CP200A, algèbre 1 : corrigé du DS Terminal du 14 juin 2017

Questions de cours.
(1) Théorème du rang. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie. Alors pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a : $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$.

Preuve. Soient $(u_i)_i$ une base de $\operatorname{Ker} f$ et $(f(v_j))_j$ une base de $\operatorname{Im} f$. Montrons que la famille formée des $(u_i)_i$ et des $(v_j)_j$ est une base de E. Elle est génératrice : car pour tout $x \in E$ on peut écrire $f(x) = \sum_j \lambda_j f(v_j)$ donc $x - \sum_j \lambda_j v_j \in \operatorname{Ker} f$ et donc $x = \sum_j \lambda_j v_j + \sum_i \mu_i u_i$. Elle est libre : car si $\sum_j \lambda_j v_j + \sum_i \mu_i u_i = 0$, en appliquant f on obtient $\sum_j \lambda_j f(v_j) = 0$, ce qui montre que les λ_j sont nuls (puisque $(f(v_j))_j$ est libre) ; il reste alors $\sum_i \mu_i u_i = 0$, ce qui montre que les μ_i aussi sont nuls (puisque $(u_i)_i$ est libre).

(2) $z^{2n} + 1 = 0 \Leftrightarrow z^{2n} = -1 = e^{(2k-1)i\pi} \Leftrightarrow z = e^{(2k-1)\frac{i\pi}{2n}}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Avec $k = 1, ..., n$ on obtient n racines distinctes sur le demi-cercle supérieur $(0 < \arg z < \pi)$, et les n autres racines en sont les conjuguées. D'où :

$$X^{2n} + 1 = \prod_{k=1}^{n} \left(X - e^{(2k-1)\frac{i\pi}{2n}}\right)\left(X - e^{-(2k-1)\frac{i\pi}{2n}}\right) \qquad \text{dans } \mathbb{C}[X]$$

$$X^{2n} + 1 = \prod_{k=1}^{n} \left(X^2 - 2\cos\left[(2k-1)\frac{\pi}{2n}\right] X + 1\right) \qquad \text{dans } \mathbb{R}[X].$$

(3) Il suffit de le montrer pour une matrice triangulaire inférieure (le cas d'une triangulaire supérieure s'en déduit immédiatement car c'est la transposée d'une triangulaire inférieure : elle a donc même déterminant et mêmes éléments diagonaux). On raisonne par récurrence : si $n = 1$ c'est trivial $(\det(a_{11}) = a_{11})$; et si c'est vrai pour les matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ alors c'est vrai aussi pour celles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car en développant selon la première ligne on a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Exercice 1.
(1) Les divisions donnent :

$$\begin{aligned} A(X) &= (X-2)B(X) + 6(X^3 - 3X^2 + X), \\ B(X) &= (X+2)(X^3 - 3X^2 + X) - (X^2 - 3X + 1), \\ X^3 - 3X^2 + X &= X(X^2 - 3X + 1) \end{aligned}$$

donc $D(X) = X^2 - 3X + 1$.

(2) En effectuant directement les divisions de $A(X)$ et $B(X)$ par $D(X)$ (ou en utilisant celles qui précèdent) on trouve :

$$A(X)/D(X) = X^3 + X + 2 \quad \text{et} \quad B(X)/D(X) = X^2 + 2X - 1.$$

(3) En remontant le flot des divisions :

$$\begin{aligned} D(X) &= -B(X) + (X+2)(X^3 - 3X^2 + X) \\ &= -B(X) + (X+2)\,\frac{1}{6}\left[A(X) - (X-2)B(X)\right] \\ &= \frac{1}{6}\,(X+2)A(X) - \frac{1}{6}\left[(X+2)(X-2) + 6\right]B(X) \\ &= \frac{1}{6}\,(X+2)A(X) - \frac{1}{6}\,(X^2+2)B(X) \end{aligned}$$

ce qui donne la solution particulière $U_0(X) = \frac{1}{6}\,(X+2)$, $V_0(X) = -\frac{1}{6}\,(X^2+2)$. La solution générale est :

$$\begin{aligned} U(X) &= U_0(X) + S(X)B(X)/D(X) = \frac{1}{6}\,(X+2) + S(X)(X^2 + 2X - 1), \\ V(X) &= V_0(X) - S(X)A(X)/D(X) = -\frac{1}{6}\,(X^2+2) - S(X)(X^3 + X + 2) \end{aligned}$$

où $S(X)$ est un polynôme arbitraire de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2.
(1) Soient $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \operatorname{tr}\left((\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{ii} + \mu b_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B)$. Donc tr est linéaire.

(2) Si on note U, V les matrices de u, v (dans une base donnée), la matrice de $u \circ v - v \circ u$ est $UV - VU$. Sa trace est $\operatorname{tr}(UV - VU) = \operatorname{tr}(UV) - \operatorname{tr}(VU) = 0$. La matrice de id est la matrice unité I_n, sa trace est n. Comme $n \geqslant 1$, $\operatorname{tr}(I_n) \neq \operatorname{tr}(UV - VU)$ donc $UV - VU \neq \mathrm{I}_n$ et donc $u \circ v - v \circ u \neq \mathrm{id}$.
(3) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $(u \circ v)(P)(X) = u\big(v(P)(X)\big) = \big(XP(X)\big)' = P(X) + XP'(X)$ et $(v \circ u)(P)(X) = v\big(u(P)(X)\big) = XP'(X)$, donc $(u \circ v - v \circ u)(P)(X) = P(X) = \mathrm{id}(P)(X)$ d'où $u \circ v - v \circ u = \mathrm{id}$. (Cela ne contredit pas le résultat de la question précédente puisque $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie.)

Exercice 3.
(1) $A - x\,\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 0,95 - x & 0,02 \\ 0,05 & 0,98 - x \end{pmatrix}$ donc

$$\det(A - x\,\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 0,95 - x & 0,02 \\ 0,05 & 0,98 - x \end{vmatrix} = (0,95 - x)(0,98 - x) - 0,05 \times 0,02 = x^2 - 1,93x + 0,93.$$

Les racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 0,93$. (Rappel : la somme des racines est l'opposé du coefficient de x, donc ici c'est 1,93 ; et le produit des racines est le terme constant, ici 0,93. D'où les racines, sans calcul.)
Quand $x \in \{r_1, r_2\}$ (et seulement dans ce cas) la matrice $A - x\,\mathrm{I}$ n'est pas inversible.
(2)

$$\begin{pmatrix} 0,95 & 0,02 \\ 0,05 & 0,98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,95x_1 + 0,02y_1 = x_1 \\ 0,05x_1 + 0,98y_1 = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow 0,05x_1 - 0,02y_1 = 0 \Leftrightarrow 5x_1 = 2y_1.$$

On peut prendre $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
(3)

$$\begin{pmatrix} 0,95 & 0,02 \\ 0,05 & 0,98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,93x_2 \\ 0,93y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,95x_2 + 0,02y_2 = 0,93x_2 \\ 0,05x_2 + 0,98y_2 = 0,93y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,02x_2 + 0,02y_2 = 0 \\ 0,05x_2 + 0,05y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y_2 = -x_2.$$

On peut prendre $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
(4) Il est clair que les *deux* vecteurs V_1, V_2 ne sont pas colinéaires, donc ils forment une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

(5) Vu le choix de V_1 et de V_2 : $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,93 \end{pmatrix}$ qui est une matrice diagonale, donc $A'^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0,93)^k \end{pmatrix}$.
(6) On a :

$$\begin{aligned} A^k = PA'^kP^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0,93)^k \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5(0,93)^k & -2(0,93)^k \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 + 5(0,93)^k & 2 - 2(0,93)^k \\ 5 - 5(0,93)^k & 5 + 2(0,93)^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$S_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 + 5(0,93)^k & 2 - 2(0,93)^k \\ 5 - 5(0,93)^k & 5 + 2(0,93)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,96 \\ 0,04 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 + 4,72(0,93)^k \\ 5 - 4,72(0,93)^k \end{pmatrix}$$

(7) (Répartition limite) Quand $k \to +\infty$ on obtient que $a_k \to a = 2/7$, $b_k \to b = 5/7$.

Exercice 4.
(1) *(i)* $\dfrac{1}{(X-2)^2(X+4)} = \dfrac{a}{X+4} + \dfrac{b}{(X-2)^2} + \dfrac{c}{X-2}$ avec

$$a = \left.\frac{1}{(X-2)^2}\right|_{X=-4} = \frac{1}{36}, \quad b = \left.\frac{1}{X+4}\right|_{X=2} = \frac{1}{6}, \quad c = \left.\left(\frac{1}{X+4}\right)'\right|_{X=2} = -\left.\frac{1}{(X+4)^2}\right|_{X=2} = -\frac{1}{36}.$$

(ii) En multipliant tout par $(X-2)^2(X+4)$:

$$1 = \frac{1}{36}(X-2)^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{36}(X-2)\right)(X+4)$$

donc on peut prendre $U_1(X) = \dfrac{1}{36}$ et $U_2(X) = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{36}(X-2) = -\dfrac{1}{36}(X-8)$.

(iii) $\Pi_1 = \dfrac{1}{36}(M - 2\,\mathrm{I})^2 = \dfrac{1}{36}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 6 & -5 & -1\\ 6 & -5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 6 & -5 & -1\\ 6 & -5 & -1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{36}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -36 & 36 & 0\\ -36 & 36 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$\Pi_2 = -\dfrac{1}{36}(M - 8\,\mathrm{I})(M + 4\,\mathrm{I}) = -\dfrac{1}{36}\begin{pmatrix}-6 & 1 & -1\\ 6 & -11 & -1\\ 6 & -5 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 1 & -1\\ 6 & 1 & -1\\ 6 & -5 & 5\end{pmatrix} = -\dfrac{1}{36}\begin{pmatrix}-36 & 0 & 0\\ -36 & 0 & 0\\ -36 & 36 & -36\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

$\Pi_1^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \Pi_1$

$\Pi_2^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \Pi_2$ ou $\Pi_2^2 = (\mathrm{I} - \Pi_1)^2 = \mathrm{I} - 2\Pi_1 + \Pi_1^2 = \mathrm{I} - \Pi_1 = \Pi_2$.

$\Pi_1\Pi_2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ou $\Pi_1\Pi_2 = \Pi_1(\mathrm{I} - \Pi_1) = \Pi_1 - \Pi_1^2 = 0$

De même $\Pi_2\Pi_1 = (\mathrm{I} - \Pi_1)\Pi_1 = \Pi_1 - \Pi_1^2 = 0$.

Π_1 et $\Pi_2 = \mathrm{I} - \Pi_1$ sont des matrices de projecteurs associés : l'un projette sur le noyau (la direction de projection) de l'autre.

(iv) Comme Π_1 et Π_2 commutent, on peut appliquer la formule du binôme, qui se réduit à $(\lambda\Pi_1 + \mu\Pi_2)^k = \lambda^k\Pi_1 + \mu^k\Pi_2$ puisque $\Pi_1^k = \Pi_1$, $\Pi_2^k = \Pi_2$ (récurrence immédiate) et que tous les autres termes (contenant le produit $\Pi_1\Pi_2$) sont nuls. On a donc $\lambda_k = \lambda^k$ et $\mu_k = \mu^k$.

(v) $T = -4\Pi_1 + 2\Pi_2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 4 & -4 & 0\\ 4 & -4 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 6 & -4 & 0\\ 6 & -6 & 2\end{pmatrix}$

$N = M - T = \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 6 & -3 & -1\\ 6 & -5 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 6 & -4 & 0\\ 6 & -6 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

On peut calculer TN et NT et constater leur égalité. On peut aussi remarquer que T est (comme Π_1 et Π_2) égal à un polynôme en M, donc N ($= M - T$) aussi, et donc ils commutent. On calcule que $N^2 = 0$. La formule du binôme donne alors : $M^k = (T + N)^k = T^k + kT^{k-1}N$ (les autres termes sont nuls car ils contiennent N^2).

(vi) On calcule que $\Pi_1 N = 0$, $\Pi_2 N = N$. Avec les deux questions précédentes, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
M^k &= (-4\Pi_1 + 2\Pi_2)^k + k(-4\Pi_1 + 2\Pi_2)^{k-1}N\\
&= (-4)^k\Pi_1 + 2^k\Pi_2 + k(-4)^{k-1}\Pi_1 N + k2^{k-1}\Pi_2 N\\
&= (-4)^k\Pi_1 + 2^k\Pi_2 + k2^{k-1}N\\
&= (-4)^k\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} + 2^k\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} + k2^{k-1}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2^k & k2^{k-1} & -k2^{k-1}\\ -(-4)^k + 2^k & (-4)^k + k2^{k-1} & -k2^{k-1}\\ -(-4)^k + 2^k & (-4)^k - 2^k + k2^{k-1} & 2^k - k2^{k-1}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On peut vérifier que la formule donne bien $M^0 = \mathrm{I}$ et $M^1 = M$.

(2) *(a)* On a $(1,0,0) = -u_1 + u_3$, $(0,1,0) = u_1 - u_2$, $(0,0,1) = u_2$, donc (u_1, u_2, u_3) engendre $\mathbb{R}^3$ et donc c'en est une base (famille génératrice à trois éléments dans un espace de dimension 3). Les coordonnées de u_1, u_2, u_3 dans la base canonique donnent les colonnes de P ; celles des vecteurs de la base canonique dans la base (u_1, u_2, u_3) donnent les colonnes de P^{-1} :

$$P = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(b) La formule de changement de base donne :

$$\begin{aligned}
M' = P^{-1}MP &= \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 6 & -3 & -1\\ 6 & -5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}4 & -4 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc : $D' = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule que $D'N' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $N'D'$ donne le même résultat : donc D' et N' commutent. On voit aussi que ${N'}^2 = 0$. La formule du binôme donne donc

$$\begin{aligned} {M'}^k &= (D' + N')^k = {D'}^k + k{D'}^{k-1}N' \\ &= \begin{pmatrix} (-4)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} (-4)^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-4)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{k-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & -k2^{k-1} & 2^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} M^k = P{M'}^kP^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-4)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & -k2^{k-1} & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -k2^{k-1} & 2^k \\ (-4)^k & -k2^{k-1} & 2^k \\ (-4)^k & 2^k - k2^{k-1} & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} & -k2^{k-1} \\ -(-4)^k + 2^k & (-4)^k + k2^{k-1} & -k2^{k-1} \\ -(-4)^k + 2^k & (-4)^k - 2^k + k2^{k-1} & 2^k - k2^{k-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat de la première méthode.

Exercice 5. *Méthode de la comatrice :* on calcule le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ (par la règle de Sarrus ou en développant selon une ligne ou une colonne) et la comatrice : $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -7 & -9 & 5 \\ 12 & 14 & -8 \end{pmatrix}$. D'où $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -7 & 12 \\ -1 & -9 & 14 \\ 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}$.

Et on peut vérifier qu'en effet $\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -7 & 12 \\ -1 & -9 & 14 \\ 1 & 5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode du pivot :

$$\begin{array}{cccccccl} 1 & 2 & 5 & | & 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 3 & -2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 2 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & L_3 \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{cccccccl} 1 & 2 & 5 & | & 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & -8 & -14 & | & -3 & 1 & 0 & L_2' = L_2 - 3L_1 \\ 0 & -5 & -9 & | & -2 & 0 & 1 & L_3' = L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\longleftrightarrow \begin{array}{cccccccl} 1 & 2 & 5 & | & 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & -8 & -14 & | & -3 & 1 & 0 & L_2' \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & 5/2 & -4 & L_3'' = (-8L_3' + 5L_2')/2 \end{array}$$

$$\longleftrightarrow \begin{array}{cccccccl} 1 & 2 & 0 & | & -3/2 & -25/2 & 20 & L_1' = L_1 - 5L_3'' \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 & -9/2 & 7 & L_2'' = -(L_2' + 14L_3'')/8 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & 5/2 & -4 & L_3'' \end{array}$$

$$\longleftrightarrow \begin{array}{cccccccl} 1 & 0 & 0 & | & -1/2 & -7/2 & 6 & L_1'' = L_1' - 2L_2'' \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 & -9/2 & 7 & L_2'' \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & 5/2 & -4 & L_3'' \end{array}$$

et on retrouve bien $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -7 & 12 \\ -1 & -9 & 14 \\ 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.

(1) • φ est linéaire : $\varphi(\lambda P + \mu Q) = \big(\lambda P(x_0) + \mu Q(x_0), ..., \lambda P(x_n) + \mu Q(x_n)\big) = \lambda\big(P(x_0), ..., P(x_n)\big) + \mu\big(Q(x_0), ..., Q(x_n)\big) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)$.

• φ est injective. Car $\varphi(P) = 0$ signifie que $x_0, ..., x_n$ sont racines de P : cela fait $n + 1$ racines distinctes ; or P est de degré $\leqslant n$, donc ce n'est possible que si $P = 0$.

• $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ sont de même dimension $n + 1$, donc l'injectivité de φ implique que *c'est un isomorphisme*.

• S existe par surjectivité de φ et est unique par injectivité de φ.

La matrice de φ s'obtient en mettant en colonnes les coordonnées des $\varphi(X^k)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

(C'est une matrice de Vandermonde mais on n'a pas besoin de le savoir ici.) Les conditions $S(x_i) = y_i$ $(i \in \{0, 1, ..., n\})$, c'est-à-dire $\varphi(S) = (y_0, y_1, ..., y_n)$, se traduisent matriciellement par

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

où $S(X) = c_0 + c_1 X + \cdots + c_n X^n$. Comme φ est un isomorphisme, sa matrice A est inversible et la solution (unique) est donnée par

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire (en explicitant A^{-1} au moyen du déterminant et de la comatrice) par les formules de Cramer.

(2) $L_k(x_i) = \displaystyle\prod_{j \in \{0,\dots,n\} \setminus \{k\}} \left(\frac{x_i - x_j}{x_k - x_j} \right)$. Si $i = k$, tous les facteurs valent 1 : donc $L_k(x_k) = 1$. Si $i \neq k$, il fait partie des $j \in \{0, ..., n\} \setminus \{k\}$ et le facteur $\dfrac{x_i - x_j}{x_k - x_j}$ correspondant est nul : donc $L_k(x_i) = 0$ $(i \neq k)$. On en déduit que $(L_0, L_1, ..., L_n)$ est libre : car si $\sum_{k=0}^n \lambda_k L_k = 0$, alors pour tout $i \in \{0, ..., n\}$ on a $\sum_{k=0}^n \lambda_k L_k(x_i) = 0$, c'est-à-dire $\lambda_i = 0$. Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$, $(L_0, L_1, ..., L_n)$ en est une base. On peut donc écrire $S = \sum_{k=0}^n \lambda_k L_k$: les λ_k sont donnés par $y_i = S(x_i) = \sum_{k=0}^n \lambda_k L_k(x_i) = \lambda_i$ $(i \in \{0, ..., n\})$; donc $S = \sum_{k=0}^n y_k L_k$.

Exercice 7.

$$V(a_1, ..., a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Si à chaque colonne C_j $(j \geqslant 2)$ on retranche $a_1 C_{j-1}$, le déterminant ne change pas, donc :

$$V(a_1, ..., a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

d'où en développant par rapport à la première ligne :

$$V(a_1, ..., a_n) = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}.$$

Comme le déterminant est linéaire par rapport à chaque ligne, les $(a_i - a_1)$ sortent :

$$\begin{aligned} V(a_1, ..., a_n) &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & \dots & a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1)\, V(a_2, ..., a_n). \end{aligned}$$

De même $V(a_2, ..., a_n) = (a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2)\, V(a_3, ..., a_n)$ donc

$$V(a_1, ..., a_n) = (a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2)\, V(a_3, ..., a_n)$$

et (récurrence)

$$V(a_1, ..., a_n) = (a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1})\, V(a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

(noter que $V(a_n) = 1$).

Exercice 8. Soit $(u_1, ..., u_p)$ une base de $F \cap G$ (vide si $F \cap G = \{0\}$, i.e. si $\dim(F \cap G) = p = 0$). On la complète en une base $(u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q)$ de F et en une base $(u_1, ..., u_p, w_1, ..., w_q)$ de G ($\dim F = \dim G$). On a alors une base $(u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q, w_1, ..., w_q)$ de $F+G$ (Grassmann), que l'on complète en une base $(u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q, w_1, ..., w_q, z_1, ..., z_r)$ de E. Le sous-espace

$$S = \mathrm{Vect}\{v_1 + w_1, ..., v_q + w_q, z_1, ..., z_r\}$$

est supplémentaire de F et de G. En effet, on a

$$\begin{aligned} F + S &= \mathrm{Vect}\{u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q, v_1 + w_1, ..., v_q + w_q, z_1, ..., z_r\} \\ &= \mathrm{Vect}\{u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q, w_1, ..., w_q, z_1, ..., z_r\} = E, \end{aligned}$$

et $\dim F + \dim S = \dim E$, donc $E = F \oplus S$; et on voit de même (en échangeant les rôles des v_i et des w_i) que $E = G \oplus S$.

FIN.