Corrigé de l'épreuve d'Algèbre du 11 juin 2013

Exercice 1.
(1) En posant les divisions, on trouve :

$$\begin{aligned} A(X) &= B(X)\,(X^2+1) + X^2 - X - 1, \\ B(X) &= (X^2-X-1)(X^2-X+1) - X + 2, \\ X^2 - X - 1 &= -(X+1)(-X+2) + 1, \end{aligned}$$

d'où $D(X) = 1$.
(2) En remontant les calculs ci-dessus, on en déduit :

$$\begin{aligned} 1 &= (X^2-X-1) + (X+1)(-X+2) \\ &= (X^2-X-1) + (X+1)[-(X^2-X-1)(X^2-X+1) + B(X)] \\ &= (X^2-X-1)(-X^3) + (X+1)B(X) \\ &= [A(X) - B(X)(X^2+1)](-X^3) + (X+1)B(X) \\ &= -X^3 A(X) + (X^5+X^3+X+1)B(X) \end{aligned}$$

d'où une solution $U_0(X) = -X^3$, $V_0(X) = X^5 + X^3 + X + 1$, et la solution générale est donnée par

$$\begin{aligned} U(X) &= -X^3 + S(X)B(X), \\ V(X) &= X^5 + X^3 + X + 1 - S(X)A(X), \end{aligned}$$

où $S(X)$ est un polynôme arbitraire de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2.
(1) Le degré de la fraction est < 0 : pas de partie entière. La décomposition est de la forme :

$$F(X) = \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{(X+1)} + \frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

avec

$$a = (X+1)^2 F(X)\Big|_{X\to -1} = \frac{X}{X^2+X+1}\Big|_{X\to -1} = -1,$$

$$b = [(X+1)^2F(X)]'\Big|_{X\to -1} = \left[\frac{X}{X^2+X+1}\right]'\Big|_{X\to -1} = \frac{X^2+X+1-X(2X+1)}{(X^2+X+1)^2}\Big|_{X\to -1} = 0,$$

$$cj + d = [(X^2+X+1)F(X)]\Big|_{X\to j} = \frac{X}{(X+1)^2}\Big|_{X\to j} = \frac{j}{(j+1)^2} = 1$$

(car $(j+1)^2 = j^2+2j+1 = j$) donc $c=0$, $d=1$. Conclusion :

$$F(X) = -\frac{1}{(X+1)^2} + \frac{1}{X^2+X+1}.$$

(2) Dans $\mathbb{C}(X)$, la décomposition sera de la forme

$$F(X) = -\frac{1}{(X+1)^2} + \frac{\lambda}{X-j} + \frac{\overline{\lambda}}{X-\overline{j}}$$

avec

$$\lambda = (X-j)\frac{1}{X^2+X+1}\Big|_{X\to j} = \frac{1}{X-\overline{j}}\Big|_{X\to j} = \frac{1}{j-\overline{j}} = \frac{1}{i\sqrt{3}} = -\frac{i\sqrt{3}}{3}.$$

Conclusion :

$$F(X) = -\frac{1}{(X+1)^2} - \frac{i\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{X-j} - \frac{1}{X-\overline{j}}\right).$$

Exercice 3.

I. Le système s'écrit :

$$\begin{cases} x + y + tz = a & (1) \\ 2x + y + (3t-1)z = b & (2) \\ -x + 3y + (1-3t)z = c & (3) \end{cases}$$

En faisant $(2)' = (2) - 2\times(1)$, $(3)' = (3) + (1)$ on obtient

$$\begin{cases} x + y + tz = a & (1) \\ \quad -y + (t-1)z = b-2a & (2)' \\ \quad 4y + (1-2t)z = c+a & (3)' \end{cases}$$

et en faisant $(3)'' = (3)' + 4\times(2)'$ on aboutit à

$$\begin{cases} x + y + tz = a & (1) \\ \quad -y + (t-1)z = b-2a & (2)' \\ \quad (2t-3)z = c+4b-7a & (3)'' \end{cases}$$

• Si $t \neq 3/2$, la dernière équation donne z, puis la deuxième donne y et la première donne x : on trouve donc l'unique solution

$$(*) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{4(1-3t)a-(1-6t)b-(1-2t)c}{3-2t} \\ y = \dfrac{(3t-1)a+(1-2t)b+(1-t)c}{3-2t} \\ z = \dfrac{7a-4b-c}{3-2t} \end{cases}$$

et $S_{a,b,c,t}$ est le singleton formé de cet unique triplet (x, y, z).
• Si $t = 3/2$, la dernière équation donne $0 = c + 4b - 7a$. Si cette condition n'est pas satisfaite, il n'y a pas de solution : $S_{a,b,c,3/2} = \varnothing$. Si elle est satisfaite, on peut prendre z arbitraire, et alors $(2)'$ donne y, puis (1) donne x : les solutions sont donc les (x, y, z) tels que

$$(**) \qquad x = -a + b - 2z, \qquad y = 2a - b + \frac{1}{2}z, \qquad z \text{ quelconque.}$$

On conclut que pour $t = \frac{3}{2}$ l'ensemble des solutions est la droite affine

$$S_{a,b,c,3/2} = (-a + b, 2a - b, 0) + \mathbb{R} \cdot (-2, \frac{1}{2}, 1) \qquad \text{si } c + 4b - 7a = 0$$

et l'ensemble vide sinon.

II.(1) f_t est bijective ssi l'équation $f_t(x, y, z) = (a, b, c)$ a une solution (unique) quel que soit (a, b, c). Cette équation équivaut au système ci-dessus : la discussion du I. montre donc que f_t est bijective ssi $t \neq 3/2$.

II.(2) • (a, b, c) est dans $\operatorname{Im} f_{3/2}$ si et seulement si l'équation $\operatorname{Im} f_{3/2}(x, y, z) = (a, b, c)$ a une solution : vu le I., $\operatorname{Im} f_{3/2}$ est donc le plan vectoriel d'équation $7a - 4b - c = 0$. On en forme une base en y prenant deux vecteurs (a, b, c) linéairement indépendants, par exemple $u = (1, 0, 7)$ et $v = (0, 1, -4)$ (qui sont respectivement $f_{3/2}(-1, 2, 0)$ et $f_{3/2}(1, -1, 0)$, d'après $(**)$). Ou bien $u' = f_{3/2}(1, 0, 0) = (1, 2, -1)$ et $v' = f_{3/2}(0, 1, 0) = (1, 1, 3)$ (puisqu'ils ne sont visiblement pas colinéaires).

• (x, y, z) est dans $\operatorname{Ker} f_{3/2}$ ssi c'est une solution du système du I. avec $(a, b, c) = 0$, i.e. $\operatorname{Ker} f_{3/2} = S_{(0,0,0,3/2)}$: vu le I., c'est la droite vectorielle engendrée par $w = (-2, \frac{1}{2}, 1)$.

• Le théorème du rang dit que pour toute application linéaire f d'un espace vectoriel E de dimension finie dans un espace vectoriel F quelconque, $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$. Ici, $E = F = \mathbb{R}^3$, $\dim \operatorname{Ker} f_{3/2} = 1$, $\dim \operatorname{Im} f_{3/2} = 2$: c'est bien cohérent avec le théorème du rang.

II.(3) On a $f_0(x, y, z) = x(1, 2, -1) + y(1, 1, 3) + z(0, -1, 1)$, d'où

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après le I, A_0 est inversible ; les formules $(*)$ donnent

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 7/3 & -4/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

et, en effet, on peut vérifier que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 7/3 & -4/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.

I.(1) $\Delta 1 = 0$, $\Delta X = X - (X-1) = 1$, $\Delta X^2 = X^2 - (X-1)^2 = 2X - 1$, $\Delta X^3 = X^3 - (X-1)^3 = 3X^2 - 3X + 1$, d'où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I.(2) $\operatorname{Im}\Delta$ est engendrée par $\Delta X = 1$, $\Delta X^2 = 2X-1$, $\Delta X^3 = 3X^2 - 3X + 1$, qui sont tous de degrés différents donc ils forment une partie libre et donc une base de $\operatorname{Im}\Delta$. On remarque que c'est une base de l'espace $\mathbb{R}_2[X]$ formé des polynômes réels de degré ≤ 2, donc $\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}_2[X]$. On peut aussi en prendre la base canonique $(1, X, X^2)$.

Puisque $\dim \operatorname{Im}\Delta = 3$, on aura par le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker}\Delta = 1$. Et comme $\Delta 1 = 0$, on voit que $\operatorname{Ker}\Delta$ est engendré par le polynôme constant 1 (donc $\operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X]$).

I.(3) $\operatorname{Ker}\Delta \cap \operatorname{Im}\Delta \neq \{0\}$ (il contient 1), donc $\operatorname{Im}\Delta$ et $\operatorname{Ker}\Delta$ ne sont pas supplémentaires. (Remarque : $\operatorname{Ker}\Delta \subset \operatorname{Im}\Delta$, donc $\operatorname{Ker}\Delta + \operatorname{Im}\Delta = \operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}_2[X]$.)

II.(1) Les polynômes Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 sont tous de degrés différents, donc forment une partie libre de $\mathbb{R}_3[X]$. Comme $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$, ils en forment une base.

II.(2) $\Delta Q_0 = \Delta 1 = 0$; $\Delta Q_1 = \Delta X = 1 = Q_0$; $\Delta Q_2 = \frac{1}{2}[X(X+1) - (X-1)X] = X = Q_1$; $\Delta Q_3 = \frac{1}{6}[X(X+1)(X+2) - (X-1)X(X+1)] = \frac{1}{6}X(X+1)[(X+2) - (X-1)] = \frac{1}{2}X(X+1) = Q_2$. D'où

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II.(3) On voit que $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$, $Q_2 = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2$, $Q_3 = \frac{1}{3}X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3$, donc la matrice de passage de B à B' est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Inversement, on a $1 = Q_0$, $X = Q_1$, $X^2 = -Q_1 + 2Q_2$, $X^3 = Q_1 - 6Q_2 + 6Q_3$ (vérifications immédiates), donc la matrice de passage de B' à B est

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

On calcule que

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La formule de changement de base $A' = P^{-1}AP$ donne donc

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est bien le résultat obtenu précédemment.

II.(4) La matrice de Δ^k dans la base B' est A'^k. On calcule que

$$A'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A'^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A'^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II.(5) $T = a_0Q_0 + a_1Q_1 + a_2Q_2 + a_3Q_3$. On voit d'abord que $a_0 = T(0)$ car $Q_0 = 1$ et $Q_1(0) = Q_2(0) = Q_3(0) = 0$. Ensuite, appliquant Δ (et vu que $\Delta Q_0 = 0$, $\Delta Q_1 = Q_0$, $\Delta Q_2 = Q_1$, $\Delta Q_3 = Q_2$), on a $\Delta T = a_1Q_0 + a_2Q_1 + a_3Q_2$, d'où $a_1 = \Delta T(0)$. De même, $\Delta^2 T = a_2Q_0 + a_3Q_1$ donc $a_2 = \Delta^2 T(0)$, et $\Delta^3 T = a_3Q_0$ donc $a_3 = \Delta^3 T(0)$.

II.(6) Cherchons T sous la forme générale $T = a_0Q_0 + a_1Q_1 + a_2Q_2 + a_3Q_3$. La condition $T(0) = 0$ équivaut à $a_0 = 0$. Par ailleurs, $\Delta T = a_1\Delta Q_1 + a_2\Delta Q_2 + a_3\Delta Q_3 = a_1Q_0 + a_2Q_1 + a_3Q_2$, qui (par la question précédente) est égal à F si et seulement si $a_1 = F(0)$, $a_2 = \Delta F(0)$, $a_3 = \Delta^2 F(0)$. Il existe donc un unique $T \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $T(0) = 0$ et $F = \Delta T$: c'est $T = F(0)Q_1 + \Delta F(0)Q_2 + \Delta^2 F(0)Q_3$.

La somme

$$\begin{aligned} F(1) + F(2) + \cdots + F(n) &= \Delta T(1) + \Delta T(2) + \cdots + \Delta T(n) \\ &= T(1) - T(0) + T(2) - T(1) + \cdots + T(n) - T(n-1) \end{aligned}$$

est "télescopique" et se réduit à $T(n) - T(0) = T(n)$, donc elle est égale à

$$F(0)Q_1(n) + \Delta F(0)Q_2(n) + \Delta^2 F(0)Q_3(n) = F(0)n + \Delta F(0)\frac{n(n+1)}{2} + \Delta^2 F(0)\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Application : prenant $F(X) = X^2$, on a $F(0) = 0$, $\Delta F(X) = 2X - 1$ donc $\Delta F(0) = -1$, et $\Delta^2 F(X) = 2$, donc :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = -\frac{n(n+1)}{2} + 2\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

III.(1) On a évidemment $0\circ\Delta=\Delta\circ 0$. Et si $u\circ\Delta=\Delta\circ u$ et $v\circ\Delta=\Delta\circ v$ (où $u,v\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$), alors, par linéarité de Δ, on a $(u+v)\circ\Delta=\Delta\circ(u+v)$ et $(\lambda u)\circ\Delta=\Delta\circ(\lambda u)$ pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$. Donc $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$. (On peut aussi remarquer que l'application $\mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])\to\mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$, $u\mapsto u\circ\Delta-\Delta\circ u$ est linéaire et que $\mathcal{C}$ est son noyau.)

III.(2) Il est clair que $\mathrm{Id},\Delta,\Delta^2,\Delta^3$ sont dans $\mathcal{C}$. Si $a\,\mathrm{Id}+b\Delta+c\Delta^2+d\Delta^3=0$, alors $aQ_3+b\Delta Q_3+c\Delta^2Q_3+d\Delta^3Q_3=0$, c'est-à-dire $aQ_3+bQ_2+cQ_1+dQ_0=0$, et donc $a=b=c=d=0$ puisque $\{Q_0,Q_1,Q_2,Q_3\}$ est une partie libre de $\mathbb{R}_3[X]$. Cela montre que $\{\mathrm{Id},\Delta,\Delta^2,\Delta^3\}$ est une partie libre de $\mathcal{C}$.

III.(3) Évidemment, si $u=v$, alors, $u(Q_3)=v(Q_3)$. Réciproquement, si $u(Q_3)=v(Q_3)$, alors $\Delta(u(Q_3))=\Delta(v(Q_3))$, d'où $u(\Delta Q_3)=v(\Delta Q_3)$ (puisque, par hypothèse, u et v commutent avec Δ), c'est-à-dire $u(Q_2)=v(Q_2)$. Appliquant encore Δ on obtient de même $u(Q_1)=v(Q_1)$, puis (encore de même) $u(Q_0)=v(Q_0)$: donc $u=v$ (puisqu'ils coïncident sur une base).

III.(4) On a vu que $\{\mathrm{Id},\Delta,\Delta^2,\Delta^3\}$ est libre, il reste à justifier qu'elle engendre $\mathcal{C}$. Soit $u\in\mathcal{C}$. Écrivons le polynôme $u(Q_3)$ dans la base B' (de $\mathbb{R}_3[X]$) :

$$\begin{aligned}u(Q_3)&=a_0Q_0+a_1Q_1+a_2Q_2+a_3Q_3\\&=a_0\Delta^3Q_3+a_1\Delta^2Q_3+a_2\Delta Q_3+a_3Q_3\end{aligned}$$

et le résultat de la question précédente montre que $u=a_0\Delta^3+a_1\Delta^2+a_2\Delta+a_3\,\mathrm{Id}$: cqfd.

III.(5) • Pour tout $T\in\mathbb{R}_3[X]$,

$$(D\circ\Delta)(T(X))=D(T(X)-T(X-1))=T'(X)-T'(X-1)=\Delta T'(X)=(\Delta\circ D)(T(X))$$

donc $D\circ\Delta=\Delta\circ D$, ce qui signifie que $D\in\mathcal{C}$.

• On a

$$\begin{aligned}DQ_3(X)=Q_3'(X)&=\frac{1}{6}[(X+1)(X+2)+X(X+2)+X(X+1)]\\&=\frac{1}{6}[3X(X+1)+3X+2]\\&=Q_2+\frac{1}{2}Q_1+\frac{1}{3}Q_0\\&=\Delta Q_3+\frac{1}{2}\Delta^2Q_3+\frac{1}{3}\Delta^3Q_3\end{aligned}$$

d'où $D=\Delta+\frac{1}{2}\Delta^2+\frac{1}{3}\Delta^3$ (par III.(3), puisque les deux membres sont dans $\mathcal{C}$ et coïncident sur Q_3).

FIN.