L'Intégration en Terminale

Christian Drouin
Professeur au Lycée de Pauillac, Gironde

Juin 1998

1 Le contexte.

1.1 Des classes très hétérogènes.

1.2 Une déductivité limitée.

Rappelons qu'en Lycée, que ce soit en Géométrie ou en Analyse, beaucoup de "Théorèmes" sont **admis**, ne serait-ce que parce qu'on ne dispose pas des outils théoriques pour les démontrer (ni même, parfois, de définition des concepts; la *limite*, par exemple, n'est pas définie en Lycée). On admet sans démonstration le théorème "f' positive sur $I \Rightarrow f$ croissante" ou le théorème "f dérivable et de dérivée strictement positive sur $I \Rightarrow f$ bijective de I sur J convenable".

La démonstration, lorsqu'elle est possible, est évidemment souhaitable: Démonstrations de dérivabilités; démonstration de la dérivée de la composée (grandes lignes du moins).

1.3 La quasi disparition de la continuité.

La **continuité** tient dans le nouveau programme 97, appliqué en 98-99, une place extrêmement réduite, elle est "*en dehors des objectifs du programme*"; on se limite seulement à une *première approche* de la continuité d'une fonction sur un intervalle, exclusivement à propos de la résolution de l'équation $f(x) = m$. Mais les fonctions considérées sont par hypothèse **dérivables par intervalles**. On définit en Terminale l'intégrale à partir d'une primitive. L'énoncé des nouveaux programmes est donc: "*Toute fonction dérivable sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle*". Jusqu'à cette année, on avait: "toute fonction continue etc."

1.4 Quelques modifications dans le programme de Spécialité.

La propriété de la *suite croissante majorée* disparaît du programme de Terminale. Les "*encadrements d'intégrales*" passent de la partie Spécialité à la partie Obligatoire.

2 Les objectifs.

Nouveau programme 97:

"L'objectif est double:

- – Familiariser les élèves avec quelques **problèmes** relevant du calcul intégral, qui en retour, donnent du sens à la notion d'intégrale: calculs de **grandeurs géométriques** (aires, volumes,...), de **grandeurs physiques** (distance parcourue connaissant la vitesse, valeur moyenne, valeur efficace...).

- – Fournir aux élèves le **symbolisme** du calcul intégral et exploiter, sur des exemples simples, les propriétés élémentaires de l'intégration pour **l'étude de fonctions**.

On combinera les activités de **calcul exact** d'intégrales (par primitives) et les activités d'**encadrement** et de calcul approché (qui exploitent les idées géométriques à partir d'interprétations graphiques)."

3 Présentation du Concept d'Intégrale.

3.1 Définition de l'intégrale.

La dérivée est au programme de Première. Les notions de primitive et d'intégrale sont enseignées en Terminale.

Soit f une fonction définie et dérivable sur une intervalle, admettant donc une primitive F sur cet intervalle; soient a et b deux points de cet intervalle. **L'intégrale de a à b de f est définie comme étant égale à** $F(b) - F(a)$, qui ne dépend pas de la primitive F choisie.

La linéarité et la positivité de l'intégrale, ainsi que le relation de Chasles, sont alors immédiates. On donne le théorème d'intégration par parties. Remarquons que la notation $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ pour une primitive, n'est pas utilisée en terminale; une primitive est recherchée sous la notation $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque: On pourrait aisément étendre le concept d'intégrale aux fonctions **dérivables ou continues par intervalles** (en nombre fini, juxtaposés). Ceci cependant n'est pas fait par le programme ou les manuels.

3.2 Intégrale et Aire.

Citons les programmes: Dans le cas d'une fonction positive, interprétation graphique de l'intégrale en termes d'aires... La notion d'aire est admise, ainsi que ses propriétés élémentaires. Remarquons que si les propriétés élémentaires des aires sont admises, il devient aisé de "démontrer" que la fonction $x \mapsto A(x)$: Aire sous la courbe de f jusqu'à l'abscisse x, est une primitive de f, dès lors que f est *continue* et positive. C'est encore plus aisé si f est monotone, évidemment.

3.3 Applications.

Il s'agit d'applications à des "calculs de grandeurs géométriques, mécaniques ou physiques", en particulier calcul de volume en faisant l'intégrale des aires des "coupes" perpendiculaires.

3.4 Valeurs approchées.

"Exemples simples d'encadrement d'une intégrale au moyen d'un encadrement de la fonction à intégrer"

Calculs de valeurs approchées par les méthodes des rectangles, des points-milieux, des trapèzes... [sans démonstration bien sûr quant à la précision des ces approximations, dans le cas général].

3.5 Difficulté de la notation leibnizienne.

Comment justifier la notation de Leibniz $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$? En particulier, comment justifier le "$\mathrm{d}x$", le même que dans la notation de la dérivée, et le terme "somme", pour désigner l'intégrale ? On peut imaginer deux types de justifications, toutes deux évidemment plus intuitives que rigoureuses:

- Considération géométrique de "sommes de Riemann", en vérifiant, dans des cas particuliers, que ces sommes convergent vers l'intégrale. La notation intégrale est vue alors comme un passage à la limite des sommes $\sum f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$.

- De façon plus intuitive, si v désigne la vitesse algébrique instantanée d'un mouvement rectiligne, et "$\mathrm{d}t$" des petits espaces de temps, alors $v(t)\,\mathrm{d}t$ désigne des petits déplacements, dont la "somme" $\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$ est le déplacement total entre les instants a et b.

3.6 Vers les sommes de Riemann.

La *méthode des rectangles* amène à considérer des sommes de Riemann et des sommes de Darboux. Les enseignants (et les problèmes de bacc.) s'intéressent donc à la convergence de ces sommes vers l'intégrale, en particulier pour des sommes correspondant à une subdivision *régulière*, et dans le cadre très commode des fonctions **monotones** presque toutes les fonctions de Terminale sont en effet monotones par intervalles.

On peut rencontrer dans des sujets du baccalauréat **un peu anciens (T.C.)**, et dans les manuels, des questions du type

- Démontrer que pour k entier entre 0 et $n-1$,

$$\frac{1}{n} f\Big(\frac{k+1}{n}\Big) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)$$

  (f est une fonction donnée, décroissante sur $[0,1]$).

- En déduire

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \leq I \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)$$

  ...ce qui permet de déterminer la limite de S_n.

4 Exercices et problèmes.

4.1 Exercices classiques.

La plupart des exercices donnés au baccalauréat sont des applications directes du cours.

On peut signaler par ailleurs les types d'exercices suivants:

4.1.1 Comparaisons d'intégrales:

Ce sont des exercices qui peuvent être simples: A partir d'une majoration (ou minoration) de l'intégrande, on contrôle l'intégrale; on en déduit par exemple la limite d'une suite d'intégrale, ou encore la limite de l' intégrale quand la borne supérieure d'intégration tend vers $+\infty$, comme dans l'exercice suivant, assez facile (Besançon 1990).

Soit $f(t) = \frac{1}{t}\ln(t^2+1)$ et $F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$. A partir de l'encadrement:

$$\frac{\ln(t^2)}{t} \leq f(t) \leq \frac{\ln(2t^2)}{t}$$

trouver les limites pour $x \to +\infty$ de $F(x)$ et $\frac{F(x)}{x}$.

4.1.2 Utilisation de la relation de Chasles.

Nous avons évoqué au §3.6 le découpage d'un intervalle $[a, b]$ en sous intervalles de longueur $\frac{b-a}{n}$ qui permet d'introduire des sommes de Riemann. On rencontre dans les problèmes de baccalauréat les découpages par la relation de Chasles de l'intégrale $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ en ses diverses $\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ qui permettent la comparaison de **l'intégrale et de la série**, et éventuellement de conclure sur la convergence de cette dernière.

Les deux derniers types d'exercices, qui sont parfois équivalents, sont plus difficiles et se retrouvent plus rarement au baccalauréat. Ils sont cependant accessibles à un "bon" élève de Terminale S.

4.1.3 Exercices types "intégration de séries":

Le prototype en est, à partir de l'égalité:

$$\frac{1}{1+t} = \sum (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$$

l'égalité des deux intégrales prises de 0 à 1, la majoration de l'intégrale de la dernière fonction, et l'obtention de la limite de $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 \dots$

4.1.4 Intégration par parties.

Les exercices les plus difficiles du baccalauréat dans ce domaine, étudient une suite d'intégrales $u_n = \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$, obtiennent une relation de récurrence grâce à une intégration par parties, puis concluent sur telle ou telle limite, par exemple celle de la somme des termes d'une suite. Exemples: étude de $u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x\,\mathrm{d}x$, pour obtenir $e = \sum \frac{1}{n!}$; étude des intégrales de Wallis; étude de $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,\mathrm{d}x$, pour obtenir $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ (Orléans-Tours, 1980).

4.2 Exercices qui ne sont PLUS classiques.

4.2.1 Bornes fonctions de la variable.

Les recherches des limites et *dérivées* de fonctions de la forme $x \mapsto \int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne sont PLUS classiques.

Voici un type d'exercice de baccalauréat ANCIEN: (Bordeaux, Juin 1985) $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$, pour $0 < x < \frac{1}{2}$ ou $x > 1$; $f(0) = 0$..

Continuité et dérivabilité en 0 de f. Limite en $+\infty$ de $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$; dérivabilité et dérivée; limites de f en 1 et en $1/2$.

4.2.2 Intégrande fonction de la variable, puis dérivation.

Même avec de multiples lemmes et une démarche très guidée, la dérivée de $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp \frac{-x}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ (Togo, 1978) présenterait de grosses difficultés pour nos élèves.

4.2.3 Plus généralement, l'abstraction des exercices,

la variété des êtres mathématiques en cause, (fonctions, suites...), la multitude des notations, mais aussi le nombre élevé de difficultés variées à résoudre dans un même problème, constitueront des obstacles importants pour nos élèves.

5 Pourquoi l'intégrale en Lycée ?

- On peut en effet peut-être estimer que la définition de l'intégrale comme variation de la primitive est bien trop sommaire, et surtout qu'elle n'est pas une bonne introduction aux définitions du même concept présentées dans le Supérieur.

  Nous avons vu cependant qu'il est possible en Terminale, de commencer à considérer les sommes de Riemann, dans des cas particuliers.

- Est-il raisonnable, d'autre part, de reporter une nouvelle notion du Lycée au Supérieur ? Aussi superficielle que soit l'approche de l'intégrale avant le baccalauréat, elle a le mérite de familiariser les élèves avec ce nouvel être mathématique, et les diverses notations qui lui sont associées. Les élèves peuvent pratiquer quelques méthodes de calcul: Recherches de primitives, Encadrements, Intégration par parties... Sortir l'intégrale du Lycée conduirait à infliger aux étudiants du Supérieur une nouveauté supplémentaire.

- Une solution intermédiaire consisterait à traiter les primitives en terminale, avec les techniques élémentaires de calcul, et l'intégrale "définie" après le bacc. Disparaîtraient "seulement" des programmes du Lycée la relation de Chasles, les comparaisons, les encadrements, les calculs d'aires et de volumes.

- Il s'agit donc de savoir si ces dernières "préparations" au concept d' intégrale sont utiles à nos étudiants.

6 Bibliographie

Deux références bibliographiques dans la revue REPÈRES-IREM, avril 1998:

[1] J.-P. Daubelcour, Calculs d'aires et calcul intégral en TS: Un essai pédagogique.

[2] R. Cuculière, Quelle intégrale pour l'an 2000.