CP200. Corrigé du devoir surveillé d'algèbre d'avril 2017

QC1. B_1, B_2 étant premiers entre eux on peut écrire $U_1B_1 + U_2B_2 = 1$ (Bézout) donc

$$A = AU_1B_1 + AU_2B_2$$

et si on pose $C_1 = AU_2$, $C_2 = AU_1$, on obtient $A = A_2B_1 + A_1B_2$ et donc

$$F = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2}\cdot$$

Ensuite, par division euclidienne on a $C_1 = Q_1B_1 + A_1$ où $\deg A_1 < \deg B_1$; donc

$$F = \frac{A_1}{B_1} + Q_1 + \frac{C_2}{B_2} = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2}$$

en posant $A_2 = C_2 + Q_1B_2$; on a $\deg \frac{A_1}{B_1} < 0$ par choix de A_1 et donc aussi

$$\deg \frac{A_2}{B_2} = \deg(F - \frac{A_1}{B_1}) < 0$$

puisque $\deg F < 0$.

QC2. D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$. Donc : f injective $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim E = n = \dim F \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F \Leftrightarrow f$ surjective.

L'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $P(X) \mapsto XP(X)$ est injectif (son noyau est $\{0\}$) mais pas surjectif (son image $X\mathbb{K}[X]$ ne contient pas 1).

Exercice 1. Le théorème du rang donne la condition nécessaire $\dim V + \dim W = \dim E$. Montrons qu'elle est suffisante. Soit $(e_1, ..., e_k)$ une base de V (vide si $V = \{0\}$). Complétons-la en une base de E : $(e_1, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n)$. Soit $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-k})$ une base de W (vide si $W = \{0\}$). On définit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ par $f(e_1) = 0, ..., f(e_k) = 0$ (de sorte que $V \subset \operatorname{Ker} f$) et les $n - k$ égalités $f(e_{k+1}) = \varepsilon_1, ..., f(e_n) = \varepsilon_{n-k}$. Alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{f(e_1), ..., f(e_k), f(e_{k+1}), ..., f(e_n)\} = \operatorname{Vect}\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-k}\}$ donc $\dim \operatorname{Ker} f = n - (n - k) = k = \dim V$ (théor. du rang) ; mais on a aussi $\operatorname{Ker} f \supset V$ donc $\operatorname{Ker} f = V$.

Exercice 2. $F(X) = \dfrac{a}{(X-1)^3} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{c}{X-1} + \dfrac{dX+e}{X^2+1}$ où :

$a = (X-1)^3F(X)\Big|_{X=1} = \dfrac{1}{X^2+1}\Big|_{X=1} = \dfrac{1}{2}$,

$b = \dfrac{d}{dX}\left(\dfrac{1}{X^2+1}\right)\Big|_{X=1} = \dfrac{-2X}{(X^2+1)^2}\Big|_{X=1} = -\dfrac{1}{2}$,

$c = \dfrac{1}{2!}\dfrac{d^2}{dX^2}\left(\dfrac{1}{X^2+1}\right)\Big|_{X=1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-2(X^2+1)^2 - (-2X)2(X^2+1)2X}{(X^2+1)^4}\right)\Big|_{X=1} = \dfrac{1}{4}$,

$di + e = (X^2+1)F(X)\Big|_{X=i} = \dfrac{1}{(i-1)^3} = \dfrac{(-i-1)^3}{2^3} = \dfrac{1-i}{4}$ donc $d = -\dfrac{1}{4}$, $e = \dfrac{1}{4}$.

Concl. : $F(X) = \dfrac{1/2}{(X-1)^3} - \dfrac{1/2}{(X-1)^2} + \dfrac{1/4}{X-1} - \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{X-1}{X^2+1}$.

On peut aussi poser $Y = X - 1$, donc $F(X) = \dfrac{1}{Y^3(2+2Y+Y^2)}$ et faire la division suivant les puissances croissantes de 1 par $2 + 2Y + Y^2$: on trouve $1 = (2 + 2Y + Y^2)(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}Y + \frac{1}{4}Y^2) - \frac{1}{4}Y^4$

d'où $F(X) = \dfrac{1}{2Y^3} - \dfrac{1}{2Y^2} + \dfrac{1}{4Y} - \dfrac{Y}{4(2+2Y+Y^2)}$ et comme $Y = X - 1$ on retrouve le résultat précédent.

Exercice 3.
(1) Comme $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$, il suffit de vérifier que (P_0, P_1, P_2, P_3) est libre. Or, si $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$, le choix $X = 0$ donne $\lambda_0 = 0$, puis $X = 1$ donne $\lambda_1 = 0$, puis $X = 2$ donne $\lambda_2 = 0$ et il reste $\lambda_3 P_3 = 0$ d'où $\lambda_3 = 0$.
(2) $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 1 + X + X^2 + X^3$: le choix $X = 0$ donne $\lambda_0 = 1$; puis $X = 1$ donne $1 + \lambda_1 = 4$ donc $\lambda_1 = 3$; puis $X = 2$ donne $1 + 6 + \lambda_2 = 15$ d'où $\lambda_2 = 8$; et enfin $X = -1$ (par exemple) donne $1 - 3 + 8 - \lambda_3 = 0$ d'où $\lambda_3 = 6$. Conclusion : $P(X) = P_0 + 3P_1 + 8P_2 + 6P_3$.

Exercice 4. On voit que $(4, 1, 3) = 2(2, -1, 1) + (0, 3, 1)$ et que $(2, -1, 1), (0, 3, 1)$ ne sont pas colinéaires, donc $\dim F = 2$: F est un plan.

Soit $ax + by + cz = 0$ une équation de F ($F \ni 0$) : puisque $(2, -1, 1)$ et $(0, 3, 1)$ sont dans F, on a $2a - b + c = 0$ et $3b + c = 0$, donc $c = -3b$ et $2a = b - c = 4b$ d'où $a = 2b$. On peut prendre $b = 1$, $a = 2$, $c = -3$, ce qui donne l'équation $2x + y - 3z = 0$.

Exercice 5. Si on écrit $\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3 = 0$, la première et la cinquième coordonnées donnent $\alpha + 5\beta = 0$ et $5\alpha + \beta = 0$ donc $\alpha = \beta = 0$ et il reste $\gamma\varepsilon_3 = 0$ donc aussi $\gamma = 0$: cela prouve que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre. Le théorème de la base incomplète garantit qu'on peut la compléter en une base de $\mathbb{R}^5$ en lui adjoignant deux vecteurs convenables de la base canonique $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$. On a $\varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 + 5e_5$, $\varepsilon_2 = 5e_1 + 4e_2 + 3e_3 + 2e_4 + e_5$, $\varepsilon_3 = e_2 + e_4$ donc $\mathrm{Vect}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} = \mathrm{Vect}\{e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 + 5e_5, 5e_1 + 4e_2 + 3e_3 + 2e_4 + e_5, e_2 + e_4\} = \mathrm{Vect}\{e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 + 5e_5 - 2(e_2 + e_4), 5e_1 + 4e_2 + 3e_3 + 2e_4 + e_5 - 2(e_2 + e_4), e_2 + e_4\} = \mathrm{Vect}\{e_1 + 3e_3 + 2e_4 + 5e_5, 5e_1 + 2e_2 + 3e_3 + e_5, e_2 + e_4\}$.
Adjoignons e_1 (par exemple) : $\mathrm{Vect}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, e_1\} = \mathrm{Vect}\{3e_3 + 2e_4 + 5e_5, 2e_2 + 3e_3 + e_5, e_2 + e_4, e_1\}$.
Adjoignons e_5 (par exemple) : $\mathrm{Vect}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, e_1, e_5\} = \mathrm{Vect}\{3e_3 + 2e_4, 2e_2 + 3e_3, e_2 + e_4, e_1, e_5\} = \mathrm{Vect}\{3e_3 + 2e_4, 2e_2 + 3e_3 - (3e_3 + 2e_4), e_2 + e_4, e_1, e_5\} = \mathrm{Vect}\{3e_3 + 2e_4, 2(e_2 - e_4), e_2 + e_4, e_1, e_5\} = \mathrm{Vect}\{3e_3 + 2e_4, e_2 - e_4 + (e_2 + e_4), e_2 + e_4, e_1, e_5\} = \mathrm{Vect}\{3e_3 + 2e_4, 2e_2, e_2 + e_4, e_1, e_5\} = \mathrm{Vect}\{3e_3 + 2e_4, e_2, e_4, e_1, e_5\} = \mathrm{Vect}\{3e_3, e_2, e_4, e_1, e_5\} = \mathbb{R}^5$. Donc $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, e_1, e_5)$ est une base de $\mathbb{R}^5$.

Exercice 6. **(1)** $(x, y, z, t) \in F_1$ ssi $x = -z + t$ et $y = -2z$, donc ssi $(x, y, z, t) = (-z + t, -2z, z, t) = z(-1, -2, 1, 0) + t(1, 0, 0, 1)$, avec $z, t \in \mathbb{R}$ quelconques. Donc $F_1 = \mathrm{Vect}\{(-1, -2, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$ et ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc $\big((-1, -2, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\big)$ est une base de F_1.
$(x, y, z, t) \in F_2$ ssi $x = y + z + t$ et $x = y - z$, donc ssi $x = y - z$ et $y + z + t = y - z$, donc ssi $x = y - z$ et $t = -2z$, et donc ssi $(x, y, z, t) = (y - z, y, z, -2z) = y(1, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, -2)$, avec $y, z \in \mathbb{R}$ quelconques. Donc $F_2 = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, -2)\}$ et ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc $\big((1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, -2)\big)$ est une base de F_2.
(2) $F_1 + F_2 = \mathrm{Vect}\{(-1, -2, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, -2)\}$. En utilisant la base canonique de $\mathbb{R}^4$: $F_1 + F_2 = \mathrm{Vect}\{-e_1 - 2e_2 + e_3, e_1 + e_4, e_1 + e_2, -e_1 + e_3 - 2e_4\} = \mathrm{Vect}\{-e_1 - 2e_2 + e_3 + (e_1 + e_2), e_1 + e_4, e_1 + e_2, -e_1 + e_3 - 2e_4 + (e_1 + e_4)\} = \mathrm{Vect}\{-e_2 + e_3, e_1 + e_4, e_1 + e_2, e_3 - e_4\} = \mathrm{Vect}\{-e_2 + e_3, e_1 + e_4, e_1 + e_2 + (-e_2 + e_3) - (e_3 - e_4), e_3 - e_4\} = \mathrm{Vect}\{-e_2 + e_3, e_1 + e_4, e_1 + e_4, e_3 - e_4\} = \mathrm{Vect}\{-e_2 + e_3, e_1 + e_4, e_3 - e_4\}$ et ces trois vecteurs sont linéairement indépendants car $a(-e_2 + e_3) + b(e_1 + e_4) + c(e_3 - e_4) = 0$ implique $b = 0$ (coeff. de e_1), $-a = 0$ (coeff. de e_2) et il reste $c(e_3 - e_4) = 0$ d'où $c = 0$. Donc $\big(-e_2 + e_3, e_1 + e_4, e_3 - e_4\big)$ est une base de $F_1 + F_2$.

La formule de Grassmann donne : $\dim(F_1 \cap F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 + F_2) = 2 + 2 - 3 = 1$.

Exercice 7.
(1)

$$\begin{aligned}&f\big(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')\big)=f(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z')\\&=(\lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y'-\lambda z-\mu z',\lambda x+\mu x'+\lambda z+\mu z',\lambda y+\mu y'-\lambda x-\mu x'-3\lambda z-3\mu z')\\&=\lambda(x+y-z,x+z,y-x-3z)+\mu(x'+y'-z',x'+z',y'-x'-3z')\\&=\lambda f(x,y,z)+\mu f(x',y',z')\end{aligned}$$

donc f est linéaire.

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in\operatorname{Ker} f&\Leftrightarrow(x+y-z,x+z,y-x-3z)=(0,0,0)\Leftrightarrow(x=-y+z;x=-z;x=y-3z)\\&\Leftrightarrow(x=-z;-z=-y+z;-z=y-3z)\Leftrightarrow(x=-z;y=2z;y=2z)\\&\Leftrightarrow(x,y,z)=(-z,2z,z)=z(-1,2,1)\end{aligned}$$

donc $\operatorname{Ker} f=\mathbb{R}(-1,2,1)$ (une droite).

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f&=\operatorname{Vect}\{f(1,0,0),f(0,1,0),f(0,0,1)\}=\operatorname{Vect}\{(1,1,-1),(1,0,1),(-1,1,-3)\}\\&=\operatorname{Vect}\{(1,1,-1),(1,0,1),(-1,1,-3)+3(1,0,1)\}=\operatorname{Vect}\{(1,1,-1),(1,0,1),(2,1,0)\}\\&=\operatorname{Vect}\{(1,0,1),(2,1,0)\}\end{aligned}$$

car $(1,1,-1)=(2,1,0)-(1,0,1)$. Il est clair que $\{(1,0,1),(2,1,0)\}$ est libre (deux vecteurs non colinéaires), donc c'est une base de $\operatorname{Im} f$ (qui est donc un plan).

Exercice 8.
(1) E contient évidemment la fonction nulle ; et il stable par combinaisons linéaires : car si $y''+y'-6y=0$ et $z''+z'-6z=0$, alors pour tous réels λ,μ on a $\lambda(y''+y'-6y)+\mu(z''+z'-6z)=0$, donc $\lambda y''+\mu z''+\lambda y'+\mu z'-6\lambda y-6\mu z=0$, c.-à-d. $(\lambda y+\mu z)''+(\lambda y+\mu z)'-6(\lambda y+\mu z)=0$.
(2) $(e^{rt})''+(e^{rt})'-6e^{rt}=0\Leftrightarrow(r^2+r-6)e^{rt}=0\Leftrightarrow r^2+r-6=0$. Cette équation a deux racines : $r_1=-3$, $r_2=2$.
(3) Si $\lambda e^{-3t}+\mu e^{2t}=0$ (pour tout $t\in\mathbb{R}$), alors $\lambda e^{-5t}+\mu=0$ d'où $\mu=0$ en faisant $t\to+\infty$; il reste alors $\lambda e^{-3t}=0$ donc $\lambda=0$.
(4) De $y(t)=\lambda e^{-3t}+\mu e^{2t}$ et sa dérivée $y'(t)=-3\lambda e^{-3t}+2\mu e^{2t}$ on tire (par exemple en appliquant les formules de Cramer, ou par substitution) : $\lambda=\frac{1}{5}\big(2y(t)-y'(t)\big)e^{3t}$ et $\mu=\frac{1}{5}\big(y'(t)+3y(t)\big)e^{-2t}$. Pour montrer que λ et μ sont indépendants de t, dérivons-les :

$$5\lambda'=\big(2y'(t)-y''(t)\big)e^{3t}+\big(2y(t)-y'(t)\big)3e^{3t}=-\big(y''(t)+y'(t)-6y(t)\big)e^{3t}=0$$

puisque $y\in E$, et

$$5\mu'=\big(y''(t)+3y'(t)\big)e^{-2t}+\big(y'(t)+3y(t)\big)(-2)e^{-2t}=\big(y''(t)+y'(t)-6y(t)\big)e^{-2t}=0$$

en utilisant encore que $y\in E$. Et donc (e^{-3t},e^{2t}) est bien une base de E.

FIN