L'INTEGRALE DE LEBESGUE SUR UN INTERVALLE DE $\mathbb{R}$, TELLE QU'ELLE PEUT ETRE ENSEIGNEE EN LICENCE

Par Robert DEVILLE

1) Intégration des fonctions en escalier.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Nous dirons qu'une fonction $\psi : I \to \mathbb{R}$ est en escalier s'il existe des intervalles bornés $I_1, I_2, ..., I_n \subset I$ et $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ tel que $\psi = \sum_{k=1}^{n} c_k.\chi_{I_k}$.
On sait définir l'intégrale des fonctions en escalier par $\int_I \sum_{k=1}^{n} c_k.\chi_{I_k} = \sum_{k=1}^{n} m(I_k).c_k$, où, si I est un intervalle d'extrémités a, b, $m(I) = b - a \in [0, +\infty[$ désigne la longueur de I.

Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier :

1) L'intégrale de f ne dépend pas de la représentation choisie.
2) linéarité : Si f et g sont des fonctions en escalier et si α et β sont des réels, alors $\alpha f + \beta g$ est une fonction en escalier et $\int \alpha f + \beta g = \alpha \int f + \beta \int g$
3) positivité : Si f et g sont des fonctions en escalier à valeurs réelles et si $f \leq g$, alors $\int f \leq \int g$.
4) Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est en escalier, alors $|f| : \Omega \to \mathbb{R}^+$ est en escalier et $\left| \int f \right| \leq \int |f|$.

Une fonction f est dite intégrable si elle peut être “approchée” par une suite de fonctions en escalier et l'intégrale de f est alors la limite des intégrales des fonctions en escalier qui approchent f. On souhaite que l'intégrale ainsi définie ait les mêmes propriétés que l'intégrale des fonctions en escalier (linéarité, positivité...). De plus, Dans de nombreux problèmes, il est utile d'avoir des conditions, facile à vérifier, pour s'assurer que si (f_n) est une suite de fonctions intégrables vérifiant ces conditions, alors $\lim_{n\to\infty} f_n$ est intégrable et on peut intervertir limite et intégrale : $\int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\, dx$.
Voici une première définition possible de fonctions intégrables :

2) L'intégrale au sens de Riemann.

Définition 1 : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite Riemann-intégrable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi_\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ en escalier, des intervalles ouverts $I_1, I_2, ..., I_N$ et des reels $c_1, c_2, ..., c_N \geq 0$ tels que :

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \leq \sum_{n=1}^{N} c_n \chi_{I_n}(x) := \psi(x)$

2) $\int_I \psi(x)\, dx = \sum_{n=1}^{N} c_n . m(I_n) \leq \varepsilon$

Les c_n et les I_n dépendant bien sur aussi de ε. L'intégrale de f est alors définie par

$$\int_I f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_I \varphi_\varepsilon(x)dx$$

(bien entendu, il faut justifier que cette limite existe et qu'elle ne dépend pas de la suite de fonctions en escalier approchant f choisie). Le seul théorème de convergence, d'ailleurs facile à démontrer, dont on dispose dans le cadre de l'intégrale de Riemann, est le suivant:

Théorème 1 : *Si I est borné, si $f_1, ..., f_n ... : I \to \mathbb{R}$ sont Riemann-intégrable sur I et si f est limite uniforme de la suite (f_n) sur I, alors f est Riemann-intégrable sur I et*

$$\int_I f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_I f_n(x)\, dx$$

Ce théorème permet de montrer que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$, mais on a :

Exemple : Soit $f : [0, 1[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue croissante telle que

$$\lim_{x \to 1, x < 1} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 1, x < 1} \int_0^x f(t)\, dt < \infty$$

(par exemple, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$). Pour tout $x \in [0, 1[$, f est Riemann-intégrable sur $[0, x]$. Comme f est non bornée sur $[0, 1[$, f ne peut pas être Riemann-intégrable sur $[0, 1[$. Par conséquent, si on pose $f_n = f . \chi_{[0,1-1/n]}$, chacune des fonctions f_n est Riemann-intégrable, la suite (f_n) est croissante, $f = \lim_{n \to \infty} f_n$ et $\lim_{n \to \infty} \int f_n(x)\, dx < \infty$, mais f n'est pas Riemann-intégrable.

3) Définition de l'intégrale au sens de Lebesgue.

Définition 2 : Une fonction $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ est dite Lebesgue-intégrable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ en escalier, des intervalles $I_1, I_2, ..., I_n, ... \subset I$ et des reels $c_1, c_2, ..., c_n, ... \geq 0$ tels que :

1) Pour tout $x \in I$, $|f(x) - \varphi(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{I_n}(x) := \psi(x)$

2) $\int \psi(x)\, dx := \sum_{n=1}^{\infty} c_n.m(I_n) \ < \ \varepsilon$

Les c_n et les I_n dépendant bien sur aussi de ε. L'intégrale de f est alors définie par

$$\int_I f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_I \varphi_\varepsilon(x)dx$$

(bien entendu, il faut justifier que cette limite existe et qu'elle ne dépend pas de la suite de fonctions en escalier approchant f choisie). Par la suite nous dirons "intégrable" au lieu de "Lebesgue-intégrable".

Exemple 1 : Nous reprenons l'exemple décrit ci dessus : Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue croissante telle que

$$\lim_{x\to 1, x<1} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1, x<1} \int_0^x f(t)\, dt < \infty$$

Observons ce qui se passe sur ce exemple : Notons $I_n = \{x \in [0,1[;\ f(x) \in [n\varepsilon, (n+1)\varepsilon[\}$. Les I_n sont des intervalles contigus formant une partition de $[0,1[$, et pour tout p, $\bigcup_{p>n} I_n$ est un intervalle de la forme $[x_p, 1[$, où (x_p) est une suite croissante convergeant vers 1. Fixons $\varepsilon > 0$ et $p \geq 1$. On définit $\varphi_1 = \sum_{n=0}^{p} n\varepsilon.\chi_{I_n}$ et $\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\varepsilon.\chi_{I_n}$. φ_1 est en escalier sur $[0,1[$ et $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$. D'où, en posant $\varphi = \varphi_1$ et $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$:

1) Pour tout $x \in [0, 1/p]$, $|f(x) - \varphi(x)| \leq \psi = \varphi_2 - \varphi_1 = \varepsilon + \sum_{n>p} n\varepsilon.\chi_{I_n}$

Comme $\sum_{n>p} n\varepsilon.\chi_{I_n} \leq f$, on a $\sum_{n>p} n\varepsilon.m(I_n) = \int \sum_{n>p} n\varepsilon.\chi_{I_n} \leq \int_{[x_p,1[} f \to 0$ quand $p \to \infty$. Par conséquent, pour p assez grand,

2) $\int \psi = \varepsilon + \sum_{n>p} n\varepsilon.m(I_n) \leq 2\varepsilon$

Les conditions 1) et 2) montrent que f est Lebesgue intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exemple 2 : Nous reprenons l'exemple décrit ci dessus : Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^{+,*}$ une fonction décroissante telle que

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)\,dt < \infty$$

Cette fonction est bien Lebesgue intégrable sur $[0,+\infty[$ comme le montre un simple dessin.

Ce qui gène dans la définition de la Riemann-intégrabilité pour montrer que $f = \lim_{n\to\infty} f.\chi_{[0,x_n]}$ est intégrable (avec $x_n = 1-1/n$ dans le premier exemple et $x_n = n$ dans le deuxième exemple), c'est d'imposer à la fonction ψ d'être une combinaison linéaire **finie** d'indicatrices d'intervalles. Il ne peut donc pas exister de "bons" théorèmes de convergence dans la théorie de l'intégrale de Riemann. Le fait que ψ soit une combinaison linéaire **infinie** d'indicatrices d'intervalles dans la définition de Lebesgue-intégrabilité est une condition beaucoup plus naturelle qui permet d'obtenir les théorèmes de convergence suivants :

Théorème : (convergence monotone) *Soit (g_n) une suite croissante de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{R}$, et $g = \sup g_n$ (à priori, g est donc à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$). Alors g est intégrable sur I si et seulement si la suite $\left(\int g_n\right)$ est bornée, et dans ce cas, $\int_I g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_I g_n(x)\,dx$.*

Théorème : (convergence dominée) *Soient $f_1,...,f_n... : I\to\mathbb{R}$ des applications intégrables de I dans $\mathbb{R}$ telles que :*
a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in I$, $|f_n(x)|\le g(x)$, où $g : I\to\overline{\mathbb{R}}^+$ est intégrable.
b) pour tout $x\in I$, on a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
Alors f est intégrable et $\int_I f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)\,dx$

Dans la définition des fonctions Lebesgue intégrables, nous avons écrit un peu librement $\int\psi$. Cela demande une justification :

Définition : On note

$$\mathcal{J}^+ = \{\psi;\ \exists\, I_1, I_2, ..., I_n, ... \in \mathcal{C},\ \exists\, c_1, c_2, ..., c_n, ... \ge 0 \text{ tels que}$$
$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\chi_{I_n} \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} c_n.m(I_n) < +\infty\}$$

et, pour $\psi\in\mathcal{J}^+$, $\int\psi(x)\,dx = \sum c_n.m(I_n)$. $\int\psi(x)\,dx$ ne dépend pas de la facon d'écrire $\psi(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\chi_{I_n}$. Ceci provient du lemme suivant, que nous démontrerons en annexe :

Lemme sommatoire : *Soient* $I_1, I_2, ..., I_n, ..., J_1, J_2, ..., J_n, ...$ *des intervalles et* $a_1, a_2, ..., a_n, ..., b_1, b_2, ..., b_n, ...$ *des réels positifs tels que les séries* $\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n.m(I_n)\Big)$ *et* $\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n.m(J_n)\Big)$ *soient convergentes. Si pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_{I_n}(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n\chi_{J_n}(x)$, *alors* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n.m(I_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.m(J_n)$.

Grâce au lemme sommatoire, on peut aussi montrer les propriétés suivantes, ainsi que le théorème suivant :

- - Si $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{J}^+$, alors $\int \psi_1 + \psi_2 = \int \psi_1 + \int \psi_2$.
- - Plus généralement, si $\psi_1, ..., \psi_n, ... \in \mathcal{J}^+$ et si $\sum_{n=1}^{\infty} \int \psi_n < +\infty$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \in \mathcal{J}^+$ et $\int \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int \psi_n$.

Théorème : *Soit* $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ *intégrable, alors* $\int_I f(x)\,dx = S(f) = I(f)$, *avec :*

$$S(f) := \sup\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n.m(I_n);\ \text{les } a_n \text{ sont négatifs sauf un nombre fini, la série } \Big(\sum a_n.m(I_n)\Big) \text{ est convergente et } \sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_{I_n} \leq f\Big\}$$

$$I(f) := \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} b_n.m(J_n);\ \text{les } b_n \text{ sont positifs sauf un nombre fini, la série } \Big(\sum b_n.m(J_n)\Big) \text{ est convergente et } \sum_{n=1}^{\infty} b_n\chi_{J_n} \geq f\Big\}$$

4) Propriétés de l'intégrale.

1) linéarité : *Si* f *est intégrable et si* $\alpha \in \mathbb{R}$, *alors* αf *est intégrable et* $\int \alpha f = \alpha \int f$.
Si $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ *sont intégrables, alors* $f + g$ *est intégrable et* $\int f + g = \int f + \int g$.

Démonstration : Pour montrer que $f+g$ est intégrable, revenons à la définition. Comme f est intégrable, il existe $\varphi_{f,n} : \Omega \to \mathbb{R}$ en escalier et $\psi_{f,n} \in \mathcal{J}^+$, tels que $\|f - \varphi_{f,n}\| \leq \psi_f$ et $\int \psi_{f,n} \to 0$. Comme g est intégrable, il existe $\varphi_{g,n} : \Omega \to \mathbb{R}$ en escalier et $\psi_g \in \mathcal{J}^+$, tels que $\|g - \varphi_{g,n}\| \leq \psi_{g,n}$ et $\int \psi_{g,n} \to 0$. Par conséquent, $\|f+g-\varphi_{f,n}-\varphi_{g,n}\| \leq \psi_{f,n}+\psi_{g,n}$ et $\int \psi_{f,n}+\psi_{g,n} = \int \psi_{f,n} + \int \psi_{g,n} \to 0$ ce qui nous montre que $f+g$ est intégrable et que $\displaystyle\int f+g = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_{f,n}+\varphi_{g,n} = \lim_{n\to\infty}\int \varphi_{f,n} + \lim_{n\to\infty}\int \varphi_{g,n} = \int f + \int g$.

2) positivité : *Si f est intégrable et si $f \geq 0$, alors $\displaystyle\int f \geq 0$.*

Si f et g sont intégrables et si $f \leq g$, alors $\displaystyle\int f \leq \int g$.

Démonstration : Le premier point est démontré en annexe. Si f et g sont intégrables et si $f \leq g$, alors $g - f \geq 0$, donc $\displaystyle\int g-f \ \geq\ 0$, et, par linéarité, $\displaystyle\int f \leq \int g$.

3) Treillis : *Si $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ est intégrable, alors f^+ et f^- sont intégrables.*
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est intégrable, alors $|f|$ est intégrable et $\displaystyle\left|\int_I f(x)\,dx\right| \leq \int_I |f(x)|\,dx$.
Si $f,g : I \to \mathbb{R}$ sont intégrables, alors $\inf(f,g)$ et $\sup(f,g)$ sont intégrables.

Démonstration : Pour montrer que f^+ est intégrable, revenons à la définition. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme f est intégrable, il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ en escalier et $\psi \in \mathcal{J}^+$, tels que $|f - \varphi| \leq \psi$ et $\int \psi < \varepsilon$. Comme $|f^+ - \varphi^+| \leq |f-\varphi|$, $|f^- - \varphi^-| \leq |f-\varphi|$ et $\big||f|-|\varphi|\big| \leq |f-\varphi|$ on a aussi : $|f^+ - \varphi^+| \leq \psi$, $|f^- - \varphi^-| \leq \psi$ et $\big||f|-|\varphi|\big| \leq \psi$ par conséquent f^+, f^- et $|f|$ sont intégrables. De plus, si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, comme $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$, par linéarité de l'intégale, on a :

$$\left|\int f\right| = \left|\int f^+ - \int f^-\right| \leq \left|\int f^+\right| + \left|\int f^-\right| = \int f^+ + \int f^- = \int f^+ + f^- = \int |f|$$

Si f et g sont intégrables, alors $\sup(f,g) = (f-g)^+ + g$ et $\inf(f,g) = -\sup(-f,-g)$ sont intégrables.

4) Approximation : *i) Si $f : I \to \mathbb{R}$ est intégrable et $\varepsilon > 0$, il existe g en escalier tel que $\displaystyle\int |f-g| \ <\ \varepsilon$.*

ii) Si f est intégrable positive et si $\displaystyle\int f \ <\ \alpha$, alors il existe $\psi \in \mathcal{J}^+$ telle que $f \leq \psi$ et $\int \psi < \alpha$.

Démonstration : i) Si f est intégrable et $\varepsilon > 0$, il existe g en escalier tel que

$$|f-g| \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{I_n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n . m(I_n) \ <\ \varepsilon$$

Comme f et g sont intégrables, la fonction $|f-g|$ est intégrable, et, par définition de $I(|f-g|)$, $\int |f-g| < \varepsilon$.

ii) Fixons $0 < \varepsilon < \alpha - \displaystyle\int f$. Comme f est intégrable, il existe une fonction en escalier φ, et $\psi \in \mathcal{J}^+$ telles que $|f-\varphi| \leq \psi$ et $\int \psi < \varepsilon/2$. Comme $f \geq |\varphi| - \psi$, on a, par définition de $S(f)$, $\displaystyle\int |\varphi| - \int \psi \leq \int f$. La fonction $|\varphi| + \psi$ est dans $\mathcal{J}^+$, $0 \leq f \leq |\varphi| + \psi$ et $\int |\varphi| + \psi = \int |\varphi| + \int \psi \leq \int f + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \alpha$.

5) Intégrales et primitives.

Définition : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On appelle primitive de f une fonction F, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, qui vérifie $F' = f$ sur $]a,b[$.

Proposition : *(Intégrale et primitive) Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_{[a,x]} f$ est une primitive de f.*

Démonstration : Comme f est continue sur le compact $[a,b]$, il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq M$. Comme $|f.\chi_{[x,y]}| \leq M\chi_{[x,y]}$, en intégrant, $\displaystyle\Big|\int_{[a,y]} f - \int_{[a,x]} f\Big| = \Big|\int f.\chi_{[x,y]}\Big| \leq \int |f.\chi_{[x,y]}| \leq M|y-x|$. F est donc M-Lipschitzienne, donc continue sur $[a,b]$. De plus, pour $x \in]a,b[$ et h assez petit, $\displaystyle\Big|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\Big| = \Big|\frac{1}{h}\int_{[x,x+h]} \big(f(y)-f(x)\big)dy\Big| \leq \sup\Big\{|f(y)-f(x)|;\, |y-x| \leq |h|\Big\} \to 0$ quand $h \to 0$, ce qui démontre que F est dérivable en x et que $F'(x) = f(x)$.

Corollaire : *Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a,b]$. Alors*

$$\int_{[a,b]} u'(t)\, dt = u(b) - u(a)$$

Démonstration : En effet $\displaystyle\int_{[a,x]} u'(t)\, dt$ et $u(x) - u(a)$ sont deux primitives de u' qui s'annulent en a, donc elles coincident.

6) Les théorèmes de convergence.

Théorème : (Interversion série-intégrale) *Soit* (f_n) *une suite de fonctions intégrables de* I *dans* $\overline{\mathbb{R}}^+$*. Alors* $f = \sum f_n$ *est intégrable si et seulement si* $\sum \int f_n < \infty$ *et dans ce cas*

$$\int \sum_{n\geq 1} f_n = \sum_{n\geq 1} \int f_n$$

Démonstration : Si $\sum \int f_n = +\infty$, $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ne peut pas être intégrable sinon on aurait, pour tout n, $\infty > \int f \geq \int \sum_{k=1}^{n} f_k = \sum_{k=1}^{n} \int f_k \to \infty$, contradiction.

Si $\sum \int f_n < +\infty$, fixons $\varepsilon > 0$. Il existe N_1 tel que pour tout $N \geq N_1$, $\sum_{k=N+1}^{\infty} \int f_k < \varepsilon/2$. Fixons $\alpha_k > \int f_k$ tel que $\sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_k < \varepsilon/2$. Pour chaque k, comme f_k est intégrable et positive, il existe des fonctions $\psi_k \in \mathcal{J}^+$ telles que $f_k \leq \psi_k$ et $\int \psi_k < \alpha_k$. Comme $\sum_{k=1}^{N} f_k$ est intégrable, il existe φ en escalier et $\psi \in \mathcal{J}^+$ telles que $\left| \sum_{k=1}^{N} f_k - \varphi \right| \leq \psi$ et $\int \psi < \varepsilon/2$. On a donc :

$$|f - \varphi| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k + \left| \sum_{k=1}^{N} f_k - \varphi \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \psi_k + \psi$$

avec

$$\int_I \Big(\sum_{k=N+1}^{\infty} \psi_k + \psi \Big) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \int \psi_k + \int \psi \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_k + \varepsilon/2 \leq \varepsilon$$

La fonction f est donc intégrable et $\left| \int f - \int \varphi \right| \leq \varepsilon$. Comme on a aussi, par définition de $I\Big(\Big| \sum_{k=1}^{N} f_k - \varphi \Big|\Big)$,

$$\Big| \int \varphi - \int \sum_{k=1}^{N} f_k \Big| \leq \int |\varphi - \sum_{k=1}^{N} f_k| \leq \int \psi \leq \varepsilon$$

on en déduit que $\left| \int f - \int \sum_{k=1}^{N} f_k \right| \leq 2\varepsilon$. Par linéarité de l'intégrale on a $\int \sum_{k=1}^{N} f_k = \sum_{k=1}^{N} \int f_k$. On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_1 tel que pour tout $N \geq N_1$, $\left| \int \sum_{k=1}^{\infty} f_k - \sum_{k=1}^{N} \int f_k \right| \leq 2\varepsilon$. A la limite, $\int \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k$.

Théorème : (convergence monotone) *Soit* (g_n) *une suite croissante de fonctions intégrables de* I *dans* $\mathbb{R}$*, et* $g = \sup g_n$*. Alors* g *est intégrable si et seulement si la suite* $\Big(\int g_n \Big)$ *est bornée, et dans ce cas,* $\displaystyle\int_I g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_I g_n(x)\,dx.$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème d'interversion série-intégrale aux fonctions positives intégrables $f_n = g_n - g_{n-1}$ $(n \geq 1)$, avec $f_0 = g_0$.

Théorème : (convergence monotone pour les suites décroissantes) *Soit* (h_n) *une suite décroissante de fonctions intégrables de* I *dans* $\mathbb{R}^+$ *et* $h = \inf h_n$*. Alors* h *est intégrable et* $\displaystyle\int_I h = \lim_{n\to\infty} \int_I h_n$.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème de convergence monotone aux fonctions intégrables $g_n = -h_n$ $(n \geq 0)$ et de noter que la suite $\left(\int g_n\right)$ est bornée puisque incluse dans $[-\int h_0, 0]$.

Proposition : *Soient* $g : I \to \overline{\mathbb{R}}^+$ *et* $f_1, ..., f_n...$ *des applications intégrables de* I *dans* $\mathbb{R}$ *telles que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $x \in I$, $|f_n(x)| \leq g(x)$*. Alors* $\inf f_n$ *et* $\sup f_n$ *sont intégrables.*

Démonstration : On sait qu'un sup fini et qu'un inf fini de fonctions intégrables est intégrable. Les fonctions $g + \inf\limits_{p\leq n} f_p$ et $g + \sup\limits_{p\leq n} f_p$ sont donc intégrables et comme $0 \leq g + \inf\limits_{p\leq n} f_p \leq g + \sup\limits_{p\leq n} f_p \leq 2g$, les intégrales de ces fonctions sont incluses dans $[0, 2\int g]$. Il suffit ensuite d'appliquer le théorème de convergence monotone aux suites monotones de fonctions positives $\left(g + \inf\limits_{p\leq n} f_p\right)$ et $\left(g + \sup\limits_{p\leq n} f_p\right)$ pour voir que $\inf f_n$ et $\sup f_n$ sont intégrables. (f_n)

Théorème : (convergence dominée) *Soient* $f_1, ..., f_n... : I \to \mathbb{R}$ *des applications intégrables de* I *dans* $\mathbb{R}$ *telles que :*
a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $x \in I$, $|f_n(x)| \leq g(x)$*, où* $g : I \to \overline{\mathbb{R}}^+$ *est intégrable.*
b) pour tout $x \in I$*, on a* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
Alors f *est intégrable et* $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$

Démonstration : Posons, pour $x \in I$,

$$w_n(x) = \sup_{p,q\geq n} |f_p(x) - f_q(x)|$$

Comme $w_n \leq 2g$, et que pour tout p, q, $|f_p - f_q|$ est intégrable, d'après la proposition précédente, w_n est intégrable. Comme pour tout x, on a $w_n(x) \downarrow 0$ et que $w_n \leq 2g$, d'après le théorème de convergence monotone pour les suites décroissantes, on a $\int w_n \to 0$.

Vérifions que f est intégrable. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $\int w_n \to 0$, il existe n tel que $\int w_n < \varepsilon/2$. Il existe donc $\psi_1 \in \mathcal{J}^+$ tel que $w_n \leq \psi_1$ et $\int \psi_1 < \varepsilon/2$. Comme f_n est intégrable, il existe une fonction en escalier $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $\psi_2 \in \mathcal{J}^+$ telles que $|f_n - \varphi| \leq \psi_2$ et $\int \psi_2 \leq \varepsilon/2$. Par conséquent,

$$|f - \varphi| \leq |f - f_n| + |f_n - \varphi| \leq w_n + \psi_2 \leq \psi_1 + \psi_2$$

et $\int \psi_1 + \psi_2 < \varepsilon$, ce qui démontre que f est intégrable. Par conséquent, $|f_n - f|$ est aussi intégrable.

Comme $|f_n(x) - f(x)| \leq w_n(x)$, on a $\displaystyle\int |f_n - f| \leq \int w_n$ et donc $\displaystyle\int |f_n - f| \to 0$.
Comme $\displaystyle\left|\int f_n - \int f\right| \leq \int |f_n - f|$ on en déduit $\displaystyle\int f_n \to \int f_n$.

Contre-exemple : Soit $f_n = \dfrac{1}{n}\chi_{[0,n]}$. On a, pour tout n, $\displaystyle\int f_n = 1$, par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f_n = 1$. D'autre part, pour tout x, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, (on a même convergence uniforme de (f_n) vers 0 sur $\mathbb{R}$) et donc

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

Dans cet exemple l'hypothèse de domination "il existe $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ intégrable telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$" n'est pas satisfaite.

Exercice : la mesure de Lebesgue. Dans notre approche nous n'avons pas utilisé la mesure de Lebesgue. En fait, on peut utiliser le théorèmes de convergence que nous avons montré directement pour construire la mesure de Lebesgue.

On dit que $A \subset \mathbb{R}$ est mesurable si pour tout n, la fonction $\chi_{A\cap[-n,n]}$ est intégrable. On pose alors $\mu(A) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \int \chi_{A\cap[-n,n]} \in [0, \infty]$

a) Montrer que tout intervalle est mesurable.

b) Montrer que si pour tout k, A_k est mesurable et $A_k \subset A_{k+1}$, alors $\cup A_k$ est mesurable (appliquer le théorème de convergence monotone).

c) Montrer que la réunion de deux ensembles mesurables est mesurable (utiliser le fait que $\chi_{A\cup B} = \sup\{\chi_A, \chi_B\}$). En déduire que la réunion d'un nombre fini d'ensembles mesurables est mesurable, puis que la réunion d'un nombre dénombrable d'ensembles mesurable est mesurable.

d) En utilisant le fait que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints, montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est mesurable.

e) Montrer que si A est mesurable, alors ${}^cA$ est mesurable. En déduire que tout fermé est mesurable.

f) On dit qu'un ensemble A est négligeable s'il est mesurable et si $\mu(A) = 0$. Montrer que tout ensemble dénombrable est négligeable. Montrer que si A est négligeable et si $B \subset A$ alors B est négligeable.

II - EXEMPLES DE FONCTIONS INTEGRABLES

1) Fonctions continues sur un intervalle compact.

Puisque les fonctions continues sur un intervalle compact sont intégrables, elles sont à fortiori Lebesgue-intégrables. Pour démontrer qu'une fonction continue définie sur un intervalle compact est Lebesgue intégrable, on peut aussi procéder directement, en utilisant le théorème de convergence dominée.

Théorème : *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est intégrable.*
De plus, si pour tout n, on se donne une subdivision $a = x_{n,0} < x_{n,1} < ... < x_{n,k} < ... < x_{n,k_n} = b$ de $[a,b]$ dont le pas $h_n = \sup\limits_{1\le k\le k_n} \left\{x_{n,k} - x_{n,k-1}\right\}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et si, pour tout n,k on choisit $y_{n,k} \in [x_{n,k-1}, x_{n,k}]$, alors

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n_k} (x_{n,k} - x_{n,k-1}).f(y_{n,k})$$

En particulier $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(a + k\frac{b--a}{n}\Big)$.

Démonstration : Posons

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} f(y_{n,k}).\chi_{[x_{n,k},x_{n,k+1}[} + f(b)\chi_{\{b\}}$$

Notons $M = \|f\|_\infty$ et $g = M.\chi_{[a,b]}$. Pour tout n, $\|f_n\| \le g$, g est intégrable et pour tout $x \in [a,b]$, $f_n(x) \to f(x)$. D'après le théorème de convergence dominée, f est intégrable et:

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n_k} (x_{n,k} - x_{n,k-1}).f(y_{n,k})$$

Exemple : Calcul de $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k/n)^2+1}$. Sous cette forme, on reconnait la somme de Riemann de la fonction $x \to \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $[0,1]$. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \big[\arctan x\big]_0^1 = \pi/4$$

2) Intégration sur des intervalles non compacts.

Proposition : *Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a, +\infty]$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}^+$ une fonction telle que pour tout $c \in]a, b[$, f est intégrable sur $[a, c]$. Si $\lim\limits_{c \to b, c<b} \int_{[a,c]} f(t)\, dt < +\infty$, alors f est intégrable sur $[a, b[$ et $\int_{[a,b[} f(t)\, dt = \lim\limits_{c \to b, c<b} \int_{[a,c]} f(t)\, dt$.*

Démonstration : Soit (c_n) une suite strictement croissante de réels convergeant vers b. La fonction $f.\chi_{[a,c_n]}$ est intégrable. La suite de fonctions $(f.\chi_{[a,c_n]})$ est croissante, $\left(\int_{[a,b[} f.\chi_{[a,c_n]}\right)$ est bornée, donc d'après le théorème de convergence monotone, f est intégrable sur $[a, b[$ et $\int_{[a,b[} f(t)\, dt = \lim\limits_{n \to \infty} \int_{[a,c_n]} f(t)\, dt$.

Exemple : *i) Si $a > 0$, la fonction $\dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.*
ii) Si I est un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et si b est une extrémité de I, la fonction $\dfrac{1}{|x-b|^\alpha}$ est intégrable sur I si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration : i) En effet, la fonction $\dfrac{1}{x^\alpha}$ étant continue, elle est intégrable sur tout intervalle $[a, c]$ avec $a < c < +\infty$. D'après la relation entre primitive et intégrale,

$$\text{si} \quad \alpha \neq 1, \quad \int_{[a,c]} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1-\alpha}{c^{\alpha-1}} - \frac{1-\alpha}{a^{\alpha-1}} \qquad \text{et, si} \quad \alpha = 1, \quad \int_{[a,c]} \frac{dx}{x} = \ln(c) - \ln(a)$$

$\int_{[a,c]} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ reste donc borné si et seulement si $\alpha > 1$, et on conclut en appliquant l'application donnée à la suite du théorème de convergence monotone. La démonstration de ii) est analogue.

Comparaison série-intégrale : *Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ décroissante. f est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si la série $\left(\sum f(n)\right)$ converge.*

Démonstration : Pour tout n, f est décroissante, donc intégrable sur $[n, n+1]$. D'après le Théorème d'interversion série-intégrale, $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f.\chi_{[n,n+1[}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si la série $\left(\sum \int_{[0,+\infty[} f.\chi_{[n,n+1[}\right)$ converge. D'autre part, pour tout $t \in$

$[n, n+1[$, $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$, d'où, en intégrant et en utilisant la positivité de l'intégrale, $f(n+1) \leq \int_{[n,n+1[} f(t)\,dt = \int_{[0,+\infty[} f.\chi_{[n,n+1[} \leq f(n)$. Par conséquent, la série $\left(\sum \int_{[0,+\infty[} f.\chi_{[n,n+1[}\right)$ converge si et seulement si la série $\left(\sum f(n)\right)$ converge, d'où le résultat.

Exemple : Soit $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. La série $\left(\sum u_n\right)$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$, et cette dernière intégrale converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Cas des fonctions de signe quelconque

Proposition : Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et si $|f| \leq g$ avec g intégrable, alors f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : En effet, les fonctions $g_n = f_{|[-n,n]}$ sont intégrables, et donc les fonctions $f_n = f.\chi_{[-n,n]}$ sont intégrables, et $|f_n| \leq g$. Le résultat se déduit donc du théorème de convergence dominée.

Exemple : La fonction $x \to \dfrac{\sin x}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car $\dfrac{\sin x}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ et $x \to \dfrac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

3) Exercices.

1) **Interversion série-intégrale.** Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ définie par $f_n(x) = x^{2n}(1-x)$. Vérifier que $\sum \int_{[0,1]} f_n = \sum \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2}$ converge. En déduire que la fonction $f = \sum f_n$ est intégrable et que $\ln(2) = \int_{[0,1]} \dfrac{dx}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2}$.

2) **Comparaison série-intégrale : La constante γ.**
a) Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ une fonction décroissante.
On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(t)dt$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et à termes positifs. En déduire que la suite (u_n) est convergente. Montrer que si $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$, alors $0 \leq u_n - \ell \leq f(n)$.

b) Application : montrer que la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ converge vers un reel noté γ, et que $\gamma \in [0,1]$. Montrer que $0 \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{n}$.

3) **Interversion série-intégrale.** Construire une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, intégrable au sens de Lebesgue et telle que pour tout n et pour tout intervalle I, il existe un intervalle $J \subset I$ non réduit à un point tel que pour tout $x \in J$, $f(x) > n$. (Indication : considerer une suite dense (x_n) dans $\mathbb{R}$ et poser $f = \sum_{n=1}^{\infty} n.\chi_{[x_n - 1/2^n, x_n + 1/2^n]}$.)

4) **Application du théorème de convergence dominée.** Posons $f_n(x) = \sin(nx)$. Le but de cet exercice est de montrer que la suite (f_n) n'a pas de sous-suite simplement convergente sur $[0, 2\pi]$.
Supposons qu'il existe f et (n_k) tel que $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$. Montrer que la fonction f^2 est intégrable sur $[0, 2\pi]$ que $\int_{[0,2\pi]} f^2 = \lim_{k\to\infty} \int_{[0,2\pi]} f_{n_k}^2$ et que $\int_{[0,2\pi]} f^2 = \lim_{k\to\infty} \int_{[0,2\pi]} f_{n_k}.f_{n_{k+1}}$, Calculer ces deux limites et en déduire une contradiction.

5) **Intégrales impropres.** Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application telle que pour tout $x \in [a, +\infty[$, f est intégrable sur $[a, x]$.
a) Montrer que si $\lim_{x\to\infty} \int_{[a,x]} |f(t)|\, dt < +\infty$ existe, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$, $\lim_{x\to\infty} \int_{[a,x]} f(t)\, dt$ existe, et est égal à $\int_{[a,+\infty[} f(t)\, dt$ (appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $f_n = f.\chi_{[a,x_n]}$, où (x_n) est une suite tendant vers $+\infty$).
b) On suppose que $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et que $f(0) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} \int_{[0,x]} f(t)\, dt$ existe, bien que la fonction f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

4) Intégrales dépendant d'un paramêtre.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient I et J deux intervalles et $f : I \times J \to \mathbb{K}$. Soit $F : J \to \mathbb{K}$ l'application définie par

$$F(x) = \int_I f(t, x)\, dt \tag{1}$$

Pour que F soit définie, il faut bien sûr supposer que pour tout $x \in J$, l'application $t \to f(t, x)$ est intégrable. Nous allons essayer de répondre aux problèmes suivants :

- - Si $x \to f(t,x)$ est continue, est ce que F est continue?

- - Si $x \to f(t,x)$ est dérivable, est ce que F est dérivable?

Théorème de continuité : *Soient I et J deux intervalles et $f : I \times J \to \mathbb{K}$. On suppose :*

a) Pour tout $t \in I$, la fonction $x \to f(t,x)$ est continue en x_0,
b) Pour tout $x \in X$, la fonction $t \to f(t,x)$ est intégrable,
c) Il existe $g : I \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que pour tout $x \in X$ et pour tout $t \in I$, $|f(t,x)| \leq g(t)$.

Alors la fonction F définie par (1) est continue en x_0.

Démonstration : Il suffit de montrer que si (x_n) est une suite de points de X qui converge vers x_0, alors $F(x_n)$ converge vers $F(x_0)$. Posons $f_n(t) = f(t, x_n)$. D'après a), pour tout t, la suite $(f_n(t))$ converge vers $f_0(t) = f(t, x_0)$. D'après b) les fonctions f_n sont intégrables et d'après c), pour tout n, $|f_n(t)| \leq g(t)$. Le théorème de convergence dominée permet de montrer que $F(x_n) = \displaystyle\int f_n(t)\,dt$ converge vers $F(x_0) = \displaystyle\int f_0(t)\,dt$.

Contre exemple : Posons $F(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} tx^2 \exp(-tx)\,dt$. On a

$$F(0) = 0 \neq 1 = \lim_{x \to 0, x > 0} F(x)$$

Pourtant la fonction $x \to tx^2 \exp(-tx)$ est continue, et pour tout $x \geq 0$, la fonction $t \to f(t,x)$ est intégrable. Cet exemple montre la nécéssité de l'hypothèse de domination c).

Théorème de dérivabilité : *Soient I et J des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $f : I \times J \to \mathbb{K}$. On suppose :*

a) Pour tout $t \in I$, la fonction $x \to f(t,x)$ est dérivable sur J,
b) Pour tout $x \in J$, lafonction $t \to f(t,x)$ est intégrable sur I,
c) Il existe $g : I \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que pour tout $x \in J$ et pour tout $t \in I$, $|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)| \leq g(t)$.

Alors la fonction F définie par (1) est dérivable sur I et, pout tout $x \in I$,

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$$

Démonstration : Tout d'abord F est bien définie grâce à la condition b). Fixons $x_0 \in I$. Il existe $\delta > 0$ tel que $K = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I$. Soit (h_n) tel que pour tout n, $x_0 + h_n \in K$. Posons :

$$g_n(t) = \frac{1}{h_n}\big(f(t, x_0 + h_n) - f(t, x_0)\big)$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, $|g_n(t)| \leq \sup_{x \in K} |\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)| \leq g(t)$. D'autre part, $\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$. D'après le théorème de convergence dominée, $t \to \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est intégrable et $\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)d\mu(t) = \lim_{n\to\infty} \int_I g_n(t)d\mu(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(x_0+h_n)-F(x_0)}{h_n}$. Ceci étant vrai pour toute suite (h_n) tendant vers 0, on en déduit que F est dérivable en x_0 et que $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)d\mu(t)$.

Exemple : Soit f continue par morceaux, intégrable sur $\mathbb{R}$. Posons

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\exp(itx)\,dt$$

Alors $\widehat{f}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^N$. En effet, la fonction $x \to f(t)\exp(itx)$ est continue par morceaux, $t \to f(t)\exp(it.x)$ est continue par morceaux et $|f(t)\exp(itx)| \leq |f(t)|$ avec $|f|$ intégrable, les hypothèses du corollaire sont donc satisfaites. $\widehat{f}$ est donc continue et $|\widehat{f}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)\exp(itx)|\,dt = \|f\|_1$.

Soit maintenant la fonction f définie par $f(t) = \exp(-t^2/2)$: f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, donc, d'après ce qui précède, $\widehat{f}$ est continue. Nous allons calculer $\big(\widehat{f}\big)'$, puis déterminer explicitement $\widehat{f}$. Montrons que $\widehat{f}$ est dérivable : En effet, la fonction $x \to f(t)\exp(it.x)$ est dérivable, $t \to f(t)\exp(it.x)$ est intégrable et $\left|\frac{\partial}{\partial x}\Big(f(t)\exp(it.x)\Big)\right| \leq t\exp(-t^2/2)$ qui est intégrable, les hypothèses du théorème sont donc satisfaites. $\widehat{f}$ est donc dérivable et

$$\big(\widehat{f}\big)'(x) = \int it.\exp(-t^2/2)\exp(-it.x)\,dt$$

En intégrant par parties, (on dérive $\exp(it.x)$ et on intègre $t.\exp(-t^2/2)$), on obtient :

$$\big(\widehat{f}\big)'(x) = i\int \exp(-t^2/2)ix.\exp(it.x)\,dt = x\widehat{f}(x)$$

La fonction $\widehat{f}$ satisfait donc l'équation différentielle $y' = -xy$, dont la solution générale est $y(x) = C\exp(-x^2/2)$, d'où $\widehat{f}(x) = \widehat{f}(0)\exp(-x^2/2)$, avec $\widehat{f}(0) = \int \exp(-t^2/2)dt = \sqrt{2\pi}$.

Lemme : *Soient* $I_1, I_2, ..., I_n, ..., J_1, J_2, ..., J_n, ...$ *des intervalles (resp. des pavés) et* $a_1, a_2, ..., a_n, ..., b_1, b_2, ..., b_n, ...$ *des réels positifs tels que les séries* $\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n.m(I_n)\Big)$ *et* $\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n.m(J_n)\Big)$ *soient convergentes. Si pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_{I_n}(x) \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n\chi_{J_n}(x)$, *alors* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n.m(I_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n.m(J_n)$.

Démonstration : Fixons $0 < \varepsilon < 1$. Il existe N_1 tel que

$$\sum_{n=1}^{N_1} a_n.m(I_n) > \sum_{n=1}^{\infty} a_n.m(I_n) - \varepsilon$$

Pour $k = 1, 2, ..., N_1$, il existe des pavés compacts $I'_k \subset I_k$ tels qu'on ait encore $\sum_{n=1}^{N_1} a_n.m(I'_k) > \sum_{n=1}^{\infty} a_n.m(I_n) - \varepsilon$. L'ensemble $K = \bigcup_{k=1}^{N_1} I'_k$ est compact comme réunion deN_1 pavés compacts. D'autre part, il existe des pavés ouverts $J'_n \supset J_n$ tels que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n.m(J'_n) < \sum_{n=1}^{\infty} b_n.m(J_n) + \varepsilon$ (choisir $J'_n \supset J_n$ tel que $b_n.m(J'_n) < b_n.m(J_n) + \varepsilon/2^n$). Posons

$$U_n = \Big\{x \in K;\ (1-\varepsilon)\sum_{k=1}^{N_1} a_k\chi_{I'_k}(x) \le \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell\chi_{J'_\ell}(x)\ \Big\}$$

(U_n) est une suite croissante d'ouverts de K et $K = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_n$. Par compacité de K, il existe N_2 tel que $K \subset U_{N_2}$. On a donc :

$$\forall x \in K \qquad (1-\varepsilon)\sum_{k=1}^{N_1} a_k\chi_{I'_k}(x) \le \sum_{\ell=1}^{N_2} b_\ell\chi_{J'_\ell}(x)$$

Par positivité de l'intégrale pour les fonctions en escalier :

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=1}^{N_1} a_k.m(I'_k) \le \sum_{\ell=1}^{N_2} b_\ell.m(J'_\ell) \le \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell.m(J'_\ell)$$

Par conséquent

$$(1-\varepsilon)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n.m(I_n) - \varepsilon\Big) \le \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell.m(J_\ell) + \varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit l'inégalité du lemme.

Théorème : *Soit* $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ *intégrable, alors* $S(f) = I(f)$ *(nous noterons* $\int_I f(x)\,dx$ *cette valeur commune), avec :*

$$S(f) := \sup\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n.m(I_n);\ \textit{les } a_n \textit{ sont négatifs sauf un nombre fini, la série } \big(\sum a_n.m(I_n)\big) \textit{ est convergente et } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{I_n} \leq f \Big\}$$

$$I(f) := \inf\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n.m(J_n);\ \textit{les } b_n \textit{ sont positifs sauf un nombre fini, la série } \big(\sum b_n.m(J_n)\big) \textit{ est convergente et } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_{J_n} \geq f \Big\}$$

De plus, si $\varepsilon > 0$, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *en escalier,* $c_n \geq 0$ *et* I_n *des intervalles et si :*

$$\varphi - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{I_n} \leq f \leq \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{I_n} \qquad \textit{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n.m(I_n) < \varepsilon$$

alors $\Big| \int \varphi - \int f \Big| \leq \varepsilon$.

Démonstration : En utilisant la définition de $I(f)$ et $S(f)$, on a :

$$(1) \qquad I(f) \leq \int \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} c_n.m(I_n) \leq \int \varphi - \sum_{n=1}^{\infty} c_n.m(I_n) + 2\varepsilon \leq S(f) + 2\varepsilon$$

Ceci étant vérifié pour tout $\varepsilon > 0$, on a $I(f) \leq S(f)$.

D'autre part, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{I_n} \leq f \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_{J_n}$, alors,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \chi_{I_n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- \chi_{J_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ \chi_{J_n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \chi_{I_n}$$

où, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose $\alpha^+ = \sup\{\alpha, 0\}$ et $\alpha^- = \sup\{-\alpha, 0\}$. D'après le lemme,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ m(I_n) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- m(J_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ m(J_n) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- m(I_n)$$

Par conséquent, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n.m(I_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.m(J_n)$. En prenant le sup dans le premier membre et l'inf dans le deuxième membre, $S(f) \leq I(f)$, et donc $I(f) = S(f)$. De plus, (1) montre que $\left| \int \varphi - \int f \right| \leq \varepsilon$.

Positivité de l'intégrale : *Si f est intégrable et si $f \geq 0$, alors* $\int f \geq 0$.

Démonstration : Si f est intégrable et $f \geq 0$, $\int f = I(f)$ est un inf de quantités positives (car si les b_n sont positifs sauf un nombre fini, si $\left(\sum b_n.m(J_n)\right)$ est convergente et si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_{J_n} \geq f \geq 0$, alors d'après le lemme, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+.m(J_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} b_n^-.m(J_n)$, et donc $\sum_{n=1}^{\infty} b_n.m(J_n) \geq 0$).

Remarque : Toute la théorie de l'intégrale de Lebesgue des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ se généralise sans difficulté aux fonctions définies sur $\mathbb{R}^N$, et les démonstration sont identiques.

Note bibliographique : Cette présentation se trouve dans les notes de cours de “mesure et intégration” que j'ai délivré à l'université de Bordeaux durant l'année scolaire 1997-98. Ces notes ont fait l'objet d'un polycopié disponible à l'imprimerie de l'U. F. R. de Math-info. de l'université de Bordeaux I. Les notes présentées ci-dessus constituent dans ce polycopié une introduction “concrète” à l'intégrale de Lebesgue, et sont suivies de l'intégrale de Lebesgue “abstraite”, qui elle est basée sur la théorie de la mesure et qui se trouve traitée dans de nombreux livres d'intégration de Licence.