Corrigé de l'épreuve d'Algèbre du 12 juin 2014

Exercice 1.

(1) En posant les divisions, on trouve :

$$\begin{aligned}A(X) &= B(X)\,(X+3) + X^3 + 1,\\ B(X) &= (X^3+1)(X+2) + X^2 - X + 1,\\ X^3+1 &= (X^2-X+1)(X+1)\end{aligned}$$

(la dernière est d'ailleurs une identité connue). On en déduit que $D(X) = X^2 - X + 1$.

(2) En faisant les divisions de $A(X)$ et de $B(X)$ par $D(X)$ (ou en utilisant les divisions ci-dessus) on trouve :

$$A(X)/D(X) = X^3 + 6X^2 + 13X + 10, \qquad B(X)/D(X) = X^2 + 3X + 3.$$

(3) Les divisions de la première question donnent

$$\begin{aligned}D(X) &= B(X) - (X^3+1)(X+2)\\ &= B(X) - [A(X) - B(X)(X+3)](X+2)\\ &= -(X+2)A(X) + [1 + (X+3)(X+2)]B(X)\\ &= -(X+2)A(X) + (X^2+5X+7)B(X)\end{aligned}$$

d'où une solution $U_0(X) = -(X+2)$, $V_0(X) = X^2 + 5X + 7$, et la solution générale est donnée par

$$\begin{aligned}U(X) &= U_0(X) + S(X)B(X)/D(X) = -(X+2) + S(X)(X^2+3X+3),\\ V(X) &= V_0(X) - S(X)A(X)/D(X) = X^2 + 5X + 7 - S(X)(X^3+6X^2+13X+10),\end{aligned}$$

où $S(X)$ est un polynôme arbitraire de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2.

(1) Le degré de la fraction est < 0 : pas de partie entière. La décomposition est de la forme :

$$F(X) = \frac{a}{X+3} + \frac{b}{(X+2)^2} + \frac{c}{X+2} + \frac{dX+e}{X^2+1}$$

où

$$a = (X+3)F(X)\Big|_{X\to-3} = \frac{50}{(X+2)^2(X^2+1)}\Big|_{X\to-3} = \frac{50}{10} = 5,$$

$$b = (X+2)^2F(X)\Big|_{X\to-2} = \frac{50}{(X+3)(X^2+1)}\Big|_{X\to-2} = \frac{50}{5} = 10,$$

$$c = \left(\frac{50}{(X+3)(X^2+1)} \right)' \Bigg|_{X \to -2} = -50 \, \frac{X^2+1+2X(X+3)}{(X+3)^2(X^2+1)^2} \Bigg|_{X \to -2} = -50 \, \frac{1}{25} = -2,$$

et enfin

$$di + e = [(X^2+1)F(X)] \Big|_{X \to i} = \frac{50}{(i+2)^2(i+3)} = \frac{50}{5+15i} = \frac{10}{1+3i} = \frac{10(1-3i)}{1^2+3^2} = 1 - 3i$$

et donc

$$d = -3, \qquad e = 1.$$

Conclusion :

$$F(X) = \frac{5}{X+3} + \frac{10}{(X+2)^2} - \frac{2}{X+2} + \frac{-3X+1}{X^2+1}.$$

(2) Dans $\mathbb{C}(X)$,

$$\frac{-3X+1}{X^2+1} = \frac{\alpha}{X-i} + \frac{\overline{\alpha}}{X+i}$$

avec

$$\alpha = (X-i) \, \frac{-3X+1}{X^2+1} \Bigg|_{X \to i} = \frac{-3i+1}{2i} = -\frac{3+i}{2}$$

et donc

$$F(X) = \frac{5}{X+3} + \frac{10}{(X+2)^2} - \frac{2}{X+2} - \frac{3+i}{2} \, \frac{1}{X-i} - \frac{3-i}{2} \, \frac{1}{X+i}.$$

Exercice 3.

(1) (a) Les cinq racines cinquièmes de l'unité sont 1, $e^{2i\pi/5}$, $e^{-2i\pi/5}$, $e^{4i\pi/5}$, $e^{-4i\pi/5}$. Donc

$$P(X) = X^5 - 1 = (X-1)(X - e^{2i\pi/5})(X - e^{-2i\pi/5})(X - e^{4i\pi/5})(X - e^{-4i\pi/5}).$$

(b) Dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = (X-1)(X^2 - 2\alpha X + 1)(X^2 - 2\beta X + 1).$$

(2) On sait que $\frac{X^5-1}{X-1} = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ (somme des cinq premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison X).

(3) $Q(X) = \frac{P(X)}{X-1} = (X^2 - 2\alpha X + 1)(X^2 - 2\beta X + 1)$.

(4) En développant ce dernier produit on obtient :

$$Q(X) = X^4 - 2(\alpha+\beta)X^3 + 2(1 + 2\alpha\beta)X^2 - 2(\alpha+\beta)X + 1.$$

Et en égalant à $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, on trouve que $\alpha + \beta = -\frac{1}{2}$ et $\alpha\beta = -\frac{1}{4}$.

(5) On se rappelle que si on connaît la somme s et le produit p de deux nombres, ces deux nombres sont les racines de $X^2 - sX + p$. Ici, α et β sont donc les racines de $X^2 + \frac{1}{2} X - \frac{1}{4}$, c'est-à-dire

$-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}$ et $-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}$. Seule la première de ces racines est >0, comme doit l'être α (puisque $\alpha=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\frac{2\pi}{5}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$). Donc $\alpha=\frac{\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{4}$.

Exercice 4.
(1) $f(x,y,z)=(2x+y-z,-x+z,x+y)$.
(2) $\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}\{(2,-1,1),(1,0,1),(-1,1,0)\}=\operatorname{Vect}\{(1,0,1),(-1,1,0)\}$ car $(2,-1,1)=(1,0,1)-(-1,1,0)$. Les deux vecteurs restants ne sont pas colinéaires, donc $\{(1,0,1),(-1,1,0)\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
(3)

$$f(x,y,z)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ -x+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x \\ y=-x \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z)=(x,-x,x)=x(1,-1,1)$$

donc $\operatorname{Ker} f=\mathbb{R}\,(1,-1,1)$ et $\{(1,-1,1)\}$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.
(4)

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=A,$$

donc $f\circ f=f$, ce qui signifie que f est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$.
(5) Reprenons la base $\{(1,0,1),(-1,1,0)\}$ de $\operatorname{Im} f$ et la base $\{(1,-1,1)\}$ de $\operatorname{Ker} f$ trouvées ci-dessus. Posons $\varepsilon_1=(1,0,1)$, $\varepsilon_2=(-1,1,0)$, $\varepsilon_3=(1,-1,1)$. Puisque f est une projection,

$$\mathbb{R}^3=\operatorname{Im} f\oplus\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}\oplus\operatorname{Vect}\{\varepsilon_3\},$$

donc $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (on peut aussi le vérifier directement), et $f(\varepsilon_1)=\varepsilon_1$, $f(\varepsilon_2)=\varepsilon_2$, $f(\varepsilon_3)=0$: ce qui montre que dans la base $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$, la matrice A' de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On peut donc prendre pour P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$, c'est-à-dire $P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on a bien $P^{-1}AP=A'=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ avec $a=b=1$, $c=0$.

Exercice 5.
(1) La première colonne est nulle, les deux suivantes sont linéairement indépendantes (*deux* colonnes non colinéaires) : donc le rang de N est 2.
(2)

$$N^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $N^k = 0$ pour tout $k \geq 3$.

(3) $M_\lambda = \lambda I + N = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Puisque $\lambda \neq 0$, il est clair que les trois colonnes sont linéairement indépendantes, donc $M_\lambda \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

(4) La proposition est clairement vraie pour $k = 0$: $M_\lambda^0 = I$. Supposons-la vraie pour k et vérifions qu'elle l'est pour $k+1$: en multipliant

$$M_\lambda^k = \lambda^k I + k\lambda^{k-1} N + \frac{k(k-1)}{2} \lambda^{k-2} N^2.$$

par $M_\lambda = \lambda I + N$ et en développant, on trouve

$$\begin{aligned} M_\lambda^{k+1} &= \lambda^k(\lambda I + N) + k\lambda^{k-1} N(\lambda I + N) + \frac{k(k-1)}{2} \lambda^{k-2} N^2 (\lambda I + N) \\ &= \lambda^{k+1} I + (k+1)\lambda^k N + k\lambda^{k-1} N^2 + \frac{k(k-1)}{2} \lambda^{k-1} N^2 + \frac{k(k-1)}{2} \lambda^{k-2} N^3 \\ &= \lambda^{k+1} I + (k+1)\lambda^k N + \frac{(k+1)k}{2} \lambda^{k-1} N^2 \end{aligned}$$

puisque $k + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(k+1)k}{2}$ et $N^3 = 0$. L'hypothèse est donc établie.

Avec les matrices N et N^2 explicitée plus haut, on en déduit que

$$M_\lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & k\lambda^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

(5) On peut voir directement que

$$(I + \mu N)(I - \mu N + \mu^2 N^2) = I$$

en développant le premier membre et en tenant compte de $N^3 = 0$ (c'est une version matricielle de la formule $(1+x)(1-x+x^2) = 1 + x^3$) : d'où $\alpha = -\mu$ et $\beta = \mu^2$.
Si on n'a pas vu cela, on pouvait toujours dire que l'égalité

$$(I + \mu N)(I + \alpha N + \beta N^2) = I$$

s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu & \mu \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha + \beta \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha+\mu & \alpha+\beta+\mu\alpha+\mu \\ 0 & 1 & \alpha+\mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui se ramène aux deux conditions $\alpha + \mu = 0$ et $\alpha + \beta + \mu\alpha + \mu = 0$: la première donne $\alpha = -\mu$ et la seconde donne alors $\beta = -\mu\alpha = \mu^2$.

Prenant $\mu = \lambda^{-1}$, on a donc

$$\begin{aligned} I &= (I + \lambda^{-1}N)(I - \lambda^{-1}N + \lambda^{-2}N^2) \\ &= (I + \lambda^{-1}N)\lambda\lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}N + \lambda^{-2}N^2) \\ &= (\lambda I + N)(\lambda^{-1}I - \lambda^{-2}N + \lambda^{-3}N^2) \end{aligned}$$

ce qui montre que M_λ $(= \lambda I + N)$ a pour inverse

$$M_\lambda^{-1} = \lambda^{-1}I - \lambda^{-2}N + \lambda^{-3}N^2.$$

Explicitement :

$$M_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & -\lambda^{-2} + \lambda^{-3} \\ 0 & \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

Remarque : on constate que la formule

$$M_\lambda^k = \lambda^k I + k\lambda^{k-1}N + \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}N^2$$

qui n'a été prouvée plus haut que pour $k \geq 0$, est valable aussi pour $k = -1$.

(6) Le système se traduit par $X_{k+1} = M_\lambda X_k$, d'où l'on tire $X_k = M_\lambda^k X_0$ par une récurrence immédiate (c'est vrai pour $k = 0$ et c'est clairement héréditaire d'après $X_{k+1} = M_\lambda X_k$). Et donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & k\lambda^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^k u_0 + k\lambda^{k-1}v_0 + \left(k\lambda^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\right) w_0 \\ \lambda^k v_0 + k\lambda^{k-1}w_0 \\ \lambda^k w_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} u_k = \lambda^k u_0 + k\lambda^{k-1}v_0 + \left(k\lambda^{k-1} + \dfrac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\right) w_0 \\ v_k = \lambda^k v_0 + k\lambda^{k-1}w_0 \\ w_k = \lambda^k w_0. \end{cases}$$

Exercice 6.

(1) L'énoncé se traduit par le système : $\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 & (1) \\ 2x + 3y + z = 34 & (2) \\ x + 2y + 3z = 26 & (3) \end{cases}$

(2) En faisant $(1)' = -(1) + 3(3)$ et $(2)' = -(2) + 2(3)$, on obtient

$$\begin{cases} 4y + 8z = 39 & (1)' \\ y + 5z = 18 & (2)' \\ x + 2y + 3z = 26 & (3) \end{cases}$$

puis, en faisant $(1)'' = -(1)' + 4(2)'$:

$$\begin{cases} 12z = 33 & (1)'' \\ y + 5z = 18 & (2)' \\ x + 2y + 3z = 26 & (3) \end{cases}.$$

La première équation donne $z = \frac{33}{12} = \frac{11}{4}$, la deuxième donne alors $y = 18 - \frac{55}{4} = \frac{17}{4}$, et la troisième $x = 26 - \frac{34}{4} - \frac{33}{4} = \frac{37}{4}$. Conclusion :

$$x = \frac{37}{4}, \quad y = \frac{17}{4}, \quad z = \frac{11}{4}.$$

FIN.