CP200. Corrigé du devoir surveillé d'algèbre de mai 2018

Question de cours.
(1) Soient E, F deux $\mathbb{K}$-e.v. avec $\dim E < +\infty$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$: alors $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$.
(2) Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est surjectif, on a $\operatorname{Im} f = E$ donc $\dim \operatorname{Im} f = \dim E$ et le théorème du rang donne $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, ce qui prouve que f est injectif : il est donc bijectif.
(3) L'endomorphisme D de $\mathbb{R}[X]$ défini par $D(P) = P'$ (le polynôme dérivé) est surjectif, puisque pour tout $j \in \mathbb{N}$, $X^j = D\left(\frac{1}{j+1} X^{j+1}\right)$. Mais il n'est pas injectif puisque $D(1) = D(0)$.

Exercice 1. **Première méthode.** On pose $Y = X - 1$, donc $F(X) = G(Y) = \dfrac{1}{Y^4(3+Y)}$; en effectuant la division de 1 par $3 + Y$ selon les puissances croissantes (ou en utilisant $\frac{1-T^4}{1-T} = 1 + T + T^2 + T^3$ avec $T = -Y/3$) on voit que

$$1 = (3+Y)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}Y + \frac{1}{27}Y^2 - \frac{1}{81}Y^3\right) + \frac{1}{81}Y^4$$

d'où, en divisant par $Y^4(3+Y)$ et en repassant à $Y = X - 1$:

$$F(X) = \frac{1}{3}\frac{1}{(X-1)^4} - \frac{1}{9}\frac{1}{(X-1)^3} + \frac{1}{27}\frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{81}\frac{1}{X-1} + \frac{1}{81}\frac{1}{X+2}.$$

Seconde méthode. On aura

$$F(X) = \frac{a}{(X-1)^4} + \frac{b}{(X-1)^3} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{d}{X-1} + \frac{e}{X+2}$$

où

$$a = (X-1)^4 F(X)\Big|_{X=1} = \frac{1}{X+2}\Big|_{X=1} = \frac{1}{3}$$

$$b = \frac{d}{dX}\left(\frac{1}{X+2}\right)\Big|_{X=1} = -\frac{1}{(X+2)^2}\Big|_{X=1} = -\frac{1}{9}$$

$$c = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dX^2}\left(\frac{1}{X+2}\right)\Big|_{X=1} = \frac{1}{2!}\frac{d}{dX}\left(-\frac{1}{(X+2)^2}\right)\Big|_{X=1} = \frac{1}{(X+2)^3}\Big|_{X=1} = \frac{1}{27}$$

$$d = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dX^3}\left(\frac{1}{X+2}\right)\Big|_{X=1} = \frac{1}{3}\frac{d}{dX}\left(\frac{1}{(X+2)^3}\right)\Big|_{X=1} = -\frac{1}{(X+2)^4}\Big|_{X=1} = -\frac{1}{81}$$

$$e = (X+2)F(X)\Big|_{X=-2} = \frac{1}{(X-1)^4}\Big|_{X=-2} = \frac{1}{81}$$

et on retrouve bien le même résultat.

Exercice 2. Si $V = \{0\}$ on prend $W = E$. Sinon, soit $(e_1, ..., e_m)$ une base de V. Par le théorème de la base incomplète, il existe $e_{m+1}, ..., e_n$ tels que $(e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_n)$ soit une base de E. Posons $W = \operatorname{Vect}\{e_{m+1}, ..., e_n\}$: on a donc $V + W = E$. Il reste à vérifier que $V \cap W = \{0\}$. Soit $x \in V \cap W$. On peut donc écrire

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m = \lambda_{m+1} e_{m+1} + \cdots + \lambda_n e_n$$

d'où par différence $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m - \lambda_{m+1} e_{m+1} - \cdots - \lambda_n e_n = 0$ ce qui entraîne que tous les λ_i sont nuls (puisque $(e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_n)$ est libre) et donc $x = 0$.

Exercice 3. **(1)** Supposons que $\lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_4 = 0$, i.e. $\lambda X(X^2-1) + \mu X(X-1)(X-2) + \nu(X^2+1) = 0$. En prenant $X = 0$ on voit que $\nu = 0$. Il reste $\lambda X(X^2-1) + \mu X(X-1)(X-2) = 0$, qui en simplifiant par $X(X-1)$ donne $\lambda(X+1) + \mu(X-2) = 0$, d'où $\lambda = 0$ (prendre $X = 2$) et $\mu = 0$ (prendre $X = -1$). Conclusion : (P_1, P_2, P_4) est libre.

(2) Vu la question précédente, il s'agit de montrer que P_3 est une combinaison linéaire de P_1, P_2, P_4. Or, $P_3 = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_4$ équivaut à $X^2(X-1) = \alpha X(X^2-1) + \beta X(X-1)(X-2) + \gamma(X^2+1)$. En prenant $X = 0$ on voit que $\gamma = 0$. Il reste alors $X^2(X-1) = \alpha X(X^2-1) + \beta X(X-1)(X-2)$, qui en simplifiant par $X(X-1)$ donne $X = \alpha(X+1) + \beta(X-2)$; cela équivaut à $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha - 2\beta = 0$, donc à $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$. Conclusion : $P_3 = \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2$, la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est liée.

(3) Ce qui précède montre que $V = \text{Vect}\{P_1, P_2, P_4\}$ avec (P_1, P_2, P_4) libre, donc $\dim V = 3$.

(4) Écrivons que $aX^3 + bX^2 + cX + d \in V$:

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_4 = \alpha X(X^2-1) + \beta X(X-1)(X-2) + \gamma(X^2+1).$$

Si on fait $X = 0$ on voit que $\gamma = d$. Si on fait $X = 1$ on voit que $a + b + c + d = 2\gamma$. Donc $a + b + c + d = 2d$, autrement dit $a + b + c - d = 0$: c'est une condition nécessaire. Elle signifie que V est inclus dans le s.e.v. de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $a + b + c - d = 0$, qui est de dimension 3 (c'est un hyperplan), la même que V, donc les deux s.e.v. coïncident et la condition $a + b + c - d = 0$ est nécessaire et suffisante pour que $aX^3 + bX^2 + cX + d \in V$.

Exercice 4. **(1)** Montrons que (u_1, u_2, u_3) est libre (ce sera donc une base de V) :

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = (a + 2b, 2a + 2b + 2c, 3a + 2b + 4c, 4a + 6b + 4c)$$

donc $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} a + 2b = 0 & (1) \\ 2a + 2b + 2c = 0 & (2) \\ 3a + 2b + 4c = 0 & (3) \\ 4a + 6b + 4c = 0 & (4) \end{cases}$$

$(4) - 2 \times (2) \Rightarrow b = 0$, puis $(1) \Rightarrow a = 0$, puis $(2) \Rightarrow c = 0$: cqfd.

De même, montrons que (u_4, u_5) est libre (ce sera donc une base de W) :

$$du_4 + eu_5 = (d + 2e, 3e, -d, 2d + e)$$

donc $du_4 + eu_5 = 0$ implique $e = d = 0$ (regarder les deuxième et troisième composantes), cqfd.

(2) Vu la question précédente, $(x, y, z, t) = au_1 + bu_2 + cu_3$ équivaut à

$$\begin{cases} a + 2b = x \\ 2a + 2b + 2c = y \\ 3a + 2b + 4c = z \\ 4a + 6b + 4c = t \end{cases}$$

et on constate que $x + z = 2y$: cette condition est donc nécessaire pour que $(x, y, z, t) \in V$. Elle définit un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3 (un hyperplan) contenant V, qui est aussi de dimension 3 (question précédente), donc elle définit V.

(3) De même, $(x, y, z, t) = du_4 + eu_5$ équivaut à $(x, y, z, t) = (d + 2e, 3e, -d, 2d + e)$, et on constate par exemple que $x + z = \frac{2}{3}y$ et $t + 2z = \frac{1}{3}y$: ces deux conditions sont nécessaires. Elles sont aussi suffisantes (prises ensemble) car elles impliquent que

$$(x, y, z, t) = \left(\frac{2}{3}y - z, y, z, \frac{1}{3}y - 2z\right) = \frac{1}{3}yu_5 - zu_4.$$

(4) $(x, y, z, t) \in V \cap W$ si et seulement si $x + z = 2y$, $x + z = \frac{2}{3}y$ et $t + 2z = \frac{1}{3}y$. Les deux premières conditions impliquent que $y = 0$, et les trois conditions deviennent : $y = 0$, $x + z = 0$ et $t + 2z = 0$, c'est-à-dire : $x = -z$, $y = 0$, $t = -2z$ (z quelconque).

(5) Les conditions ci-dessus équivalent à $(x, y, z, t) = (-z, 0, z, -2z) = -zu_4$, avec z quelconque. Donc $V \cap W = \mathbb{R}u_4$, ce qui montre que le vecteur u_4 constitue une base de $V \cap W$ (et $\dim V \cap W = 1$). Par la formule

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

on en déduit que $\dim(V + W) = 4$, et comme on est dans $\mathbb{R}^4$ on a donc $V + W = \mathbb{R}^4$. Pour avoir une base de $V + W$, on peut prendre $\{u_1, u_2, u_3, u_5\}$ (on a enlevé u_4, qui est une combinaison linéaire des trois premiers puisqu'il est dans $V \cap W$), ou prendre tout simplement la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5. **(1)** $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}\{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)\} = \operatorname{Vect}\{-2e_1 - 3e_2 - 3e_3, -4e_1 - 3e_2 - 4e_3, 6e_1 + 6e_2 + 7e_3\} = \operatorname{Vect}\{-2e_1 - 3e_2 - 3e_3, -4e_1 - 3e_2 - 4e_3, 0\}$ (en ajoutant au troisième vecteur la somme des deux premiers) $= \operatorname{Vect}\{-2e_1 - 3e_2 - 3e_3, -2e_1 - e_3\}$ (en retranchant le premier au second) $= \operatorname{Vect}\{-3e_2 - 2e_3, -2e_1 - e_3\}$ (en retranchant le second au premier) $= \operatorname{Vect}\{3e_2 + 2e_3, 2e_1 + e_3\}$ (en changeant les signes). Il est clair que $3e_2 + 2e_3$ et $2e_1 + e_3$ sont linéairement indépendants, donc $(3e_2 + 2e_3, 2e_1 + e_3)$ est une base de $\operatorname{Im}\varphi$ (et donc le rang de φ est 2).

(2) Avec la question précédente, le théorème du rang donne $\dim\operatorname{Ker}\varphi = 1$. Pour avoir une base de $\operatorname{Ker}\varphi$ il suffit donc d'en trouver un vecteur non nul. Or, on a déjà observé que $\varphi(e_1) + \varphi(e_2) + \varphi(e_3) = 0$, donc $e_1 + e_2 + e_3$ est dans $\operatorname{Ker}\varphi$ et il en constitue une base.

(3) Il suffit de le vérifier sur e_1, e_2, e_3. Or, $\varphi(e_1) = e_1 - 3(e_1 + e_2 + e_3)$, $\varphi(e_2) = e_2 - 4(e_1 + e_2 + e_3)$, $\varphi(e_3) = e_3 + 6(e_1 + e_2 + e_3)$ et $\varphi(e_1 + e_2 + e_3) = 0$, donc $\varphi \circ \varphi(e_1) = \varphi(e_1)$, $\varphi \circ \varphi(e_2) = \varphi(e_2)$, $\varphi \circ \varphi(e_3) = \varphi(e_3)$: cqfd.

On en déduit que φ est la projection sur $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}\{3e_2 + 2e_3, 2e_1 + e_3\}$ parallèlement à $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R} \cdot (e_1 + e_2 + e_3)$.

Exercice 6. **(1)** $x \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f^2(x) = 0$ (car $f(0) = 0$, puisque f est linéaire) $\Rightarrow x \in \operatorname{Ker} f^2$. Donc $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.

(2) L'énoncé dit que f est de rang 2, donc $\dim\operatorname{Ker} f = 1$ (théorème du rang). La question précédente implique $\dim\operatorname{Ker} f \leq \dim\operatorname{Ker} f^2$, donc $\dim\operatorname{Ker} f^2 \in \{1, 2, 3\}$. Mais $\dim\operatorname{Ker} f^2 \neq 1$ car l'inclusion $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ est stricte (l'énoncé dit que $\operatorname{Ker} f \neq \operatorname{Ker} f^2$) ; et $\dim\operatorname{Ker} f^2 \neq 3$ car l'énoncé dit aussi que $f^2 \neq 0$; il ne reste donc que $\dim\operatorname{Ker} f^2 = 2$.

(3) Si $av + bf(v) = 0$, en appliquant f on trouve $af(v) = 0$ (car $v \in \operatorname{Ker} f^2$), avec $f(v) \neq 0$ (car $v \notin \operatorname{Ker} f$), donc $a = 0$; et donc (en reportant dans $av + bf(v) = 0$, vu encore que $f(v) \neq 0$) : $b = 0$. Cela montre que la famille $(v, f(v))$ est libre.

Le sous-espace $\operatorname{Vect}(v, f(v))$ est donc de dimension 2, comme $\operatorname{Ker} f^2$; et il est inclus dans $\operatorname{Ker} f^2$ (car $v \in \operatorname{Ker} f^2 \Rightarrow f(v) \in \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$) ; donc $\operatorname{Vect}(v, f(v)) = \operatorname{Ker} f^2$.

FIN