Histoire ancienne de l'intégration
(Jusqu'à Darboux)

Christian Drouin
Professeur au Lycée de Pauillac, Gironde

Juin 1998

Voici un passage en revue rapide de l'Histoire de l'Intégration qui s'arrête à Riemann et Darboux. Je me contente de rappeler rapidement des choses connues, et ne prétends nullement à l'originalité. Cet historique sommaire a pour seul but de situer les lignes directrices de la "pensée intégrale", avant que nous discutions de notre enseignement actuel.

1 L'origine des problèmes de type "intégration"

On trouve principalement ces problèmes chez les Grecs; ils sont évidemment d'origine GÉOMÉTRIQUE: Il s'agit de calculs d'aires, de volumes, de longueurs (rectifications), de centres de gravité, de moments.

Faisons une première remarque. L'intégration précède de beaucoup la dérivation, et, historiquement, dans une première époque, l'intégrale se développe totalement indépendamment de toute considération de primitive.

Les ancêtres grecs du calcul intégral sont peu nombreux: On peut les résumer à EUDOXE et ARCHIMÈDE. On attribue à Eudoxe, repris par Euclide, la détermination des volumes du cône et de la pyramide. Le travail d'Archimède est bien plus important: Citons entre autres l'Aire du "segment" de parabole, délimité par celle-ci et une de ses cordes, le rapport entre aire et périmètre du cercle, le volume et l'aire de la sphère, le volume du secteur sphérique, la détermination du centre de gravité d'une surface triangulaire.

2 Les concepts mis en œuvre dans cette "préhistoire" du calcul intégral.

2.1 Les paradoxes dûs à la sommation.

Ces concepts sont présents dès la lointaine origine de l'Analyse, dans cette préhistoire où les mathématiques se rencontrent avec la philosophie, par exemple chez **Zénon d'Élée** (environ: de -480 à -420).

Les paradoxes de Zénon, si célèbres, tentent de réfuter le concept d'infiniment petit, d'indivisible (vu comme un "atome d'espace"), et amorcent une réflexion profonde sur l'infiniment petit ou la limite nulle, mais aussi sur le concept de *sommation.*

Cette *sommation*, Zénon, d'après Simplicius, l'applique de façon élémentaire à un exemple concret, celui des *grains de millet*:
Le bruit que fait en tombant le millet contenu dans un sac n'est que la *somme* des bruits de *tous* les grains de millet individuels. Si donc les dix mille grains font du bruit en tombant, c'est qu'un grain, contrairement aux apparences, produit lui aussi un son non négligeable.
Ce type de raisonnements conduit à des *absurdités* si le nombre d'éléments, d' *"atomes"* est infini. Un segment borné est composé de points. Alors de deux choses l'une: Ou ces points ont une longueur nulle; mais alors, on aura beau en ajouter, la longueur résultante sera encore nulle, et la longueur du segment serait, dans cette hypothèse, nulle elle aussi, ce qui est absurde. La seconde possibilité est la suivante: Un point a une longueur non-nulle. Mais dans un segment, il y a une infinité de points. Ce segment aurait alors une longueur infinie, ce qui est également absurde. La seule conclusion à en tirer, semble-t-il, est qu'un segment n'est **pas** composé de points indivisibles, qu'il ne se réduit pas en atomes.

Est-ce que ces considérations sont si naïves ? Ou ne les retrouve-t-on pas exactement dans l'axiomatique d'une mesure ? Celle-ci spécifie que la mesure d'une réunion *dénombrable* d'ensemble est la somme des mesures de ces ensembles. Réfléchir sur la restriction "dénombrable", c'est retrouver la pensée de Zénon.

Zénon, puis Aristote, rejetant une division réellement infinie de l'espace, aboutissant à des "éléments d'espace", les mathématiciens éprouvent le besoin d'une méthode alternative de recherche, qui est celle d'*Eudoxe*, et qui est une méthode par **approximations et majorations,** de type "Limite", appelée par la suite méthode apagogique, ou méthode d'exhaustion, qui se rapproche assez de notre moderne point de vue. En revanche, tenant de l'**atomisme**, Démocrite au contraire considère que grandeurs: lignes, surfaces, *volumes* $\cdots$ *sont* formées d'éléments indivisibles en nombre fini. Archimède attribue à Démocrite l'énoncé des théorèmes sur le volume du cône et de la pyramide, ultérieurement démontrés, dit-il, par Eudoxe.

2.2 Archimède et ses héritiers.

Archimède ($-287/-212$) utilise la méthode d'Eudoxe dans ses écrits "officiels", mais accorde la préférence en tant que méthode heuristique au point de vue atomistique: Voir la *Lettre à Ératosthène*. Il découpe par exemple l'intérieur S de l'arc et de la corde de parabole en segments, équilibrant chacune de ces segments de droite par un autre, de l'autre côté d'un fléau, afin de retrouver l'aire de S, car S s'équilibre avec la surface d'un triangle.

Deuxième remarque: Dans l'histoire de l'intégration, cohabitent pendant très longtemps un point de vue logiquement rigoureux, et un point de vue intenable sous le rapport de la logique, mais d'une valeur heuristique indéniable.

Les Arabes, qui ont lu Archimède, s'inspirent de ses travaux et les prolongent avec dextérité et pertinence, en calculant divers aires et volumes par la considération de "sommes de Riemann" (voir [8]).

3 Le Moyen-Âge, Galilée, Cavalieri, et Pascal.

3.1 Galilée.

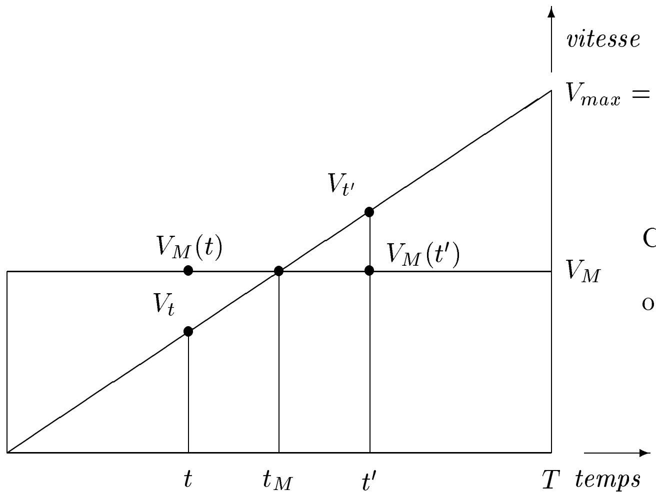
On peut considérer comme un grand moment de l'Histoire des Sciences la description du mouvement uniformément accéléré par Galilée, dans son *Discours sur deux* *sciences nouvelles* (1638). En termes modernes, nous traduirions le résultat de Galilée par la résolution de l'équation différentielle: $\frac{d^2x}{dt^2} = C$, d'où, après deux calculs de primitives: $x = \frac{C}{2}t^2$ compte tenu des conditions initiales.

Or il est frappant de constater, et cela vient à l'appui de la **Remarque 1**, que Galilée ne considère pas son problème sous l'angle des dérivées, ni même des primitives (ni les unes, ni les autres n'existaient!), mais bien sous un aspect **intégral**.

Il "démontre" en effet que lors d'un mouvement uniformément accéléré, les différentes vitesses instantanées, représentés par une fonction affine, sont, au total, équivalentes à une vitesse instantanée restant constante durant le même intervalle de temps, et égale à la moyenne des vitesses initiales (disons: 0) et finales ($= CT$). Donc les déplacements seront les mêmes dans les deux cas. Et on obtient donc:

$$x(T) = \frac{0 + CT}{2} \times T = \frac{C}{2}T^2 \, .$$

Il illustre sa "démonstration" d'un graphique.



Comme t et t' sont symétriques par rapport à $\frac{T}{2}$,

on a toujours: $V(t) + V(t') = V_M(t) + V_M(t') = 2V_M$.

D'où l'"équivalence" de ces deux mouvements, du point de vue de la distance parcourue.

Cette démonstration, une de celles qui inaugurent l'ère moderne, provient directement de mathématiques typiquement médiévales, des universités d'Oxford et de Paris. "*Toute quantité uniformément difforme a même quantité que si elle informait uniformément le même sujet suivant le degré du point milieu de ce sujet*" [Nicole Oresme, vers 1350].

3.2 Cavalieri.

Cavalieri est un ardent promoteur des indivisibles. On voit avec lui, comme chez Galilée, ou comme chez l'Archimède de la "lettre à Ératosthène", se dessiner l'idée qu'une surface est la **sommation** des segments de cette surface parallèles à une droite donnée.

Mais Cavalieri n'hésite pas à s'affranchir quelque peu de la géométrie pour aller vers l'Algèbre, en considérant la **somme des carrés, ou des cubes, de tels segments**.

Nous voyons donc apparaître notre concept général d'INTÉGRALE, indépendamment d'un problème géométrique spécifique. Il faut cependant remarquer que cela se fait **en dehors de toute rigueur.** [Voir Remarque 2].

Ce calcul de ce que nous appellerions les intégrales des fonctions puissances est également mené à bien, à peu près à la même époque, par Roberval, dans son Traité des indivisibles [9].

Objection à Cavalieri.

La méthode des Indivisibles est rejetée par l'Église Catholique en 1649. Le Père jésuite Tacquet d'Anvers essaie de montrer qu'ils induisent des paradoxes, par exemple celui-ci (tiré de [7]):

Une des Théorèmes de Cavalieri est que si deux solides de même hauteur, parcourus par un plan de direction fixe P, sont tels que leurs coupes respectives C et C', pour un même plan P, ont des aires A et A' dans un rapport constant k, alors leurs volumes sont dans le même rapport constant k. Ce théorème permet d'établir aisément le volume du cône, le volume de la pyramide étant connu.

Cavalieri explique essentiellement ceci: Si Aire(D) =Aire(T), alors pour tout k: Aire(C) =Aire(C'). On en déduit: VOL(Cône)=VOL(Pyramide).

Aucune raison, dit Tacquet, qu'il en aille autrement pour les surfaces des solides, et non plus leurs volumes. Considérons alors un cône de diamètre maximal $D = AB$, de sommet S et construisons un triangle $S'A'B'$ de même hauteur H, la base $[A'B']$ étant parallèle à (AB), avec $A'B' = \pi AB$ Alors tout plan parallèle au cercle de base du cône coupe le cône et le triangle suivant respectivement un cercle et un segment, de même longueur. L'aire du cône étant la "somme" des longueurs des cercles et l'aire du triangle celle des longueurs des segments, la méthode des indivisibles conduirait à penser que les deux aires sont égales, et donc que l'aire du cône est $\frac{\pi}{2}H.AB$, ce qui est faux.

Il est aisé de voir par où pêche ce "paradoxe", mais il n'en demeure pas moins intéressant.

3.3 Pascal (1623-1662).

Pascal utilise sans remords le "langage des indivisibles" de Cavalieri, ainsi que la "sommation" des dits indivisibles. Mais avec suffisamment de discernement pour que les objections de Tacquet ne le concernent pas. D'autant moins que Pascal, s'exprimant en ce langage téméraire, voit parfaitement que ce dernier est équivalent à des considérations **apagogiques**, ou encore à l'utilisation de ce que nous appelons "**sommes de Riemann"**, et qu'il conviendrait sans doute d'appeler "sommes de Pascal", "ou sommes de Ibn Qurra", voire "sommes d'Archimède" (voir [6]):

"On n'entend autre chose par somme des ordonnées d'un cercle sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme [...] ne diffère de l'espace d'un demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée".

Cependant le point de vue de Pascal reste presque exclusivement géométrique; en tout cas, il n'utilise pas les notations algébriques pourtant courantes à son époque. Pour "sommer" par exemple les sinus de 0 à π, il considère non pas la courbe représentative de la fonction sinus, dont son époque n'avait pas le concept, mais le demi-cercle, en faisant la somme de petits bouts d'arcs de longueurs égales, multipliés "un chacun" par la distance du petit bout d'arc au diamètre du demi-cercle.

Pascal tire entre autres son inspiration dans le domaine "intégral" du parallélisme entre SOMME FINIE ($\sum$) et SOMMATION INFINIE DES INDIVISIBLES. Ce passage du discret au continu lui permet de considérer ce qu'il appelle sommes triangulaires, puis sommes pyramidales d'une fonction, la première se traduisant pour nous par $\int_a^b \left[\int_a^x f(t)\,dt\right] dx$, la seconde par une intégrale triple. Ces nouveaux concepts sont très féconds au point de vue calculatoire, et permettent par exemple à Pascal de démontrer, en exploitant également l'aspect "équilibres" de la géométrie infinitésimale, un théorème qui se traduirait de la façon suivante: Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et vérifiant; $\int_a^b (t-x_G)f(t)\,dt = 0$, alors on a aussi la relation:

$$\frac{\int_a^b \left[\int_a^x f(t)\,dt\right]dx}{\int_a^b \left[\int_x^b f(t)\,dt\right]dx} = \frac{b-x_G}{x_G-a}.$$

Notre Remarque 3 insiste sur cette source d'inspiration du calcul intégral: Le passage de la somme discrète dénombrable $\sum$ à l'intégrale.

4 Leibniz, Newton, et le "Théorème fondamental".

La dextérité calculatoire de ces "intégralistes" avant l'heure est frappante. Mais ce qui leur manquait était les **conceptions générales**.

- Il manquait en particulier un corpus de **notations** qui permît au calcul "infinitésimal" de bénéficier de toute la puissance du *calcul algébrique* de Viéte et de Descartes.
- Un théorème dont il paraît vraiment étonnant qu'il ait été énoncé tardivement est celui de la **réciprocité entre intégration et dérivation.**

Notations, théorème fondamental: Ces deux progrès essentiels sont l'œuvre de Newton et de Leibniz.

L'inspiration de Newton est, on le sait, essentiellement **cinématique**. Il est clair en effet que la cinématique est une voie royale pour l'intuition de la dérivation, voire de l'intégration, et du lien qui les unissent. C'est le passage de la fluente à la fluxion, et inversement.

Remarque 4: De ce point de vue, qui fut celui de Newton, la primauté passe, au rebours de ce qui fut signale à la Remarque 1, de la sommation à la **dérivation:** L'intégration n'est plus vue que comme **calcul de primitives**. Ce point de vue va dominer les XVII ème et XVIII ème siècles.

Souci de **généralités et d'abstraction,** importance donnée aux **notations**, telles sont des caractéristiques de la pensée de Leibniz. Les historiens ont la chance de disposer des textes où figure la genèse de son système (voir [5]). Il semble qu'il parte des considérations discrètes (voir Pascal et **Remarque 3**) sur les suites, pour construire par analogie son calcul différentiel et intégral. L'équivalent de la fonction dérivée est alors la *suite dérivée*, celui de la fonction intégrale est *la suite des sommes partielles.* Les théorèmes s'ensuivent. La première notation pour l'intégrale fut d'abord *omn.* (omnes=tout), puis rapidement, celle qu'il nous a léguée, S initial de Somme. Le mot *intégrale* est dû à son disciple Jean Bernoulli (lettre à Leibniz du 12 février 1695). Très vite et très clairement, pour Leibniz: "*L'intégration en tant que processus de sommation est l'inverse de la différentiation*"

Dans Bourbaki [2]: "Un jour d'Août 1697, méditant en voiture sur des questions de calcul de variations, il a l'idée de différentiation par rapport à un paramètre sous le signe somme, et enthousiasmé, la mande aussitôt à Bernoulli".

Notons aussi, parmi tous les travaux de Leibniz, son idée d'une machine à dessiner les fonctions primitives, que l'on pourrait appeler "*intégraphe*" (Voir [1]).

5 Vers la rigueur

Voir les ouvrages [3] et [4]. Aux XVIII ème et XIX ème siècles, l'Analyse se développe de façon extraordinaire, mais l'on ne se soucie guère avant Cauchy de définir exactement ce dont on parle.

Cependant, la réflexion des mathématiciens se portent de nouveau sur l'intégrale d'une fonction sur un intervalle (intégrale "définie"), à propos d'un des grands problèmes du XIX ème siècle, celui de la **série de Fourier** déduite d'une fonction. En effet les coefficients de ces séries sont exprimées par une intégrale mettant en jeu ladite fonction, et intervient lors le problème de l'existence de la série, des coefficients, des intégrales. Remarquons au passage que si l'on doit la notation $\int$ à Leibniz, et si Euler utilisait la notation $\int f(x)dx\left[\begin{smallmatrix}x=b\\x=a\end{smallmatrix}\right]$, notre notation $\int_a^b f(x)dx$ est due à Fourier.

> Donc, Cauchy définit l'intégrale sur un segment d'une fonction continue à l'aide des sommes "de Riemann". (1823), avant d'en démontrer les propriétés de linéarité et celles relatives à l'intervalle d'intégration. Le problème de l'existence d'une "limite de ces sommes", n'est pas traité par lui de façon qui nous paraisse totalement satisfaisante, car la définition de la continuité donnée par Cauchy, trop floue, ne fait pas la différence entre continuité et continuité uniforme.

Plus grave, Cauchy énonce et "démontre" un faux théorème, suivant lequelle l'intégrale de la fonction limite serait toujours égale à la limite des intégrales. Ici, son erreur provient d'une confusion entre convergence simple et convergence uniforme (concepts dont il ne disposait pas), confusion qui lui fit faire erreur aussi sur la continuité de la fonction limite. Un contre-exemple au faux théorème sur l'intégrale ne sera donné qu'en 1875, par Du Bois Raymond, alors qu'il en existe de parfaitement élémentaires. Le concept de convergence uniforme est introduit par Seidel en 1847.

C'est **Riemann**, en 1854, toujours à propos des séries trigonométriques, qui approfondit la réflexion sur la **définition de l'intégrale**, en cherchant **pour quelles fonctions les sommes de Riemann convergent.** Il aboutit à des conditions nécessaires et suffisantes qui s'énonce en termes de faible longueur totale de l'ensemble des intervalles où se produisent des "sauts" de hauteur arbitrairement petite. Riemann met en évidence à cette occasion que des fonctions "très" discontinues peuvent être intégrées. En revanche, il ne dispose pas encore du théorème de la continuité uniforme d'une fonction continue sur un segment, et ne peut donc pas énoncer que "toute fonction continue est intégrable" (Voir [2]).

Remarquons que les conditions de Riemann inaugurent la "théorie de la mesure", mais aussi, avec Bourbaki, que durant tout le XIX ème, et sans doute après, la théorie de l'intégration est extrêmement lié à l'Analyse Harmonique.

Il manquait à Riemann, pour conclure, le "théorème de Heine" sur l'uniforme continuité, démontrée par ce dernier en 1872. Ceci permet à Darboux, en 1875, de clore la première étape "rigoureuse" de la Théorie de l'intégration, à la fin de laquelle nous refermons ce survol historique superficiel.

> **Remarque 5.** Cette fois, l'**intégrale** récupère son autonomie par rapport à la **dérivation**, mouvement contraire à celui évoqué dans la **Remarque 4,** et allant au contraire dans le sens de celui cité à la **Remarque 1**.

6 Bibliographie

[1] Leibniz (& Marc Parmentier), *La naissance du calcul différentiel,* VRIN.

[2] N.Bourbaki, *Éléments d'Histoire des Mathématiques*, HERMANN, page 248.

[3] J. Dieudonné, *Abrégé d'histoire des mathématiques,* HERMANN, pages 256 à 261.

[4] Jean Cavaillès, *Philosophie mathématique*, HERMANN, pages 44 à 60.

[5] J.-P. Collette, *Histoire des mathématiques,* VUIBERT pages 73-74.

[6] B. Pascal, Œuvres complétes, la Pléïade, page 232.

[7] *Histoire des Mathématiques, Histoire des Problèmes*, InterIREM, ELLIPSES, Chapitre 3.

[8] Roshi Rashed et al., *Histoire des sciences arabes,* Tome 2, Seuil, 1997, pages 93 et suivantes.

[9] Roberval, *Traité des indivisibles (1693),* Réimpression, IREM Paris VII, 1987.