CP200. Corrigé du devoir surveillé d'algèbre d'avril 2016

QC1. *Th. de la base incomplète.* Soient E un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$, L une partie libre, G une partie génératrice. Alors il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset L \cup G$.

QC2. Si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, $f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(x-y) = 0 \Leftrightarrow x - y \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow x = y$ et donc f est injective. Réciproquement, si f est injective, $f(x) = 0 = f(0) \Rightarrow x = 0$ et donc $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Exercice 1. Il est tentant de faire la soustraction $p_2 - p_3$ (pour éliminer les X^2) : elle donne $p_2 - p_3 = -2X - 1 = -2p_1 + 1$, d'où $2p_1 + p_2 - p_3 = 1$; on en déduit $X = p_1 - 1 = -p_1 - p_2 + p_3$ et on voit immédiatement que $X^2 = p_2 - p_1$. Cela prouve que (p_1, p_2, p_3) engendre $\operatorname{Vect}\{1, X, X^2\} = \mathbb{R}_2[X]$. Comme $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$, cette famille génératrice à trois éléments est une base.

Les expressions de $X^2, X, 1$ en fonction de p_1, p_2, p_3 donnent :
$A = 5X^2 + 12X + 9 = 5(p_2 - p_1) + 12(-p_1 - p_2 + p_3) + 9(2p_1 + p_2 - p_3) = p_1 + 2p_2 + 3p_3$.

Exercice 2. Vu que $(2,-1,-2) = (1,1,-1) + (1,-2,-1)$, $F = \operatorname{Vect}\{(1,1,-1),(1,-2,-1)\}$; or il est clair que $(1,1,-1)$ et $(1,-2,-1)$ ne sont pas colinéaires (proportionnels), donc ils sont linéairement indépendants (critère valable pour *deux* vecteurs) et par conséquent ils forment une base de F. Ainsi $\dim F = 2$.

$(x,y,z) \in F$ ss'il existe des réels λ, μ tels que $(x,y,z) = \lambda(1,1,-1) + \mu(1,-2,-1)$, i.e. tels que $x = \lambda + \mu$, $y = \lambda - 2\mu$, $z = -\lambda - \mu$, i.e. tels que $x = \lambda + \mu$, $y = \lambda - 2\mu$, $z = -x$. Le système $x = \lambda + \mu$, $y = \lambda - 2\mu$ (d'inconnues λ, μ) est de Cramer (déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$), donc il a toujours des solutions et il ne reste que la condition $z = -x$.

Exercice 3. Si on écrit $\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3 = 0$, la première et la troisième coordonnées donnent $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha - \beta = 0$ donc $\alpha = \beta = 0$ et il reste $\gamma\varepsilon_3 = 0$ donc aussi $\gamma = 0$: cela prouve que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre. Le théorème de la base incomplète garantit qu'on peut la compléter en une base de $\mathbb{R}^5$ en lui adjoignant deux vecteurs convenables de la base canonique $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$. On a $\varepsilon_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $\varepsilon_2 = e_1 - e_3$, $\varepsilon_3 = e_2 + 2e_4$ donc $\operatorname{Vect}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} = \operatorname{Vect}\{e_1 + e_2 + e_3 + e_4, e_1 - e_3, e_2 + 2e_4\}$. On voit que e_5 ne figure dans aucun des ε_i : il faut donc l'adjoindre ; adjoignant aussi e_4 (par exemple) on aura : $\operatorname{Vect}\{e_1 + e_2 + e_3 + e_4, e_1 - e_3, e_2 + 2e_4, e_4, e_5\} = \operatorname{Vect}\{e_1 + e_2 + e_3, e_1 - e_3, e_2, e_4, e_5\} = \operatorname{Vect}\{e_1 + e_3, e_1 - e_3, e_2, e_4, e_5\} = \operatorname{Vect}\{e_1, e_3, e_2, e_4, e_5\} = \mathbb{R}^5$ (puisque les combinaisons linéaires de $e_1 + e_3$ et $e_1 - e_3$ sont les combinaisons linéaires de e_1 et e_3). Donc $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, e_4, e_5)$ est une base de $\mathbb{R}^5$.

Exercice 4. $(x,y,z,t) \in F_1 \Leftrightarrow t = -x-y+2z \Leftrightarrow (x,y,z,t) = (x,y,z,-x-y+2z) = x(1,0,0,-1) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,2)$ donc $F_1 = \operatorname{Vect}\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,2)\}$, ce qui justifie que F_1 est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$. De plus $\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,2)\}$ est libre car $x(1,0,0,-1) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,2) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow (x,y,z,-x-y+2z) = (0,0,0,0) \Rightarrow x = y = z = 0$ (regarder les trois premières coordonnées). Donc $\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,2)\}$ est une base de F_1 et donc $\dim F_1 = 3$.

$(x,y,z,t) \in F_2 \Leftrightarrow t = x+y+z \Leftrightarrow (x,y,z,t) = (x,y,z,x+y+z) = x(1,0,0,1) + y(0,1,0,1) + z(0,0,1,1)$ donc $F_2 = \operatorname{Vect}\{(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$, ce qui justifie que F_1 est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$. Là encore, $\{(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$ est libre car $x(1,0,0,1)+y(0,1,0,1)+z(0,0,1,1) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow (x,y,z,x+y+z) = (0,0,0,0) \Rightarrow x = y = z = 0$. Donc $\{(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$ est une base de F_2 et donc $\dim F_2 = 3$.

(1) $F_1 + F_2 = \operatorname{Vect}\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,2),(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$. En utilisant la base canonique de $\mathbb{R}^4$, pour alléger l'écriture : $F_1 + F_2 = \operatorname{Vect}\{e_1 - e_4, e_2 - e_4, e_3 +$

$2e_4, e_1+e_4, e_2+e_4, e_3+e_4\}$. À e_3+2e_4 on peut retrancher e_3+e_4 et il reste e_4, donc $F_1+F_2 = \mathrm{Vect}\{e_1-e_4, e_2-e_4, e_4, e_1+e_4, e_2+e_4, e_3+e_4\} = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, e_4, e_1, e_2, e_3\} = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, e_4, e_3\}$. Donc $\dim(F_1+F_2) = 4$ et (Grassmann) $\dim(F_1 \cap F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1+F_2) = 3+3-4 = 2$.

Exercice 5.
(1) $f\big(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')\big) = f(\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z') = (\lambda x+\mu x'+\lambda z+\mu z', \lambda y+\mu y'+\lambda z+\mu z') = \lambda(x+z, y+z)+\mu(x'+z', y'+z') = \lambda f(x,y,z)+\mu f(x',y',z')$ donc f est linéaire.

$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow (x+z, y+z) = (0,0) \Leftrightarrow (x=-z$ et $y=-z) \Leftrightarrow (x,y,z) = (-z,-z,z) = z(-1,-1,1)$ et donc $\mathrm{Ker}\, f = \mathbb{R}(-1,-1,1)$.

Le théorème du rang donne $\dim \mathrm{Im}\, f = 3-1 = 2$ et l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}^2$ donc $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^2$.
(2) g est linéaire car la dérivation est linéaire. $P = aX^2+bX+c \in \mathrm{Ker}\, g \Leftrightarrow 2a+2(2aX+b)+aX^2+bX+c = 0 \Leftrightarrow aX^2+(4a+b)X+(2a+2b+c) = 0 \Leftrightarrow (a=0$ et $4a+b=0$ et $2a+2b+c=0) \Leftrightarrow a=b=c=0$. Donc $\mathrm{Ker}\, g = \{0\}$: g est injective. Comme c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, son injectivité implique sa surjectivité et donc $\mathrm{Im}\, g = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 6. Pour $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ on note V_P l'ensemble des polynômes divisibles par P.
(1) Les éléments de V_P sont les polynômes de la forme QP, $Q \in \mathbb{K}[X]$: $0 = 0P$ en fait partie et V_P est stable par combinaisons linéaires car $\lambda_1 Q_1 P + \lambda_2 Q_2 P = (\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2)P$.

S'il était de dimension finie, donc engendré par un ensemble fini $\{Q_1P, ..., Q_nP\}$, tous ses éléments seraient de degré inférieur ou égal au plus grand des degrés $\deg(Q_1P), ..., \deg(Q_nP)$. Or V_P contient tous les X^nP ($n \in \mathbb{N}$), qui sont de degré arbitrairement grand. Donc V_P n'est pas de dimension finie.
(2) $X-a$ et $X-b$ sont des irréductibles unitaires distincts donc premiers entre eux. Bézout dit alors exactement que $V_{X-a}+V_{X-b} = \mathbb{K}[X]$.

Les sous-espaces V_{X-a} et V_{X-b} ne sont pas supplémentaires car $V_{X-a} \cap V_{X-b}$ n'est pas réduit à $\{0\}$ (il contient tous les multiples communs à $X-a$ et $X-b$, notamment $(X-a)(X-b)$).

Exercice 7.
(1) E contient évidemment la suite nulle et il stable par combinaisons linéaires car si $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$ et $v_{n+1} = v_n + 2n_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour tous réels λ, μ on a $\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} = (\lambda u_n + \mu v_n) + 2(\lambda u_{n-1} + \mu v_{n-1})$.
(2) $r^{n+1} = r^n + 2r^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) équivaut (en simplifiant par r^{n-1}) à $r^2 = r+2$, dont les racines sont $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$.
(3) Il est clair que les suites $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,-1,1,-1,...)$ et $(2^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,2,4,8,...)$ ne sont pas colinéaires (proportionnelles), donc elles sont linéairement indépendantes.
(4) Soit (u_n) dans E : $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Il existe λ et μ dans $\mathbb{R}$ tels que $\lambda+\mu = u_0$ et $-\lambda+2\mu = u_1$: en effet, Cramer ou des manipulations simples donnent immédiatement $\mu = (u_0+u_1)/3$ et $\lambda = (2u_0-u_1)/3$. Ainsi on a $u_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$ et $u_{n+1} = \lambda(-1)^{n+1} + \mu 2^{n+1}$ pour $n=0$. Or, si ces deux relations consécutives sont vraies pour un entier n (hypothèse de récurrence), la relation de récurrence définissant E donne $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n = \lambda(-1)^{n+1} + \mu 2^{n+1} + 2\lambda(-1)^n + 2\mu 2^n = \lambda(-1)^{n+2} + \mu 2^{n+2}$ car $(-1)^{n+1} + 2(-1)^n = (-1)^{n+2}$ et $2 \cdot 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2}$; ainsi l'hypothèse $u_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$, $u_{n+1} = \lambda(-1)^{n+1} + \mu 2^{n+1}$ implique $u_{n+1} = \lambda(-1)^{n+1} + \mu 2^{n+1}$, $u_{n+2} = \lambda(-1)^{n+2} + \mu 2^{n+2}$, autrement dit elle est héréditaire. On a donc bien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui signifie que les suites $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ engendrent E. Comme elles sont linéairement indépendantes (on l'a vu), elles forment une base de E. FIN