 = 2e_1+e_2+3e_3+e_4$, on peut remarquer d'abord que $\mathrm{Vect}\{u_1, u_2, e_1\} = \mathrm{Vect}\{e_1 + 2e_2 + e_4, 2e_1 + e_2 + 3e_3 + e_4, e_1\} = \mathrm{Vect}\{2e_2+e_4, e_2+3e_3+e_4, e_1\}$, puis que $\mathrm{Vect}\{u_1, u_2, e_1, e_2\} = \mathrm{Vect}\{2e_2+e_4, e_2+3e_3+e_4, e_1, e_2\} = \mathrm{Vect}\{e_4, 3e_3 + e_4, e_1, e_2\} = \mathrm{Vect}\{e_4, 3e_3, e_1, e_2\} = \mathbb{R}^4$. On peut donc prendre $B' = (u_1, u_2, e_1, e_2)$.

(3) On remarque que $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$ et donc $W = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$. Voyons si $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre : $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ équivaut à $(a - b + 2c, 2a + b - c, a + b, b + c) = (0,0,0,0)$; les deux dernières coordonnées donnent $a = -b$, $c = -b$ et en reportant cela dans la première on obtient $-b - b - 2b = 0$ d'où $b = 0$ et donc aussi $a = 0$, $c = 0$. Donc (v_1, v_2, v_3) est libre et c'est une base de W.

Exercice 6. Réduisons toutes les f_i au même dénominateur : $f_3(x) = \sqrt{\frac{(1+x)^2}{(1-x)(1+x)}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = f_1(x) + f_2(x)$ et $f_4(x) = \sqrt{\frac{(1-x)^2}{(1-x)(1+x)}} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = f_1(x) - f_2(x)$. Donc $F = \mathrm{Vect}\{f_1, f_2\}$. Montrons que $\{f_1, f_2\}$ est libre : $\alpha f_1 + \beta f_2 = 0$ équivaut à $\frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ pour tout $x \in \,]-1,1[$, donc à $\alpha + \beta x = 0$ pour tout $x \in \,]-1,1[$, donc à $\alpha = \beta = 0$. Conclusion : (f_1, f_2) est une base de F.

Exercice 7.

(1) E est de dimension 3 (une base est $(1, X, X^2)$).

(2) E_P est inclus dans E car le reste d'une division par $X^3 + 1$ est de degré ≤ 2. Il est clair que E_P contient 0 (reste de la division de 0 par $X^3 + 1$). Vérifions que E_P est stable par combinaison linéaire. Un élément $R(X)$ de E appartient à E_p s'il existe A et Q dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $A(X)P(X) = Q(X)(X^3+1) + R(X)$. Si $R_1(X)$, $R_2(X)$ sont deux éléments de E_p, on a $A_1(X)P(X) = Q_1(X)(X^3+1) + R_1(X)$, $A_2(X)P(X) = Q_2(X)(X^3+1) + R_2(X)$ donc, pour λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{R}$,

$$(\lambda_1 A_1(X) + \lambda_2 A_2(X))P(X) = (\lambda_1 Q_1(X) + \lambda_2 Q_2(X))(X^3+1) + \lambda_1 R_1(X) + \lambda_2 R_2(X)$$

ce qui montre que $\lambda_1 R_1(X) + \lambda_2 R_2(X)$ (qui est de degré ≤ 2) est le reste de la division de $(\lambda_1 A_1(X) + \lambda_2 A_2(X))P(X)$ par X^3+1, et donc c'est bien un élément de E_P.

(3) Un élément $R(X)$ de E appartient à E_{X^2-X+1} s'il existe A et Q dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $A(X)(X^2-X+1) = Q(X)(X^3+1) + R(X)$, c'est-à-dire s'il s'écrit

$$R(X) = A(X)(X^2-X+1) - Q(X)(X^3+1) = [A(X) - Q(X)(X+1)](X^2-X+1).$$

Comme R doit être de degré ≤ 2, $A(X) - Q(X)(X+1)$ doit être une constante : $R(X) = \lambda(X^2 - X+1)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$; auquel cas $R(X)$ est bien de la forme voulue, en prenant par exemple $A(X) = \lambda$ et $Q(X) = 0$. Donc E_{X^2-X+1} est la droite vectorielle de E engendrée par $X^2 - X + 1$, et $\dim E_{X^2-X+1} = 1$.

FIN