L'INTÉGRALE DE RIEMANN COMPLÈTE.
Proposition pour le programme de 2ème année de DEUG MIAS,
É. Charpentier, université Bordeaux I.
(Version non définitive.)

Table des matières

1 Avant propos 1

2 Définition(s) 4

3 Premières propriétés 6

4 Intégrale et primitives (dimension 1) 7

5 L'intégrale satisfait à la relation de Chasles. 8

6 Lemme d'Henstock, et continuité de $x \mapsto \int^x f$. 9

7 Le théorème de convergence monotone. 10

8 Digression : exercices de visualisation 13

9 Les fonctions absolument intégrables 14

10 Le théorème de convergence encadrée. 17

11 Applications aux intégrales paramétriques 19

12 Théorème de Hake- Henstock 21

13 Mesures ; intégration sur autre chose que des pavés. 23

14 Intégrales multiples : problèmes spécifiques 26
- 14.1 Le théorème de Fubini. 27
- 14.2 Le théorème de Hake-Henstock en dimension ≥ 2 28
- 14.3 Le théorème de changement de variable 30

1 Avant propos

Qui sème peu récolte peu.
Chrétien de Troyes
Le conte du Graal

Voici une présentation de l'intégrale de Riemann complète[1] (qui englobe à la fois les intégrales de Riemann, Lebesgue et Newton, tout en restant très élémentaire). Mon opinion est qu'en expurgeant ce qui doit l'être et en peaufinant l'aspect pédagogique, on devrait pouvoir en tirer un cours de DEUG qui serait bénéfique à nos étudiants – plus bénéfique que du "tout Riemann" en DEUG puis du "tout Lebesgue" (tiré d'un chapeau de prestidigitateur) en Licence, plus bénéfique aussi que du Lebesgue en DEUG : Lebesgue n'est naturel qu'aux yeux qui ont déjà vu une intégrale, et l'intégrale de Riemann classique prépare mal à Lebesgue ; l'intégrale de Riemann complète y prépare très bien : tellement bien qu'elle introduit la mesure de Lebesgue tout simplement et qu'on peut commencer un cours de Licence en partant de cette mesure toute prête, plutôt que de faire la construction de force brute de Lebesgue, dont l'expérience montre que tous les étudiants la *zappent*. Quant à l'intégrale des fonctions continues par morceaux, nos étudiants l'ont déjà vue en terminale, et je pense qu'il ne faut pas les y cantonner – remettre toujours à plus tard leur confrontation avec les idées un tant soit peu élaborées, c'est leur faire un cadeau empoisonné ...

Je donne (au moins en esquisse) les preuves qui sont digérables au niveau DEUG. Bien sûr, dans un vrai cours tout ne peut pas être démontré (les heures sont comptées). Mais quand un résultat est énoncé en cours, il me paraît important que les étudiants qui voudraient voir et comprendre une preuve puissent le faire : nous formons des scientifiques, pas des béni-oui-oui. L'inconvénient majeur d'une présentation de l'intégrale de Lebesgue à ce niveau est qu'elle ne répond pas – ou pas aussi bien – à ce critère. Une bonne chose serait de mettre à la disposition des étudiants un polycopié contenant toutes les preuves (du moins toutes celles qui sont digérables en DEUG), ce qui permet aussi de passer, en cours, sur les preuves qui n'apportent pas d'idée vraiment intéressante (il suffirait de dire quelque chose comme : *"ceux d'entre vous qui veulent voir une preuve détaillée la trouveront dans le polycopié"*), et de passer plus de temps sur les idées formatrices.

L'avantage de l'intégrale de Riemann complète est que l'existence, les théorèmes de convergence, le lien avec le calcul numérique, le lien avec les primitives, tout

1. C'est l'intégrale (ou "totale") restreinte de Denjoy (1912), mais définie de façon complètement élémentaire, selon les idées de Kurzweil (1957) et Henstock (1960). La véritable renaissance que connaît la théorie de l'intégration depuis les années 1980 est tout droit sortie de ce courant d'idées.

cela se démontre en quelques lignes avec des techniques qui sont d'ores et déjà familières aux étudiants de ce niveau.
(Seuls Fubini et le changement de variables en dimension ≥ 2 doivent être admis, mais ça c'est commun à *toutes* les approches de l'intégrale à ce niveau.)

Une remarque pédagogique. Les étudiants visualisent beaucoup mieux ce qui se passe avec des intervalles dans $\mathbb{R}$ qu'avec des pavés dans $\mathbb{R}^d$. Dans beaucoup de cas, on pourrait donner en cours les preuves dans $\mathbb{R}$, et se contenter de signaler que les preuves dans $\mathbb{R}^d$ sont les mêmes à des complications notationnelles près (il faut quand même en faire quelques -unes, bien sûr, pour qu'ils voient ça). Faire les preuves directement dans $\mathbb{R}^d$ me paraît anti -pédagogique, en masquant les difficultés réelles par des difficultés purement décoratives (des indices partout ...) Quant à l'étudiant qui veut une preuve de tout ce qu'on lui présente, il peut la chercher lui même ou la demander à ses enseignants, et n'aura aucun mal à la comprendre – *surtout s'il l'a déjà vue et comprise en dimension 1.*

La présentation de l'intégrale de Riemann complète est si directe et si simple qu'on peut dans une seule foulée donner la définition, prouver l'existence des subdivisions fines, le critère de Cauchy, le théorème d'anti- dérivation, et le théorème de convergence monotone. La démonstration du théorème de convergence dominée est une application facile de ce dernier et peut faire un excellent ex. en TD (le théorème peut donc n'être qu'*énoncé* en cours).

Autres ex. pour les TD : des ex. sur le cas particulier de l'intégrale de Riemann (en vue du CAPES) ; des applications directes de la déf. de l'intégrale complète sur quelques exemples (comme $x \mapsto x^{-1/2}$ – complétée par ce qu'on veut en 0 – sur $[0,1]$, ou la caractéristique de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$), ce qui permet de bien comprendre la définition, et aussitôt, comparaison avec l'application aux mêmes cas des théorèmes de convergence, pour montrer combien ils sont puissants. (Cf. les exercices que je suggère ci-après).
La relation de Chasles aussi peut n'être qu'énoncée en cours et faire un excellent ex. de TD. (La preuve n'est pas la même que pour l'intégrale de Riemann.)
Il y a de quoi faire en TD dès la première séance.

Enfin, pour ceux qui voudraient des références, je signale à la fin deux livres de cours, niveau DEUG+ε, dont les auteurs ont pris le parti de présenter directement l'intégrale de Riemann complète. Pour d'autres références (ou pour toute question) n'hésitez pas me contacter. Vos réactions, remarques et suggestions seront aussi très bienvenues ! ...

2 Définition(s)

Définition 2.1 1. *Une* subdivision pointée *(s.p.) d'un intervalle $I = [a, b]$ $(a < b)$ de $\mathbb{R}$ (resp. d'un pavé compact de $\mathbb{R}^d$) est un ensemble fini $P = \{(x_1, I_1), \ldots, (x_n, I_n)\}$, où $I_1, \ldots, I_n$ sont des intervalles (resp. des pavés) de I, d'intérieurs disjoints deux à deux, dont la réunion est I, et où $\forall i$, x_i est un point de I_i.*

2. *On note $|I|$ la longueur d'un intervalle I (resp. le volume d'un pavé I) et, pour un pavé, $\ell(I)$ la longueur de son côté le plus long. (Pour un intervalle, $\ell(I) = |I|$.)*

3. *On appelle* jauge *sur une partie E de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^d$ une application $\delta : E \to \mathbb{R}_+^*$.*

4. *Étant donné une jauge δ sur I, une s.p. $\{(x_1, I_1), \ldots, (x_n, I_n)\}$ de I sera dite δ-fine si pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$, $\ell(I_i) < \delta(x_i)$.*

On voit que la jauge contrôle la longueur des côtés des pavés de la subdivision – d'où son nom. Avant de continuer, il faut vérifier cette chose toute bête :

Proposition 2.1 *Pour toute jauge δ, il existe des s.p. δ-fines.*

Preuve (dans $\mathbb{R}$).
Les ouverts $\big(]x - \delta(x), x + \delta(x)[\big)_{x \in [a,b]}$ recouvrent $I = [a, b]$, on extrait un sous-recouvrement fini $\big(]x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)[\big)_{i=1}^{n}$, avec $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b$, *minimal* en ce sens qu'on ne peut plus en extraire un sous-recouvrement de $[a, b]$. On choisit $a_0 = a$, a_i entre $\max\{x_{i+1} - \delta(x_{i+1}), x_i\}$ et $\min\{x_i + \delta(x_i), x_{i+1}\}$ $(1 \leq i \leq n - 1)$, et $a_n = b$. Les intervalles $I_i = [a_{i-1}, a_i]$ $(1 \leq i \leq n)$, et les points x_i définissent une s.p. δ-fine.
Maintenant, encore quelques définitions :

Définition 2.2 *Étant donné une fonction f sur I, à valeurs réelles, et une s.p. $P = \{(x_1, I_1), \ldots, (x_n, I_n)\}$ de I, on note :*

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)|I_i|$$

("Somme de Riemann" de f relative à P).

Définition 2.3 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou un pavé de $\mathbb{R}^d$), compact.*

1. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite intégrable (au sens de Riemann complété) sur I s'il existe un réel J tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge $\delta : I \to \mathbb{R}_+^*$ t.q. pour toute s.p. P δ-fine de I, on ait :*
$$|J - S(f,P)| < \varepsilon. \tag{1}$$
J est alors unique, on le note
$$\int_I f(t)dt = J,$$
($\int_a^b f(t)dt$ si $I = [a,b]$) et on l'appelle l'intégrale (de Riemann complète) de f sur I. (On définit aussi alors $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$.)

2. *Une jauge satisfaisant aux conditions ci-dessus sera dite ε-adaptée à f sur I.*

3. *f sera dite intégrable* au sens de Riemann *("R- intégrable") si elle est intégrable et qu'on peut prendre une jauge ε-adaptée* constante.

Remarque 2.1 *La définition 2.3 et les résultats qui vont suivre resteront valables sur un intervalle (ou un pavé) non borné, à condition de* ne tenir compte que des intervalles (ou pavés) bornés *de la subdivision dans le calcul des sommes de Riemann. Cela signifie que si I_i n'est pas borné, on doit remplacer $|I_i|$ par 0 dans le calcul de $S(f,P)$:*

Définition 2.4 *Notons encore $|I|$ la longueur d'un intervalle (ou le volume d'un pavé) I* borné*. Pour un intervalle (ou un pavé) I* non borné*, posons $|I| = 0$. De même notons $\ell(I) = 0$ pour un pavé non borné. Les notations $|I|$ et $\ell(I)$ sont donc définies pour tout intervalle (ou pavé) I borné ou non. On peut appeler $|I|$ la* longueur efficace *de I (ou le* volume efficace *de I, pour un pavé), et $\ell(I)$ la* longueur efficace *(dans tous les cas). Avec cette notion, on peut définir les sommes de Riemann $S(f,P) = \sum_{i=1}^n f(x_i)|I_i|$ d'une fonction f pour une s.p. d'un intervalle (ou pavé)* quelconque *(borné ou non) de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^d$). En fait, prolongeant au besoin f (par 0) à $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^d$) tout entier, on pourra toujours se ramener à des sommes de Riemann (et, donc, à des intégrales)* sur $\mathbb{R}$ *(ou $\mathbb{R}^d$). La définition de l'intégrabilité est inchangée.*

3 Premières propriétés

L'**existence** de fonctions intégrables est évidente (les constantes). L'intégrale est trivialement **linéaire**. Si f et g sont intégrables et que $|f| \leq g$, on a l'inégalité $|\int_a^b f| \leq \int_a^b g$ (N.B. une telle fonction g peut ne pas exister : contrairement au cas de Riemann, f intégrable n'implique pas $|f|$ intégrable, comme on le verra[2]) ; par conséquent l'intégrale est **positive**. La formule dite "d'**invariance** de la mesure par **translation**" est trivialement vraie.

N.B. On a immédiatement la possibilité de faire en TD quelques ex. sur l'intégrale de Riemann : une fonction R- intégrable est bornée, etc. Aussi peut-être quelques exemples de calcul numérique par les sommes de Riemann (méthodes des trapèzes, du milieu, de Simpson ...), pour les fonctions R-intégrables. (Pour les autres, il faut avoir des informations précises sur les jauges adaptées.) Aussi ce truc utile : une fonction nulle sauf en un nombre fini de points est intégrable (et même R-intégrable) et son intégrale est nulle ; conséquence : si $f = g$ sauf en un nombre fini de points et que f est intégrable, g l'est aussi et a la même intégrale.

Avec la proposition 2.1, on peut vérifier que le **critère de Cauchy** s'applique pour le type de convergence sous-jacent à la définition de l'intégrabilité, i.e. : si $\forall \varepsilon > 0$, existe une jauge δ t.q. pour toutes s.p. P, P' δ-fines on ait $|S(f, P') - S(f, P)| < \varepsilon$, on a immédiatement (récurrence[3]) l'existence d'une suite décroissante de jauges δ_n correspondant à la suite $\varepsilon_n = 1/n$, et une suite associée P_n de s.p. δ_n-fines, et on vérifie que la suite $\big(S(f, P_n)\big)_n$ est de Cauchy, puis que $\forall m \geq 1$, et pour toute s.p. δ_m-fine, l'inégalité (1) a lieu pour $\varepsilon = 2/m$. Donc f est intégrable sur I.

Une première conséquence utile (et triviale) de ce critère de Cauchy est que **l'intégrale a la propriété de restriction** (pour les pavés). En particulier, en dimension 1, l'intégrale indéfinie est bien définie (!)

Pour montrer qu'**une fonction continue** $f : I \to \mathbb{R}$ **(**I **compact) est intégrable**, il n'y a qu'à copier Cauchy : soit $\varepsilon > 0$; soit δ une jauge t.q. $\forall x$, $\forall y$, $|y - x| < \delta(x) \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$; soient $P = \{(x_1, I_1), \ldots, (x_n, I_n)\}$, $P' = \{(x'_1, I'_1), \ldots, (x'_m, I'_m)\}$, deux s.p. δ-fines, et soit P'' une s.p. $P'' = \{(y_{ij}, I_i \cap I'_j)_{i,j}\}$, obtenue en piochant dans chaque $I_i \cap I'_j$ non vide un y_{ij}. On a $\forall i, j$ t.q. $I_i \cap I'_j \neq \emptyset$,

2. Il faut avoir à l'esprit l'idée que l'intégrale complète est un peu aux intégrales de Riemann et Lebesgue ce que les séries convergentes sont aux séries absolument convergentes.

3. Et axiome du choix dépendant (comme déjà dans Borel -Lebesgue, d'ailleurs), car la récurrence ne peut prouver que l'existence de suites *finies* de longueur arbitraire ...

$|f(x_i) - f(y_{ij})| < \varepsilon$ et $|f(y_{ij}) - f(x'_j)| < \varepsilon$, et donc : $|S(f,P') - S(f,P)| = \Big|\sum_{ij}\big(f(x_i) - f(x'_j)\big)|I_i \cap I'_j|\Big| \leq \sum_{ij}\big(|f(x_i) - f(y_{ij})| + |f(y_{ij}) - f(x'_j)|\big)|I_i \cap I'_j| < 2\varepsilon(b-a)$. Le critère de Cauchy conclut.

N.B. On remarque que la preuve de l'intégrabilité des fonctions continues est, en un sens, plus simple que dans le cas riemannien : on n'a pas besoin d'utiliser le théorème de Heine – on a utilisé (Heine-) Borel- Lebesgue une fois pour toutes en prouvant l'existence de s.p. δ-fines. Mais pour le calcul numérique, on a besoin de savoir que les fonctions continues sont *Riemann* -intégrables. Si on a fait ce qui précède en cours, on peut bien faire ça en TD ...

Les fonctions monotones sont intégrables (sur I compact) : critère de Cauchy. (Là encore, *exercice* (pour les TD, et en vue du CAPES) : les fonctions monotones sont *aussi Riemann*- intégrables.)

4 Intégrale et primitives (dimension 1)

Un autre résultat, qui montre à quel point l'intégrale complète est plus puissante que l'intégrale de Riemann (et que celle de Lebesgue), est qu'elle contient l'intégrale de Newton, i.e. l'anti- dérivation. Le fait remarquable est que, comme pour l'intégrabilité des fonctions continues, la démonstration n'est qu'un recopiage de la démonstration classique de Cauchy. Et, ici encore, la preuve est *plus simple* que pour l'intégrale de Riemann, et pour la même raison : on n'a *pas besoin* de minorer δ en invoquant Heine- Borel- Lebesgue (le fameux point qui avait échappé à Cauchy) : la définition de l'intégrabilité s'accommode très bien des δ non minorées par un nombre > 0 (elle est faite pour cela !), contrairement à la définition de l'intégrale de Riemann.

Théorème 4.1 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur I et dérivable sur $]a,b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b, alors f' est intégrable et $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$. (N.B. Nous verrons plus loin que l'hypothèse de dérivabilité à droite en a et à gauche en b peut être supprimée sans que le résultat cesse d'avoir lieu : cf. le corollaire du théorème de Hake- Henstock, ci-dessous.)*

Preuve.
Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\delta(x) > 0$ tel que $\forall y, z \in [a,b]$, si $y \leq x \leq z$ et $z - y < \delta(x)$, alors

$$\Big|f(z) - f(y) - (z-y)f'(x)\Big| \leq \frac{\varepsilon(z-y)}{b-a}$$

On a alors, pour toute s.p. δ-fine,

$$\begin{aligned}\left|f(b)-f(a)-S(f',P)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n}\big(f(a_i)-f(a_{i-1})-(a_i-a_{i-1})f'(x_i)\big)\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1}) = \varepsilon.\end{aligned} \tag{2}$$

D'où le résultat.

En appliquant ce qui précède sur $[a,x]$, on voit que $\int_a^x f'(t)dt$ est la primitive de f' nulle en a. C'est un énoncé (unilatéral) du Théorème Fondamental.

On déduit du théorème que la formule d'**intégration par parties** est valable en toute généralité, dès que fg' ou $f'g$ est intégrable (l'une des conditions impliquant l'autre), et aussi que la formule de **changement de variable**[4] $\int_a^b f\left(g(t)\right)g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)ds$ est vraie dès que g est dérivable et que f est une dérivée sur $g\left([a,b]\right)$. (On a besoin de savoir que $g\left([a,b]\right)$ est un intervalle, i.e. le th. des valeurs intermédiaires, et alors il suffit d'appliquer le TF à $F\circ g$ et à f).

5 L'intégrale satisfait à la relation de Chasles.

C'est une bonne occasion d'illustrer une nouvelle fois la *souplesse* de la notion de jauge.
On suppose donc $a<c<b$ et f intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$. Soit $\varepsilon>0$. Soient δ_1 une jauge ε-adaptée sur $[a,c]$ et δ_2 une jauge ε-adaptée sur $[c,b]$.
Définissons une jauge comme suit : Pour $x\in[a,c[$ (resp. $x\in]c,b]$), on prend $\delta(x)<\delta_1(x)$ assez petit pour que $x+\delta(x)<c$ (resp. $\delta(x)<\delta_2(x)$ assez petit pour que $x-\delta(x)>c$), et on prend $\delta(c)<\min\{\delta_1(c),\delta_2(c)\}$ assez petit pour que $]c-\delta(c),c+\delta(c)[$ soit inclus dans $]a,b[$.
Soit $P=\{(z_1,K_1),\ldots,(z_p,K_p)\}$ une s.p. de I, δ-fine. Je dis que les $(z_i,K_i\cap[a,c])$ t.q. $K_i\cap[a,c]\neq\emptyset$ forment une s.p. P_1 de $[a,c]$, i.e. $z_i\in K_i\cap[a,c]$ ssi $K_i\cap[a,c]\neq\emptyset$ (et que les $(z_i,K_i\cap[c,b])$ t.q. $K_i\cap[c,b]\neq\emptyset$ forment une s.p. P_2 de $[c,b]$).
En effet, si $z_i\in[a,c[$ (resp. si $z_i\in]c,b]$) on a $K_i\subset[a,z_i+\delta(z_i)[\subset[a,c[$ donc $K_i\cap[c,b]=\emptyset$ (resp. $K_i\cap[a,c]=\emptyset$), et si $z_i=c$, z_i est dans $K_i\cap[a,c]$ et dans $K_i\cap[c,b]$.

4. Cet énoncé ne passe pas bien en dimension ≥ 2. Nous verrons plus loin un énoncé valable en toute dimension – ce sera celui de Lebesgue, en fait.

Par construction, P_1 et P_2 sont δ-fines, donc respectivement δ_1-fine et δ_2-fine, et on a immédiatement que $S(f,P) = S(f,P_1) + S(f,P_2)$, d'où : $|\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt - S(f,P)| = |\int_a^c f(t)dt - S(f,P_1) + \int_c^b f(t)dt - S(f,P_2)| < 2\varepsilon$, ce qui prouve que f est intégrable sur I et que $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

Cette démonstration ne marcherait pas pour l'intégrale de Riemann, car même si δ_1 et δ_2 sont constantes, δ ne l'est pas ! Dans le cas de l'intégrale de Riemann, la preuve est aussi facile (il suffit d'isoler la contribution de l'intervalle contenant c si c ne fait pas partie de la subdivision, et sinon c'est trivial). Mais quand on passe en dimension $n \geq 2$ ("Si f est intégrable sur des pavés, en nombre fini, elle est intégrable sur leur union et les intégrales s'ajoutent"), la preuve pour l'intégrale de Riemann devient un peu laborieuse, tandis que la preuve ci-dessus passe telle quelle.

La relation de Chasles appliquée à **l'intégrale indéfinie**, $\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$, montre (par un encadrement évident) que celle-ci est une **primitive de f si f est continue** (donc toute fonction continue est une dérivée : Cauchy, 1823).

Elle montre encore que l'intégrale indéfinie est continue si f est bornée, car alors $|\int_x^{x+h} f(t)dt| \leq M|h|$ (en observant les sommes de Riemann) : c'est le même argument que pour l'intégrale de Riemann (qui n'est capable de traiter *que ce cas* : f bornée). Si f n'est pas bornée (nous verrons que cela arrive), son intégrale indéfinie est quand même continue. Pour le prouver, il nous faut un lemme évident mais très utile (c'est le *leitmotiv* de l'intégrale complète) :

6 Lemme d'Henstock, et continuité de $x \mapsto \int^x f$.

Lemme 6.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou un pavé de $\mathbb{R}^d$), $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur I. Soient $\varepsilon > 0$, et δ une jauge ε-adaptée à f sur I. Soient enfin $(K_i)_{1\leq i\leq n}$ des sous-intervalles (ou sous-pavés) de I d'intérieurs deux à deux disjoints, $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ des points choisis resp. dans les $(K_i)_{1\leq i\leq n}$, et supposons que $\forall i$, $\ell(K_i) < \delta(x_i)$ (autrement dit les $(x_i, K_i)_{1\leq i\leq n}$ sont des sous-intervalles pointés δ-fins de I : dit qu'ils forment une* s.p. partielle *δ-fine de I). Alors $\left|\sum_{i=1}^n \big(f(x_i)|K_i| - \int_{K_i} f\big)\right| \leq \varepsilon$;*

Preuve (dans $\mathbb{R}$). On prend $\eta > 0$; on complète la subdivision. Par exemple, soient J_j ($1 \le j \le q$) les composantes connexes de $I \setminus \cup_i K_i$. Dans chaque J_j, on choisit une jauge $\gamma_j \le \delta$ et une s.p. P_j γ_j-fine de façon à avoir $|\int_{J_j} f - S(f, P_j)| < \eta$. Les restrictions de δ aux K_i et les γ_j définissent une jauge δ' sur I, les (x_i, K_i) et les P_j définissent une s.p. P δ'-fine, donc δ-fine, de I, et
$\left| \sum_{i=1}^n \big(f(x_i)|K_i| - \int_{K_i} f\big) \right| \le |S(f,P) - \sum_j S(f,P_j) - \int_I f + \sum_j \int_{J_j} f| \le \varepsilon + q\eta$,
et cela $\forall \eta > 0$, d'où le résultat.

Proposition 6.1 *Pour toute f intégrable sur $[a,b]$, l'intégrale indéfinie $x \mapsto \int_a^x f$ est continue sur $[a,b]$.*

Preuve Il s'agit de prouver que $\forall x$, $\int_x^{x+h} f(t)dt$ tend vers 0 avec h. Soit $\varepsilon > 0$. Soit δ une jauge ε-adaptée à f. Prenons h t.q. $|h| < \delta(x)$. Notons K le segment joignant x à $x+h$. On a $K \subset]x - \delta(x), x + \delta(x)[$, et le lemme d'Henstock appliqué à (x, K) montre que $\left| \int_x^{x+h} f - f(x)|h| \right| \le \varepsilon$, d'où $\int_x^{x+h} f \le \varepsilon + |f(x)h|$. Quitte à diminuer encore $|h|$ de façon à ce que $|f(x)h| \le \varepsilon$, on aura $\int_x^{x+h} f \le 2\varepsilon$. C'est tout.

Voici un résultat vraiment nouveau (par rapport au cas de l'intégrale de Riemann non complète) :

7 Le théorème de convergence monotone.

Théorème 7.1 *Soient I un pavé de $\mathbb{R}^d$ (borné ou non), et $f_n : I \to \mathbb{R}$ ($n \ge 0$), $f : I \to \mathbb{R}$ des applications telles que :*

1. *toutes les f_n sont intégrables sur I ;*
2. *la suite (f_n) est monotone et converge (simplement) vers f sur I.*

Alors f est intégrable sur I ssi *la suite des $\int_I f_n$ converge, et dans ce cas $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$.*

Preuve Quitte à changer le signe, on se ramène au cas où la suite (f_n) est croissante. L'une des implications est évidente : si f est intégrable, la suite (croissante) des $\int_I f_n$ est majorée par $\int_I f$, donc converge. Montrons la réciproque.
On suppose donc que la suite des $\int_I f_n$ converge vers une limite ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N à partir duquel $0 \le \ell - \int_I f_n \le \varepsilon$. Comme la suite (f_n) converge

(simplement) vers f, il existe pour tout $x \in I$ un rang $M(x)$ (qu'on peut toujours prendre $\geq N$) à partir duquel $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.
On veut en déduire que f est intégrable et que $\int_I f = \ell$, i.e. qu'il existe une jauge δ telle que pour toute s.p. P de I, δ-fine, $|S(f,P) - \ell|$ soit majoré par un même nombre tendant vers 0 avec ε.
Soit donc $P = \{(x_1, I_1), \ldots, (x_n, I_n)\}$ une s.p. P de I. On a :

$$\begin{aligned} \Big|S(f,P) - \ell\Big| &\leq \sum_{i=1}^{n} \Big|f(x_i) - f_{M(x_i)}(x_i)\Big||I_i| \\ &+ \Big|\sum_{i=1}^{n} \Big(f_{M(x_i)}(x_i)|I_i| - \int_{I_i} f_{M(x_i)}(t)dt\Big)\Big| + \Big|\sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} f_{M(x_i)}(t)dt - \ell\Big|. \end{aligned} \tag{3}$$

Des trois termes du second membre, le premier est majoré par $\varepsilon|I|$, le dernier par ε car, puisque tous les $M(x_i)$ sont $\geq N$ et inférieurs au plus grand d'entre eux (disons μ), on a :

$$0 \leq \ell - \int_I f_\mu = \ell - \sum_i \int_{I_i} f_\mu \leq \ell - \sum_i \int_{I_i} f_{M(x_i)} \leq \ell - \sum_i \int_{I_i} f_N = \ell - \int_I f_N \leq \varepsilon,$$

et il ne reste donc plus qu'à majorer le deuxième. C'est là qu'il va falloir trouver une jauge adéquate.
Les $M(x_i)$ sont tous compris entre N et le plus grand d'entre eux, μ. Dans la somme à majorer, regroupons les termes correspondant à une même valeur de $M(x_i)$: notant, pour $N \leq k \leq \mu$, $\sigma(k)$ l'ensemble (éventuellement vide) des indices i t.q. $M(x_i) = k$, on a :

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{i=1}^{n} \Big(f_{M(x_i)}(x_i)|I_i| - \int_{I_i} f_{M(x_i)}(t)dt\Big)\Big| = \Big|\sum_{k=N}^{\mu} \Big(\sum_{i\in\sigma(k)} \Big(f_k(x_i)|I_i| - \int_{I_i} f_k(t)dt\Big)\Big)\Big| \\ &\leq \sum_{k=N}^{\mu} \Big|\sum_{i\in\sigma(k)} \Big(f_k(x_i)|I_i| - \int_{I_i} f_k(t)dt\Big)\Big| \end{aligned} \tag{4}$$

Choisissons pour chaque $k \in \mathbb{N}$ une jauge δ_k qui soit 2^{-k}- adaptée à f_k, et $\forall x \in I$ posons $\delta(x) = \delta_{M(x)}(x)$. (C'est *cela* qui ne marcherait pas pour l'intégrale de Riemann : même si les jauges δ_k sont constantes, δ ne l'est pas en général – sauf s'il y a convergence uniforme, auquel cas on peut prendre $M(x) = M$ $\forall x$ et δ_M

constante si les f_M sont Riemann-intégrables (sur I borné) – et aucune jauge constante ne pourrait la remplacer dans ce qui suit[5].)

Si P est δ- fine, pour tout k de N à μ t.q. $\sigma(k) \neq \emptyset$ la famille $(x_i, I_i)_{i\in\sigma(k)}$ est δ-fine et le lemme d'Henstock donne donc :

$$\Big| \sum_{i\in\sigma(k)} \left(f_k(x_i)|I_i| - \int_{I_i} f_k(t)dt \right) \Big| \leq 2^{-k},$$

d'où :

$$\Big| \sum_{i=1}^{n} \left(f_{M(x_i)}(x_i)|I_i| - \int_{I_i} f_{M(x_i)}(t)dt \right) \Big| \leq \sum_{k=N}^{\mu} 2^{-k}.$$

Quitte à augmenter N, on peut se ramener au cas où $\forall M \geq N$, $\sum_{k=N}^{M} 2^{-k} \leq \varepsilon$.

Dans ces conditions, on a donc obtenu que δ est ε'- adaptée, avec $\varepsilon' = (|I| + 2)\,\varepsilon$, et que f est intégrable, avec $\int_I f = \ell$. Cela achève la preuve.

On voit que celle-ci est très facile, aussi facile que les preuves faites dans le cadre Lebesgue, avec cette différence intéressante qu'ici on n'a pas eu à construire préalablement la mesure de Lebesgue, ni à en admettre l'existence – en fait on n'a rien admis du tout ! De plus, on a remarqué au passage que ça marcherait pour le cas spécial de l'intégrale de Riemann (sur un compact) si la convergence était uniforme.

Quelques exemples

1. La fonction $x \to x^{-1/2}$ (complétée comme on veut en 0) est intégrable sur $[0,1]$. En effet c'est la limite croissante de ses restrictions aux intervalles $[\frac{1}{n}, 1]$ (prolongées par 0 partout ailleurs), et la suite des intégrales de celles-ci converge[6].

5. C'est quand même, au fond, un argument d'uniformité qui permet ici de conclure qu'on peut intervertir $\lim_k$ et $\int = \lim_P$: car ce qu'on est en train de montrer, en fait, c'est que la convergence des sommes de Riemann des f_k quand P devient indéfiniment fine, est uniforme par rapport à k. C'est d'ailleurs sous ce point de vue que McLeod [1] rédige la preuve.

6. Notez que l'assertion $\int_0^1 x^{-1/2}dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_\varepsilon^1 x^{-1/2}dx$ est ici un théorème, et non une définition du premier membre : ce n'est *pas* une intégrale "impropre". Nous verrons d'ailleurs plus loin que c'est un fait général : dans la théorie de l'intégrale de Riemann complète, *toutes les intégrales sont "propres" (Théorème de Hake- Henstock).*

2. La caractéristique des rationnels est intégrable sur $[0,1]$ (par exemple), car c'est la limite croissante des $f_m(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} |\cos[2\pi m!x]|^n$, qui sont elles-mêmes intégrables (et d'intégrale nulle), vu que $\forall m$, f_m est non nulle seulement aux points $\frac{k}{2\,m!}$ $(0 \leq k \leq 2\,m!)$.

8 Digression : exercices de visualisation

Pour se familiariser avec la notion de jauge, on peut s'amuser à vérifier directement à partir de la définition 2.3 que les fonctions ci-dessus sont intégrables. Une fonction comme $x \to x^{-1/2}$ sur $]0,1]$ présente l'intérêt d'être parfaitement visualisable. En fait, pour simplifier encore un peu, je vais prendre une variante :

Exercice 8.1 *Montrer directement par la définition 2.3 que la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(0) = 0$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], f(x) = n^{1/2}$$

est intégrable sur $[0,1]$.

Pour une solution, cf. la démonstration du théorème de Hake- Henstock, ci-dessous. Idem pour l'exemple suivant (où cette fois le théorème de convergence monotone ne s'appliquerait pas, et qui montre en passant que *l'intégrabilité de f n'implique pas celle de $|f|$*).

Exercice 8.2 *Montrer que la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(0) = 0$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], f(x) = (-1)^{n-1}n$$

est intégrable sur $[0,1]$ (et que son intégrale est $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$).

Autre vérification directe de l'aptitude des jauges à suivre les irrégularités des fonctions, mais cette fois pour une fonction qui oscille tellement que le procédé d'intégrale impropre de Cauchy (à partir des intégrales de Cauchy ou de Riemann) ne s'y applique même pas :

Exercice 8.3 *Montrer que la fonction caractéristique des rationnels sur $[0,1]$:*

$$\begin{aligned} \chi(x) = & 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ & 0 \text{ sinon} \end{aligned} \tag{5}$$

est intégrable.

(Mmmm ... c'est déjà moins visualisable, n'est-ce pas?)

Solution de l'ex. 8.3. Soient $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des rationels de $[0,1]$, et $\varepsilon > 0$. Posons

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}, \delta(r_n) = \frac{\varepsilon}{2^{(n+1)}}, \\ &\delta(x) = 1 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{aligned} \tag{6}$$

Il est clair que pour toute s.p. $P = \{(x_1, I_1), \ldots, (x_n, I_n)\}$ δ-fine de $[0,1]$, on a

$$|S(\chi, P)| \leq |\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\delta(x_i)| \leq \varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-(m+1)} = \varepsilon,$$

et donc χ est intégrable, et son intégrale est nulle.

9 Les fonctions absolument intégrables

L'exercice 8.2 fournit un exemple de fonction intégrable dont la valeur absolue ne l'est pas. (Elle provient de la série harmonique alternée.) On dit qu'une fonction f est **absolument intégrable** si f et $|f|$ sont intégrables[7].

Je vais donner ici quelques propriétés utiles des fonctions absolument intégrables – sans prétendre qu'il faille toutes les mettre dans un cours de DEUG (mais elles *sont* du niveau DEUG). L'étude de celles-ci a son propre intérêt[8], exactement comme celle des séries absolument convergentes, ou des intégrales impropres absolument convergentes (dans les théories où la propriété de Cauchy n'a pas lieu).

Nous aurons besoin d'un complément au lemme d'Henstock :

Complément au lemme d'Henstock.
Sous les conditions du lemme d'Henstock, on a aussi :

1. $$\sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i)|K_i| - \int_{K_i} f \right| \leq 2\varepsilon;$$

7. L'énoncé "$|f|$ intégrable $\Longrightarrow$ f intégrable" est formellement indécidable dans Zermelo-Fraenkel.

8. En fait, ce sont exactement les fonctions intégrables au sens de Lebesgue.

2. Pour toute s.p. δ-fine de I,

$$\left|S(|f|,P)-\sum_{i=1}^{m}|\int_{I_i}f|\right|\leq 2\varepsilon.$$

Preuve

1. On applique le lemme d'Henstock d'abord aux K_i tels que $f(x_i)|K_i|-\int_{K_i}f$ soit positif, puis aux autres, et on ajoute.

2. On applique l'inégalité ci-dessus aux I_i, après avoir appliqué une inégalité triangulaire.

Avec cela, nous pouvons donner une caractérisation des fonctions absolument intégrables :

Proposition 9.1 *Soient I un intervalle borné de $\mathbb{R}$ (ou un pavé borné de $\mathbb{R}^d$), et $f : I \to \mathbb{R}$ intégrable. Notons V_f la borne supérieure (finie ou infinie) des nombres $\sum_i \left|\int_{I_i} f\right|$ quand $(I_i)_i$ décrit toutes les subdivisions de I.*
$|f|$ est intégrable ssi *V_f est finie, et dans ce cas $\int_I |f| = V_f$.*

N.B. En dimension $d = 1$, notons F une intégrale indéfinie de f : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $a \in I$. V_f, généralement noté $V(F)$, est la variation totale de F.

Preuve. (Dans $\mathbb{R}$). La nécessité est évidente puisque $\sum_i \left|\int_{I_i} f\right| \leq \sum_i \int_{I_i} |f| = \int_I |f|$ si $|f|$ est intégrable, en vertu d'une inégalité déjà vue. Montrons la suffisance. On suppose donc V_f finie. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $P = \{(I_1), \ldots, (I_m)\}$ une subdivision telle que $V_f - \varepsilon \leq \sum_i \left|\int_{I_i} f\right|$.
Dans la preuve de la relation de Chasles, on avait construit une jauge δ ε-adaptée sur I t.q. toute s.p. P δ-fine de I induise des s.p. P_1 et P_2 de $[a, c]$ et de $[c, b]$, resp., t.q. $S(f, P) = S(f, P_1) + S(f, P_2)$.
En raisonnant exactement de la même façon, on construit ici une jauge δ ε-adaptée sur I t.q. toute s.p. δ-fine de I, $P = \{(x_1, K_1), \ldots (x_n, K_n)\}$, induise sur chaque I_i une s.p. P_i, avec $S(f, P) = \sum_{i=1}^m S(f, P_i)$. On a alors :

$$V_f - \varepsilon \leq \sum_i \left|\int_{I_i} f\right| \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|\int_{I_i\cap K_j} f\right| \leq V_f$$

donc :

$$\Big|V_f - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Big| \int_{I_i \cap K_j} f \Big| \Big| \le \varepsilon.$$

Vu le complément au lemme d'Henstock et le fait que $S(|f|,P) = \sum_{i=1}^{m} S(|f|,P_i)$ est la somme de Riemann de $|f|$ relative à la s.p. $(x_j, K_j \cap I_i)_{\{i,j \mid K_j \cap I_i \neq \emptyset\}}$, on a aussi

$$\Big|S(|f|,P) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Big| \int_{K_j \cap I_i} f \Big| \Big| \le 2\varepsilon,$$

d'où en ajoutant :

$$\Big|S(|f|,P) - V_f\Big| \le 3\varepsilon.$$

On déduit de cette proposition qu'**une fonction intégrable (dans un intervalle I) dont la valeur absolue est majorée par une fonction intégrable est absolument intégrable, et que l'inégalité passe aux intégrales**. En effet, si $|f| \le g$ avec f et g intégrables, en appliquant l'inégalité déjà vue $|\int_{I_i} f| \le \int_{I_i} |g|$ dans tout intervalle d'une subdivision de I, et en sommant sur i, on obtient que $V_f \le \int_I g$, et la proposition conclut.

Une conséquence de cette remarque est que sur un compact, **une fonction intégrable bornée est absolument intégrable**. En effet, $|f|$ est alors majorée par une fonction g *constante* donc intégrable.

Une autre conséquence est que **l'ensemble des fonctions absolument intégrables (sur I) est un espace vectoriel**, $\mathcal{L}^1(I)$. Cela implique, en particulier, que si f et g sont absolument intégrables, $f-g$ et $f+g$ le sont aussi, et donc $\max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|$ et $\min\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|$ le sont aussi.

N.B. Par contre, f, g intégrables n'implique pas $\max\{f,g\}$ intégrable (ni $\min\{f,g\}$) : exemple : f= la fonction de l'exercice 8.2, g=0. Ni le max ni le min ne sont intégrables sur $[0,1]$.

Mais on a ceci :

Lemme 9.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si f et g sont intégrables sur I, et si elles sont minorées (resp. majorées) sur I par une fonction intégrable, alors* $\max\{f,g\}$ *et* $\min\{f,g\}$ *sont intégrables et :* $\int_I \min\{f,g\} \le \min\left\{\int_I f, \int_I g\right\}$
$\le \max\left\{\int_I f, \int_I g\right\} \le \int_I \max\{f,g\}$

Preuve
Supposons f et g minorées par h intégrable (si elles sont majorées, l'argument est analogue ; ou changer les signes ...) Alors $f-h$ et $g-h$ sont positives et intégrables, donc absolument intégrables, donc $h + \max\{f-h, g-h\} = \max\{f,g\}$ et $h+\min\{f-h, g-h\} = \min\{f,g\}$ sont intégrables, et les inégalités découlent de la positivité de l'intégrale .

N.B. Le cas d'un nombre $n \geq 2$ de fonctions en découle trivialement.

Cela nous mène tout droit au théorème de convergence "encadrée" (ou dominée) :

10 Le théorème de convergence encadrée.

Théorème 10.1 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou un pavé de $\mathbb{R}^d$), disons borné (ce n'est pas essentiel) et $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n \geq 0)$, $f : I \to \mathbb{R}$ des applications telles que :*

1. *toutes les f_n sont intégrables sur I ;*
2. *la suite (f_n) converge (simplement) vers f sur I.*
3. *il existe des fonctions $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ intégrables sur I qui "encadrent" toutes les f_n : $\forall n,\ g \leq f_n \leq h$.*

Alors f est intégrable sur I et $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$.

Preuve La preuve n'est pas spécifique à l'intégrale de Riemann complète : elle n'utilise pas les jauges, c'est la même que chez Lebesgue. Je la donne *for completeness.*
Si on note $s_{n,p} = \min\{f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+p}\}$, $t_{n,p} = \max\{f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+p}\}$ (qui sont intégrables vu le lemme précédent), on a $\forall n$, $\forall p$:

$$g \leq s_{n,p+1} \leq s_{n,p} \leq s_{n+1,p-1} \leq f_{n+1} \leq t_{n+1,p-1} \leq t_{n,p} \leq t_{n,p+1} \leq h.$$

$\forall n$, la suite $(s_{n,p})_p$ est décroissante minorée (la suite des intégrales aussi), donc elle a une limite s_n intégrable et $\int_I s_n = \lim_p \int_I s_{n,p}$ par le théorème de convergence monotone.
De même, $(t_{n,p})_p \uparrow t_n$ intégrable et $\int_I t_n = \lim_p \int_I t_{n,p}$.
Faisant $p \to \infty$ dans les inégalités précédentes, on obtient :

$$g \leq s_n \leq s_{n+1} \leq f_{n+1} \leq t_{n+1} \leq t_n \leq h,$$

d'où encore par convergence monotone, $(s_n)_n \uparrow s$ intégrable, avec $\int_I s = \lim_n \int_I s_n$, et $(t_n)_n \downarrow t$ intégrable, avec $\int_I t = \lim_n \int_I t_n$,
On n'a pas encore utilisé l'hypothèse $f_n \to f$: soit $\varepsilon > 0$; pour tout $x \in I$, existe $N(x) \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq N(x) \Longrightarrow f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon$. Alors, pour $n \geq N(x)$ et tout p,

$$f(x) - \varepsilon \leq s_{n,p}(x) \leq f_n(x) \leq t_{n,p}(x) \leq f(x) + \varepsilon$$

d'où

$$f(x) - \varepsilon \leq s_n(x) \leq f_n(x) \leq t_n(x) \leq f(x) + \varepsilon$$

et donc $s = t = f$. On a donc obtenu que f est intégrable, et que
$\int_I f = \lim_n \int_I s_n = \lim_n \int_I t_n$.
Enfin, $\forall n$, on a $s_n \leq f_n \leq t_n$, donc $\int_I s_n \leq \int_I f_n \leq \int_I t_n$, et comme les deux extrémités tendent vers $\int_I f$ quand $n \to \infty$, on a le résultat voulu.

Cas particulier (convergence dominée)
Si on remplace l'hypothèse d'encadrement : $\forall n$, $g \leq f_n \leq h$, par une hypothèse de dominance : $\forall n$, $|f_n| \leq h$ (h intégrable), on obtient comme cas particulier le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Dans ce cas, h est absolument intégrable (puisque positive !), donc f et les f_n aussi, et on a comme dans tous les cours sur l'intégrale de Lebesgue cette précision supplémentaire : $\lim \int_I |f - f_n| = 0$.

Corollaire 10.1 *Si f est continue (ou, plus généralement, intégrable sur tout pavé compact), et s'il existe h intégrable sur $\mathbb{R}^d$ t.q. $|f| \leq h$, alors f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}^d$.*

Preuve. On applique le théorème de convergence dominée aux $f_n = f \times \mathbf{1}_{[-n,n]^d}$: f est intégrable, et l'est absolument puisque $|f| \leq h$ (et $\int f = \lim_n \int f_n$, $|\int f| \leq \int h$).
Exemple. $\frac{\cos x}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Il est bon de signaler le :

Corollaire 10.2 *Soient I un intervalle borné de $\mathbb{R}$ (ou un pavé borné de $\mathbb{R}^d$) et $f_n : I \to \mathbb{R}$ ($n \geq 0$), $f : I \to \mathbb{R}$ des applications telles que :*

1. *toutes les f_n sont R- intégrables sur I ;*
2. *la suite (f_n) converge vers f* uniformément *sur I.*

Alors f est R- intégrable sur I et $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$.

Preuve La suite $(\| f_n \|_\infty)_n$ est convergente donc bornée[9], donc la convergence dominée s'applique. On a remarqué en prouvant le théorème de convergence monotone que si la convergence était uniforme, on pouvait prendre une jauge constante pour la limite. Si on tient compte de cette remarque dans la preuve de la convergence encadrée, on voit que la limite est bien R- intégrable. (Bien sûr, on peut aussi faire la preuve directe habituelle, ce qui reste un excellent exercice dans cette approche – alors qu'il tomberait là comme un cheveu sur la soupe dans un cours sur l'intégrale de Lebesgue).

N.B. L'hypothèse que I soit borné est essentielle, comme le montre le contre-exemple $I = [1, +\infty[$, $f(x) = x^{-1}$, $f_n(x) = x^{-1}\mathbf{1}|_{[1,n]}$.

11 Applications aux intégrales paramétriques

On tire du théorème de convergence encadrée les propriétés de continuité et de dérivabilité sous le signe somme des intégrales paramétriques sous des conditions plus générales même que dans la théorie de Lebesgue – puisqu'ici la convergence encadrée est plus générale que la convergence dominée[10]. La preuve est celle de Lebesgue.

Je vais énoncer ici ces théorèmes (et les prouver : ça ne coûte pas plus cher), *for completeness*, mais sous une forme assez restrictive (intégrales sur des pavés, et sans le p.p.), mais nous verrons plus loin que l'intégrale complète donne une nouvelle définition de la mesure de Lebesgue (qui est plus simple, en un sens, que l'originale), et l'extension des théorèmes qui vont suivre au cadre général (intégration sur des parties mesurables quelconques, existence des limites seulement p.p.) est triviale et standard – cela dit je ne sais pas s'il faut les mettre dans un cours de DEUG.

Théorème 11.1 *Soient X une partie de $\mathbb{R}^d$, x_0 un point de l'adhérence de X dans $\overline{\mathbb{R}^d}$, I un pavé de $\mathbb{R}$, et $f : X \times I \to \mathbb{R}$ t.q. :*

1. *$\forall x \in X$, l'application $I \ni t \mapsto f(x,t)$ est intégrable ;*

9. Pour N assez grand et $M \geq N$, $\| f_M - f_N \|_\infty \leq 1$ donc $\| f_M \|_\infty \leq 1 + \| f_N \|_\infty$=cte, intégrable.

10. En ce sens qu'elle s'applique à des fonctions qui peuvent ne pas être absolument intégrables. Mais, en fait, les deux théorèmes sont équivalents : on remonte du second au premier en remarquant que si $g \leq f_n \leq h$, $f_n - g$ et $h - f_n$ sont dominées par $h - g$.

2. $\forall t \in I$, $\lim_{X \ni x \to x_0} f(x,t)$ *existe (et est finie) ;*

3. *Il existe des fonctions* $g, h : I \to \mathbb{R}$ *telles que* $\forall x$ *dans un voisinage de* x_0 *et* $\forall t \in I$, $g(t) \leq f(x,t) \leq h(t)$.

Alors la fonction $I \ni t \mapsto \lim_{X \ni x \to x_0} f(x,t)$ *est intégrable et*

$$\int_I \lim_{X \ni x \to x_0} f(x,t)dt = \lim_{X \ni x \to x_0} \int_I f(x,t)dt.$$

(En particulier, si $\forall t \in I$, $X \ni x \mapsto f(x,t)$ *est continue en* x_0*, l'intégrale l'est aussi.)*

Preuve. Pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de points de X qui converge vers x_0, la convergence encadrée donne le résultat.

Corollaire 11.1 *Si* I *est compact et* f *continue sur* $X \times I$*, alors l'intégrale définit une fonction de* x *continue sur l'intérieur de* X *(si celui-ci est* $\neq \emptyset$ *!)*

Preuve. Soit x_0 dans l'intérieur de X ; prenons $r > 0$ tel que la boule $B(x_0, r) = \{\| x - x_0 \| \leq r\}$ soit incluse dans l'intérieur de X. f est continue donc bornée (donc encadrée) sur le compact $B(x_0, r) \times I$.

Théorème 11.2 *Soient* X *une partie de* $\mathbb{R}^d$ *d'intérieur non vide,* x_0 *un point de l'intérieur de* X*,* I *un pavé de* $\mathbb{R}^d$*, et* $f : X \times I \to \mathbb{R}$ *t.q. :*

1. $\forall x \in X$, *l'application* $I \ni t \mapsto f(x,t)$ *est intégrable ;*

2. $\forall t \in I$, $x \to f(x,t)$ *possède une dérivée partielle dans la direction* u, $\partial_u f(x,t)$ *en tout point d'un voisinage de* x_0 *;*

3. *Il existe des fonctions* $g, h : I \to \mathbb{R}$ *telles que* $\forall x$ *dans un voisinage de* x_0 *et* $\forall t \in I$, $g(t) \leq \partial_u f(x,t) \leq h(t)$.

Alors l'intégrale paramétrique $\int_I f(x,t)dt$ *possède en* x_0 *une dérivée partielle dans la direction* u*, la fonction* $I \ni t \mapsto \partial_u f(x_0,t)$ *est intégrable, et*

$$\partial_u \int_I f(x,t)dt\Big|_{x=x_0} = \int_I \partial_u f(x_0,t)dt.$$

Preuve. La dérivée partielle est la limite du taux de variation dans la direction u : on applique le théorème précédent en encadrant le taux de variation par le théorème des accroissements finis, vu l'encadrement de la dérivée partielle.

Corollaire 11.2 *Si* I *est compact et* X *ouvert, et si* $\partial_u f$ *existe et est continue en tout point de* $X \times I$*, alors* $X \ni x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ *possède une dérivée partielle dans la direction* u*, définie et continue sur* X*, que l'on obtient en dérivant sous le signe intégral.*

Preuve. Comme pour le corollaire précédent.

Exemples d'applications : calcul d'intégrales comme $\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx$ et $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} dx$, transformées de Fourier et Laplace (et calcul opérationnel), etc.

12 Théorème de Hake- Henstock

C'est une sorte de réciproque des propriétés de restriction et de continuité :

Théorème 12.1 *Soit $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que $\forall c$ t.q. $a < c < b$, f est intégrable sur $[a, c]$ (resp. sur $[c, b]$), et que $\ell = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(t)\,dt$ existe (resp. que $\ell = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(t)\,dt$ existe). Alors f est intégrable sur $[a, b]$ et $\int_a^b f(t)\,dt = \ell$.* Autrement dit*,* **l'intégrale a la propriété de Cauchy** *(i.e. elle "contient ses intégrales impropres").*

Preuve (Pour I borné[11]). Le lecteur est cordialement invité à faire un dessin : tout ce qui suit sera alors visuellement évident – c'est l'intérêt du point de vue de Cauchy et Riemann.

Comme on passe du cas $c \to b^-$ au cas $c \to a^+$ par une symétrie évidente, on va se contenter de prouver le premier cas. On peut supposer que $f(b) = 0$, car si ce n'est pas le cas, on remplace $f(b)$ par 0 : on sait que changer la valeur d'une fonction en un point ne change pas le fait qu'elle soit ou non intégrable et, si elle l'est, ne change pas la valeur de l'intégrale.

On prend dans $[a, b[$ une suite strictement croissante $(a_n)_{n \geq 1}$ convergeant vers b. Posons $a_0 = a$. Par restriction f est intégrable sur chaque $[a_n, a_{n+1}]$ $(n \geq 0)$. Prenons dans $[a_n, a_{n+1}]$ une jauge δ_n, $2^{-n}\varepsilon$-adaptée à f. On va construire avec les δ_n une jauge δ sur I.
D'abord, pour $x \in]a_n, a_{n+1}[$, prenons $\delta(x) > 0$ t.q. $\delta(x) \leq \delta_n(x)$ et que $]x - \delta(x), x + \delta(x)[\subset]a_n, a_{n+1}[$. Ensuite, pour $n \geq 1$, soit $\delta(a_n) > 0$ t.q. $\delta(a_n) \leq \delta_n(a_n)$, $\delta(a_n) \leq \delta_{n-1}(a_n)$, et $]a_n - \delta(a_n), a_n + \delta(a_n)[\subset]a_{n-1}, a_{n+1}[$. Pour a : $\delta(a) > 0$ t.q. $\delta(a) \leq \delta_0(a)$ et $\delta(a) < a_1 - a$. Enfin, pour b, on prend un $\delta(b) > 0$ assez petit pour qu'on ait : $\forall c$, $b - \delta(b) \leq c < b \Longrightarrow |\int_a^c f - \ell| \leq \varepsilon$.

11. L'adaptation de la preuve ci-dessous au cas où I n'est pas borné est une simple question de notation, comme la différence entre les écritures ε-esques de $\lim_{x \to x_0}$ selon que x_0 est fini ou infini.

Cela définit une jauge sur I. Soit $P = \{(x_1, I_1), \dots, (x_N, I_N)\}$ une s.p. δ-fine de I, avec $x_1 \leq \cdots \leq x_N$. On voit comme dans la preuve de la relation de Chasles que $\forall n$, $P_n = \{\big(x_i, I_i \cap [a_n, a_{n+1}]\big)\ , I_i \cap [a_n, a_{n+1}] \neq \emptyset\}_i$ est une s.p. δ_n-fine de $[a_n, a_{n+1}]$ et que $S(f, P_n) = \sum_i f(x_i)|I_i \cap [a_n, a_{n+1}]|$.
On a nécessairement $x_N = b$, car sinon existerait n t.q. $x_N \in [a_n, a_{n+1}[$ et on aurait $I_N \subset]x_N - \delta(x_N), x_N + \delta(x_N)[\subset]a_{n-1}, a_{n+1}[$: P ne serait pas une subdivision de I. On peut donc écrire: $I_N = [c, b]$.
Notons q le plus petit entier t.q. $\cup_{1 \leq i \leq N-1} I_i \subset [a, a_{q+1}]$. On a donc $a_q \leq c \leq a_{q+1}$, et (en se souvenant que $f(x_N) = f(b) = 0$):

$$\begin{aligned}
S(f, P) - \ell &= \sum_{i=1}^{N} f(x_i)|I_i| - \ell \\
&= \sum_{n=0}^{q-1} \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)|I_i \cap [a_n, a_{n+1}]| + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)|I_i \cap [a_q, c]|| \\
&- \sum_{n=0}^{q-1} \int_{[a_n, a_{n+1}]} f - \int_{[a_q, c]} f + \int_{[a,c]} f - \ell
\end{aligned} \tag{7}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\Big| S(f, P) - \ell \Big| \\
&\leq \Big| \sum_{n=0}^{q-1} \big(S(f, P_n) - \int_{[a_n, a_{n+1}]} f \big) \Big| + \Big| \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)|I_i \cap [a_q, c]| - \int_{[a_q, c]} f \Big| \\
&+ \Big| \int_{[a,c]} f - \ell \Big| \\
&\leq \sum_{n=0}^{q-1} 2^{-n}\varepsilon + 2^{-q}\varepsilon + \varepsilon,
\end{aligned} \tag{8}$$

(en utilisant le lemme d'Henstock pour majorer le terme du milieu).

Variante (ou corollaire). Soit $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$. Si f est intégrable sur tout segment $[c, d] \subset]a, b[$ et si $\ell = \lim_{c \to a^+, d \to b^-} \int_c^d f(t)\, dt$ existe, alors f est intégrable sur $[a, b]$ et $\int_a^b f(t)\, dt = \ell$.

N.B. La condition est nécessaire et suffisante, par propriété de restriction et continuité.

Corollaire 12.1 *Le "théorème fondamental" 4.1 reste vrai même si f n'est pas supposé dérivable à droite en a ni dérivable à gauche en b.*

Preuve. On se ramène au cas où f est dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b. Car, si ce n'est pas le cas, il suffit de remplacer I par $[a+h, b-k]$ avec $h, k > 0$ assez petits (l'intégrale a la propriété de restriction) ; or, on a prouvé (th. 4.1) que $\int_{a+h}^{b-k} f'(t)\,dt$ existe et vaut $f(b-k) - f(a+h)$. Passant à la limite $h, k \to 0$, vu la continuité de f sur I et le th. de Hake- Henstock (variante), on a le résultat voulu.

N.B. Avec la relation de Chasles, on déduit de ce corollaire que le théorème fondamental 4.1 reste valable si f est dérivable *sauf* en un nombre *fini* de points [12].

N.B. Le théorème de Hake- Henstock ne donne pas l'intégrabilité absolue sur $]a, b[$, même si f est absolument intégrable sur les $]a, c]$. Exemple : cf. l'exercice 8.2. Par contre :

Le cas des fonctions absolument intégrables :
Si on suppose que $\forall c$ t.q. $a < c < b$, f est absolument intégrable sur $[a, c]$ (resp. sur $[c, b]$), et que $\lim_{c \to b^-} \int_a^c |f(t)|\,dt$ existe (resp. que $\lim_{c \to a^+} \int_c^b |f(t)|\,dt$ existe), alors f est absolument intégrable sur $[a, b]$, $\ell = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(t)\,dt$ existe (resp. $\ell \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(t)\,dt$ existe), et on a $\int_a^b f(t)\,dt = \ell$ et $\int_a^b |f(t)|\,dt = \lim_{c \to b^-} \int_a^c |f(t)|\,dt$ (resp. $\int_a^b |f(t)|\,dt = \lim_{c \to a^+} \int_c^b |f(t)|\,dt$).

Preuve. C'est un corollaire trivial du théorème de Hake-Henstock. On peut d'ailleurs le déduire directement du théorème de convergence dominée, dans ce cas.

13 Mesures ; intégration sur autre chose que des pavés.

Intégrer sur des pavés, c'est bien, mais c'est loin de répondre aux besoins quotidiens : on voudrait pouvoir intégrer sur des sphères, des ellipsoïdes, des régions

12. En fait il reste valable même si l'ensemble des points où f n'est pas dérivable est dénombrable, mais ce résultat est assez anecdotique.

définies par des inéquations $\{x \in \mathbb{R}^d ;\ u(x) > 0\}$ ... En particulier, on aimerait pouvoir calculer des aires, des volumes ... : ce qui nous amène inévitablement à l'idée de mesure.
L'idée est très simple : si on veut intégrer une fonction f sur une région E de $\mathbb{R}^d$, on se place dans un pavé I qui contient E, et on remplace f par $f\mathbf{1}|_E$. Il y a deux choses à vérifier : le résultat est indépendant du pavé I choisi, et si E est un pavé, les deux définitions coïncident : $\int_E f = \int_I f\mathbf{1}|_E$, $\forall I$ pavé contenant E. On peut l'admettre, c'est assez plausible ! (Si on veut le prouver, il faut utiliser le fait que le bord d'un pavé est négligeable. On doit donc *commencer* par parler un peu de mesure).

On dit qu'une partie E de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{R}^d$) est **mesurable** si pour tout intervalle (ou pavé) borné I la fonction caractéristique $\mathbf{1}|_{E\cap I}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^d$). L'intégrale s'appelle alors la **mesure** de $E \cap I$. Si on prend $I_n = [-n, +n]$ $(n \geq 1)$ (resp. dans $\mathbb{R}^d$) la boule de centre 0 et de rayon n, les fonctions caractéristiques des $E \cap I_n$ forment une suite croissante qui converge vers la caractéristique de E. Donc, par convergence monotone, la caractéristique de E est intégrable (on dit : E est de mesure finie) *ssi* la suite des mesures des $E \cap I_n$ est convergente, et alors l'intégrale est la limite : on l'appelle la mesure de E. (On obtiendrait la même condition, et la même limite, avec n'importe quelle autre suite exhaustive de bornés mesurables de $\mathbb{R}$, comme le montre un simple *shuffling* des deux suites.) Si E n'est pas de mesure finie, on dit que la mesure de E est infinie.

La mesure est évidemment finiment additive, puisque l'intégrale et les fonctions caractéristiques le sont. Elle est **dénombrablement additive** par convergence monotone.

Tout intervalle (resp. pavé) est mesurable (et *la mesure d'un intervalle (resp. pavé) borné est sa longueur (resp. son volume)*, comme on le voit sur la définition de l'intégrale), donc aussi tout ouvert, par additivité dénombrable. Si E est mesurable, $\mathbb{R}^d \setminus E$ l'est aussi car la constante 1 est intégrable sur I_n et $\mathbf{1}|_{\mathbb{R}^d\setminus E} = 1-\mathbf{1}|_E$.

Ainsi, l'ensemble des parties mesurables de $\mathbb{R}^d$ contient les ouverts et est stable par union dénombrable et par passage au complémentaire : il contient donc la "tribu de Borel", qui est par définition la plus petite partie de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ayant ces propriétés (i.e. l'intersection de toutes celles qui l'ont).

On a défini une mesure dénombrablement additive sur une tribu contenant la tribu de Borel, qui coïncide avec la mesure de Borel sur les intervalles ouverts, donc sur toute la tribu de Borel : notre **mesure prolonge celle de Borel**.

On dit qu'une partie mesurable E est **négligeable** si sa mesure est nulle. **Toute partie d'un ensemble négligeable est mesurable, et négligeable** (car si $E \subset N$ avec N négligeable et si δ est une jauge ε-adaptée à $\mathbf{1}_{N\cap I_n}$, pour P δ-fine on a $0 \leq S(\mathbf{1}_{E\cap I_n}, P) \leq S(\mathbf{1}_{N\cap I_n}, P) \leq \varepsilon$). Donc notre mesure est **complète**. Comme la mesure de Lebesgue est la complétée de la mesure de Borel, notre tribu contient la tribu de Lebesgue et notre mesure prolonge la mesure de Lebesgue.

Comme on le voit, l'intégrale de Riemann complète fournit de façon parfaitement élémentaire une mesure qui est au moins aussi bonne que celle de Lebesgue (et qui la contient).
Dans un cours, on n'a même pas besoin de parler de tribu, de boréliens, etc. : je ne l'ai fait ici que pour vous convaincre que cette notion de mesure vaut au moins celle de Lebesgue.

En fait, les résultats des chapitres 5 et 8 de [1] prouvent que la tribu obtenue ici est *exactement* la tribu de Lebesgue (et donc la mesure ainsi définie est exactement celle de Lebesgue). De plus, une fonction mesurable est Lebesgue- intégrable *ssi* elle est absolument intégrable. (L'intégrale de Lebesgue est donc bien, en un sens, à l'intégrale de Riemann complète ce que les séries absolument convergentes sont aux séries convergentes : un cas particulier intéressant, et *rien de plus.*)

Je ne sais pas s'il existe des fonctions intégrables non mesurables. Mais ça n'a aucune importance pratique (jusqu'à preuve du contraire?) car on peut supposer sans contradiction que toutes les parties de $\mathbb{R}^d$ et (donc) toutes les fonctions sont mesurables (mais il faut renoncer pour cela à l'axiome du choix, en ne gardant que le choix dépendant : ça ne pose aucun problème, en tout cas, pour nos petits amis de DEUG) [13].

Définitions
On dit qu'une propriété a lieu **presque partout** (p.p.) sur une partie E de $\mathbb{R}^d$ si l'ensemble des points de E où elle n'a pas lieu est négligeable.

13. L'énoncé "$|f|$ intégrable $\Longrightarrow$ f intégrable" est vrai pour les fonctions mesurables. Il n'est pas vrai en général pour les fonctions non mesurables. Exemple : si f vaut 1 sur une partie E non mesurable de $[0, 1]$, et -1 sur $[0, 1] \setminus E$, $|f| = 1$ est intégrable sur $[0, 1]$, mais f ne l'est pas (sinon la fonction caractéristique de E, qui est $\frac{f+|f|}{2}$, le serait aussi, et donc serait Lebesgue intégrable). Mais on peut se placer dans un modèle de Zermelo- Fraenkel (ZF) où toutes les fonctions sont mesurables (par ex. le modèle de Solovay) : alors l'énoncé est encore vrai. Il est donc faux dans *certains* modèles de ZF, et vrai dans d'autres, i.e. il est formellement indécidable dans ZF, comme annoncé dans une note précédente.

Une application $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est dite **intégrable sur** $E \subset \mathbb{R}^d$ *ssi* $\mathbf{1}|_E f$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, et alors on note $\int_E f = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}|_E f$
Propriété Si $f = g$ p.p. sur E, et si f est intégrable sur E, g l'est aussi et $\int_E f = \int_E g$. En particulier, si $f = 0$ p.p. sur E, $\int_E f = \int_E |f| = 0$. Inversement, si $\int_E |f| = 0$, $f = 0$ p.p.

N.B. Ce n'est pas parce qu'une fonction f est intégrable sur une partie E qu'elle l'est sur toute sous-partie (même mesurable) de E.
Par exemple la fonction f de l'exercice 8.2, dont on a vu qu'elle est intégrable sur $[0, 1]$, ne l'est pas sur la partie mesurable $\cup_{k\geq 0}]\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}]$, à cause de la divergence de la série harmonique.
Par contre, cette **propriété de restriction généralisée** est vraie **pour les fonctions absolument intégrables** : par convergence dominée.

On munit l'espace vectoriel $\mathcal{L}^1(I)$ de sa semi-norme évidente : $\| f \|= \int_I |f|$. La semi-norme de f est nulle *ssi* f est nulle partout hors d'un ensemble négligeable ("nulle presque partout"). On obtient une norme en passant au quotient par la relation $f \sim g \Longleftrightarrow \| f - g \|= 0$, i.e. $f = g$ p.p. ; l'espace quotient normé se note $L^1(I)$ et s'appelle l'espace de Lebesgue sur I. C'est un Banach[14].

14 Intégrales multiples : problèmes spécifiques

Les problèmes spécifiques aux intégrales multiples sont les problèmes d'intégrations successives (Fubini), de changements de variables dans les intégrales multiples, et l'analogue du Théorème Fondamental (Stokes). Il y a aussi la généralisation du théorème de Hake-Henstock, qui passe très bien dimension supérieure, mais que je range quand même avec les "problèmes spécifiques aux intégrales multiples".

Pour le théorème de Fubini, on a l'énoncé le plus satisfaisant qu'on puisse raisonnablement espérer. Par contre, pour le TF et la formule de changement de variables (qui étaient valables dans $\mathbb{R}$ sous des hypothèses si générales), les énoncés qu'on trouve dans la littérature ne sont pas meilleurs que pour l'intégrale de Lebesgue : la formule de changement de variables est valable pour des intégrands

14. L'espace des fonctions intégrables (pas nécessairement absolument) sur $I = [a, b]$ peut être muni de même de la semi- norme $\| f \|= \sup_{a\leq x\leq b} | \int_a^x f(t)dt|$, le quotient donne un espace normé, qui n'est pas de Banach (il est de première catégorie de Baire), mais il est tonnelé, et toutes les propriétés utiles (Banach-Steinhaus, etc.) ont lieu.

absolument intégrables, i.e. L-intégrables, et c'est exactement le théorème de Lebesgue ; le théorème de Stokes s'énonce pour des chaînes et des formes C^1, donc là ce n'est pas mieux qu'avec l'intégrale de Riemann ou celle de Lebesgue. Je ne l'énoncerai donc même pas ici.

14.1 Le théorème de Fubini.

Dans le cadre de l'intégrale complète, il dit ceci :

Théorème 14.1
1. *Soient $I \in \mathbb{R}^m$, $K \in \mathbb{R}^p$ deux pavés et $f : I \times K \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. L'ensemble des $x \in I$ t.q. $K \ni y \mapsto f(x,y)$ n'est pas intégrable sur K est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^p$.*

2. *La fonction $I \ni x \mapsto \int_K f(x,y)dy$ (définie p.p., donc) est intégrable sur I, et*
$$\int_I \left(\int_K f(x,y)dy \right) = \int_{I\times K} f(x,y)dxdy.$$

On a bien entendu, en corollaire, le théorème de Fubini-Tonelli : si f est mesurable et dominée par une fonction $g : I \times K \to \mathbb{R}$ intégrable (i.e. $|f| \leq g$), alors f est absolument intégrable, et le théorème de Fubini s'applique.

Le théorème de Fubini dans le cadre de l'intégrale de Riemann complète est en principe plus général que son analogue Lebesguien, puisqu'il s'applique aussi bien aux intégrales qui, dans une théorie qui n'a pas la propriété de Cauchy (par exemple celles de Riemann et de Lebesgue) seraient considérées commes impropres semi- convergentes. Cela dit, dans la pratique c'est le théorème de Fubini-Tonelli qui sert le plus.

La démonstration du théorème de Fubini est assez longue. On la trouvera dans le livre de McLeod [1], ou dans celui de Mawhin [2]. On peut cependant donner une preuve (par convergence dominée pour Fubini, convergence monotone pour Fubini-Tonelli) pour les fonctions *continues* : il suffit de dire d'abord que toute fonction continue de $I \times K$ dans $\mathbb{R}_+$ est limite d'une suite croissante de fonctions en escalier (pour obtenir Fubini-Tonelli), et que toute fonction continue de $I \times K$ dans $\mathbb{R}$ est limite de fonctions en escalier qu'elle domine en valeur absolue (pour obtenir Fubini) ...

14.2 Le théorème de Hake-Henstock en dimension ≥ 2

Théorème 14.2 *Soient I un pavé de $\mathbb{R}^d$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f est intégrable sur tous les pavés compacts inclus dans l'intérieur $\overset{o}{I}$ de I, et qu'il existe ℓ t.q. pour toute suite $(I_n)_{n\geq 1}$ de pavés compacts $\subset \overset{o}{I}$, d'intérieurs disjoints deux à deux et t.q. $\cup_{n\geq 1} I_n = I$, on ait : $\int_{\cup_{1\leq n\leq N} I_n} f \to \ell$ quand $N \to \infty$. Alors f est intégrable sur I, et $\int_I f = \ell$.*

N.B. La réciproque est vraie aussi.

Preuve. Comme la preuve n'existe ni dans Mawhin [2] ni dans McLeod [1] (l'énoncé non plus, d'ailleurs), je la donne ici.
Je vais supposer I compact. Pour un pavé borné non compact le résultat en découle, puisque l'intégrale sur le bord de I est nulle. Pour un pavé non borné le résultat est encore vrai (avec une preuve presque identique).
La preuve est la même qu'en dimension 1, mais cette fois il faut remplacer par 0 tous les $f(x)$ avec x sur le bord du pavé I : cela ne change pas l'intégrabilité de f, ni la valeur de l'intégrale, puisque le bord de I est de mesure nulle.
On prend dans I une suite de pavés compacts $K_n \subset \overset{o}{I}$ d'intérieurs disjoints deux à deux, et dont la réunion est I. f est intégrable sur chaque K_n $(n \geq 0)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Prenons dans K_n une jauge δ_n, $2^{-n}\varepsilon$-adaptée à f.
D'abord, pour $x \in \overset{o}{K_n}$, prenons $\delta(x) > 0$ t.q. $\delta(x) \leq \delta_n(x)$ et que le pavé de centre x et dont tous les côtés sont $\delta(x)$ soit inclus dans $\overset{o}{K_n}$.
Si x est commun à plusieurs pavés K_{n_k}, mais à l'intérieur de I, prenons $\delta(x) > 0$ inférieur à tous les $\delta_{n_k}(x)$, et tel que le pavé de centre x et dont tous les côtés sont $\delta(x)$ soit inclus dans l'intérieur de la réunion des K_{n_k}.
Enfin, pour x sur le bord de I, on prend un $\delta(x) > 0$ comme suit :
Soit $E(\rho)$ le pavé des points de I dont la distance au bord de I est $\geq \rho$. Prenons $\alpha > 0$ assez petit pour que $\forall \rho \leq \alpha$, et pour tout E union finie de pavés compacts de $\overset{o}{I}$, d'intérieurs disjoints deux à deux, $E \supset E(\rho) \Longrightarrow \int_E f - \ell < \varepsilon$. Alors, pour x sur le bord de I, on prend $\delta(x) < \alpha$.

Cela définit une jauge sur I. Soit $P = \{(x_1, I_1), \ldots, (x_N, I_N)\}$ une s.p. δ-fine de I. On voit comme dans la preuve de la relation de Chasles que $\forall n$, $P_n = \{\big(x_i, I_i \cap K_n\big)\ , I_i \cap K_n \neq \emptyset\}_i$ est une s.p. δ_n-fine de K_n et que $S(f, P_n) = \sum_i f(x_i)|I_i \cap K_n|$.
Soit B l'ensemble des indices j t.q. I_j rencontre le bord de I. $\forall j \in B$, on a nécessairement x_j sur le bord de I, et la contribution de tous les $j \in B$ à $|S(f, P) - \ell|$ est donc nulle.

On conclut par les mêmes majorations qu'en dimension 1, i.e. en utilisant le fait que δ est $2^{-n}\varepsilon$-adaptée dans K_n (avec en plus le lemme d'Henstock, si ce qui reste de P_n quand on a enlevé les I_j, $j \in B$, n'est plus qu'une s.p. partielle de K_n), et le fait que $\cup_{j \notin B} I_j$ contient $E(\alpha)$; ce qui donne :

$$|S(f,P) - \ell| \leq \sum_{n \geq 0} 2^{-n}\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

N.B. Dans la preuve, on voit bien que c'est l'intégrale sur $\cup_{j \notin B} I_j$ qui doit être proche de ε : or ce n'est pas un pavé, en général.
La condition : $\int_{\cup_{1 \leq n \leq N} I_n} f \to \ell$ pour toute suite de pavés compacts d'intérieurs disjoints deux à deux tapissant I, ne peut pas être remplacée par la condition plus faible : $\int_{I_N} f \to \ell$ pour toute suite exhaustive de pavés compacts, comme le montre l'exemple suivant : $I = [0,1] \times [0,1]$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si } \dfrac{1}{4} < y \leq \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{1-x} & \text{si } \dfrac{1}{2} < y < \dfrac{3}{4} \\ 0 & \text{si } |y - \dfrac{1}{2}| \geq \dfrac{1}{4} \end{cases} \tag{9}$$

f est intégrable sur tout pavé compact $K \subset \overset{o}{I}$, car continue p.p. sur K. Si (K_n) est une suite exhaustive de pavés compacts de $\overset{o}{I}$, pour tout $\alpha \in]0, 1/2[$, il existe un rang à partir duquel $K_n \supset [\alpha, 1-\alpha] \times [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, et alors $\int_{K_n} f = 0$. Pourtant, f n'est pas intégrable sur I, car si elle l'était, par restriction elle le serait sur $[0,1] \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$: ce n'est pas le cas puisque $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx = +\infty$.

On remarque d'ailleurs que les hypothèses du théorème ne sont pas réalisées ici : au pavé $K_n = [\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] \times [\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$ $(n \geq 4)$, associons le pavé $L_n = [1-\frac{1}{n}, t_n] \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, avec t_n choisi de telle façon que $\int_{1-1/n}^{t_n} \frac{dx}{1-x} = 4$; quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $K_n \cup L_n \subset K_{n+1}$; on passe de $K_n \cup L_n$ à K_{n+1} puis à $K_{n+1} \cup L_{n+1}$ en y ajoutant des pavés compacts d'intérieurs disjoints deux à deux, $\sigma_{n,j}$ puis $\tau_{n,j}$. La suite formée de K_1, L_1 et de tous les $\sigma_{n,j}$, $\tau_{n,j}$ $(j \geq 0,\ n \geq 1)$ correspondant à notre sous-suite est une suite de pavés compacts $\subset \overset{o}{I}$, d'intérieurs disjoints deux à deux et dont la réunion est I ; pour une infinité de N la réunion des N premiers est de la forme K_n, et pour une infinité de N elle est de la forme $K_n \cup L_n$; or l'intégrale de f sur K_n est 0 alors que sur $K_n \cup L_n$ elle est égale à 1.

14.3 Le théorème de changement de variable

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, φ un C^1-difféo. de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, dont on note J_φ le déterminant jacobien ; soit enfin f une fonction définie p.p. sur une partie A de $\varphi(U)$. Alors, f est absolument intégrable sur A ssi $(f \circ \varphi)|J_\varphi|$ l'est sur $\varphi^{-1}(A)$, et dans ce cas on a :

$$\int_A f = \int_{\varphi^{-1}(A)} (f \circ \varphi)|J_\varphi|.$$

N.B. L'énoncé est valable en particulier en dimension 1. L'énoncé que j'ai donné plus haut en dimension 1 était différent, il reposait sur le TF qui n'a pas d'analogue vraiment satisfaisant en dimension supérieure à 1 (il y a eu des progrès récents, tels Pfeffer (1991), grâce à des variantes de l'intégrale de Riemann complète, mais l'histoire n'est pas terminée).

N.B. On pourrait *en principe* donner (en DEUG) une preuve pour le cas où la fonction f est *continue*, et intégrée sur un *compact*, comme cela est fait dans le livre de Mawhin [2]. Mais on n'en aura pas le temps ...

Références

[1] R. M. MacLEOD. *The generalized Riemann integral.* Math. Assoc. Amer., The Carus Mathematical Monographs 20, 1980.

[2] Jean MAWHIN. *Analyse (Fondements, techniques, évolution).* De Boek, 1992.