Les théorèmes de Lebesgue pour l'intégrale de Riemann

Par Jean-Claude Poumarède et Robert Cabane
professeurs de Mathématiques Spéciales au lycée Michel-Montaigne à Bordeaux

Le but de cet article est de montrer aussi "élémentairement" que possible que les théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone peuvent s'adapter au cadre d'une théorie de l'intégrale de Riemann. Ces théorèmes, couramment attribués à Lebesgue, semblent dûs à Arzelà et Osgood. Notre travail est largement inspiré de l'article [1] de J. Lewin paru dans la revue American Mathematical Monthly.

Nous considérerons comme connue l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment $[a, b]$; on construit cette intégrale très facilement à partir de l'intégrale des fonctions en escalier; par exemple, on peut considérer que l'intégrale d'une telle fonction f est la borne supérieure des intégrales $\int_a^b \varphi(t)\,dt$ des fonctions en escalier φ sur $[a, b]$ qui sont dominées par f. Nous noterons $\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(t)\,dt$ l'intégrale de la fonction f.

Il n'est pas sans intérêt de réfléchir un peu sur la nature de l'intégrale des fonctions en escalier. Celle-ci est une "forme linéaire positive". On pourrait sans difficulté la remplacer par une autre forme linéaire positive, obtenue par exemple en altérant la notion de longueur d'intervalle. On voit alors que l'intégrale de Stieltjes ne serait pas beaucoup plus difficile à traiter que celle de Riemann, avec des résultats tout à fait analogues (il faut quand même modifier le lemme 1).

Par la suite, nous traiterons aussi le cas des intégrales sur un intervalle ouvert (en nous limitant toujours aux fonctions continues par morceaux). Nous poserons ainsi que

(i) une fonction f est intégrable sur un segment I si elle y est continue par morceaux,

(ii) une fonction f est intégrable sur un intervalle quelconque I si elle y est continue par morceaux, et que les intégrales $\int_J |f|$ sont majorées, J décrivant l'ensemble des segments inclus dans I.

En ce qui concerne l'intégrale d'une telle fonction f, on peut la définir, dans le cas où f est positive, comme la borne supérieure des intégrales sur les segments inclus dans I. Dans le cas général, il suffit de décomposer la fonction en parties positive, négative, réelle, imaginaire. Les intégrales dites impropres (et "semi-convergentes") sont donc exclues de cette discussion.

Partie A : Préliminaires à propos des ensembles élémentaires

Pour développer les théorèmes de Lebesgue, il est nécessaire d'intégrer des fonctions sur des ensembles qui sont des unions finies d'intervalles; quelques renseignements sur ces ensembles "élémentaires" et leurs mesures nous seront utiles. On conviendra que les fonctions en escalier sur $\mathbb{R}$ sont toujours à support compact (c'est-à-dire, nulles hors d'un segment).

§*1. Notion d'ensembles élémentaires.*

Définition 1. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que c'est un sous-ensemble* ***élémentaire*** *de $\mathbb{R}$ si c'est l'ensemble vide ou une union finie d'intervalles bornés, disjoints.*

Proposition 1. *Une partie A de J est élémentaire si et seulement si $\mathbf{1}_A$, la fonction caractéristique de A, est en escalier sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration: Il suffit de remarquer que cet énoncé est vrai pour les intervalles, puis que l'ensemble des fonctions en escalier est un espace vectoriel (si E et F sont disjoints on a en fait $\mathbf{1}_E + \mathbf{1}_F = \mathbf{1}_{E\cup F}$). ♦

Corollaire 1. *Si* A *et* B *sont deux ensembles élémentaires, alors* $A \cap B$, $A \cup B$ *et* $A \setminus B$ *sont aussi élémentaires. En d'autres termes, la famille des ensembles élémentaires forme un* ***clan*** *de parties de* $\mathbb{R}$.

Démonstration: il s'agit d'opérations très simples sur les fonctions caractéristiques:

$$\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{A\setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B\,.$$

Corollaire 2. *Toute union finie d'intervalles est un ensemble élémentaire.*

Notons enfin que la décomposition "minimale" d'un ensemble élémentaire en union d'intervalles disjoints n'est autre que sa décomposition en composantes connexes. D'autre part, une conséquence de la définition est que les parties finies sont considérées comme élémentaires.

§2. *Mesure sur les ensembles élémentaires.*

Définition 2. *Soit* A *un ensemble élémentaire. On appelle* ***mesure*** *de* A *le nombre* $m(A) = \int_J \mathbf{1}_A$, J *désignant un intervalle borné contenant* A.

Proposition fondamentale. *Si* A *et* B *sont deux ensembles élémentaires disjoints alors* $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Démonstration: C'est une simple intégration de la formule $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$. ♦

Reconnaissons que notre définition n'est pas très intuitive; elle a cependant le mérite d'être efficace et non ambiguë. Bien entendu, elle est compatible avec la définition "physique":

Proposition 2. *Soit* $A = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ *un ensemble élémentaire, les intervalles* I_k *étant disjoints. On a alors* $m(A) = \sum_{k=1}^{n} m(I_k)$.

Démonstration: On a $\mathbf{1_A} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{I_k}$ et il suffit d'intégrer cette égalité. ♦

Nous trouverons parfois un certain avantage à travailler avec des ensembles ouverts. Comme l'intégrale d'une fonction en escalier ne dépend pas de sa valeur aux points de discontinuités, on a pour tout ensemble élémentaire A la formule $m(A) = m(\overset{\circ}{A})$.

Corollaire 3. *Si* A *et* B *sont deux ensembles élémentaires n'ayant qu'un nombre fini de points communs la formule* $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ *est vraie.*

Démonstration: il suffit de prendre les intérieurs. ♦

Corollaire : croissance de la mesure. *Si* C *et* D *sont des ensembles élémentaires tels que* $C \subset D$ *alors* $m(C) \leqslant m(D)$.

Démonstration: $A = C \setminus D$ est encore élémentaire, et disjoint de D. ♦

Corollaire : sous-additivité de la mesure. *Si* A *et* B *sont des ensembles élémentaires alors*

$$m(A \cap B) + m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

et en particulier $m(A \cup B) \leqslant m(A) + m(B)$.

Démonstration: On a $\mathbf{1}_{A\cap B} + \mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$. ♦

§3. *La mesure intérieure.*

Lemme 1. *Soit un ensemble élémentaire* E. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un compact élémentaire* K *inclus dans* E *tel que* $m(K) \geqslant m(E) - \varepsilon$.

Démonstration: Il suffit de "rétrécir" un peu les intervalles non réduits à des points qui constituent E, pour une diminution de longueur arbitrairement petite; et les intervalles réduits à des points peuvent être ignorés. ♦

Définition 3. *Soit* A *une partie bornée de* $\mathbb{R}$. *On appelle* ***mesure intérieure*** *de* A *la borne supérieure des mesures des ensembles élémentaires inclus dans* A . *Ce qui sera noté:*

$$m_*(A) = \mathrm{Sup}\{m(E) \ / \ E \text{ élémentaire}, E \subset A\}$$

Notons que la mesure intérieure d'un ensemble d'intérieur vide est nulle, et que la mesure intérieure d'un ensemble élémentaire est égale à sa mesure ordinaire.

Lemme de continuité décroissante de la mesure intérieure. *Soit une suite* (A_n) *de parties bornées de* $\mathbb{R}$, *décroissante pour l'inclusion, et d'intersection vide. Alors la suite* $\alpha_n = m_*(A_n)$ *décroît et tend vers 0.*

Démonstration: Pour commencer, $m_*(A_{n+1})$ est la borne supérieure des mesures d'ensembles élémentaires E inclus dans A_{n+1}, donc dans A_n; ceci entraîne aussitôt que $m_*(A_{n+1}) \leqslant m_*(A_n)$.
Supposons que la suite (α_n) ne tende pas vers 0, et notons α la limite de la suite (α_n). Il existe par définition un ensemble élémentaire E_n inclus dans A_n et tel que $m(E_n) \geqslant \alpha_n - \frac{\alpha}{2^{n+2}}$ et il existe (par le lemme 1) un compact élémentaire H_n inclus dans E_n et tel que $m(H_n) \geqslant m(E_n) - \frac{\alpha}{2^{n+2}}$; d'où $m(H_n) \geqslant \alpha_n - \frac{\alpha}{2^{n+1}} > 0$; il n'est donc pas vide. Posons $K_n = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$; c'est une suite décroissante de compacts et on a $K_n \subset H_n \subset A_n$, donc $\bigcap K_n \subset \bigcap A_n = \emptyset$; un théorème bien connu de Topologie assure qu'alors l'un des K_n doit être vide. Considérons à présent, pour cette valeur de n, un sous-ensemble élémentaire V de A_n; un élément de V n'appartient pas simultanément à tous les H_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$ puisque $K_n = \emptyset$. On peut donc écrire $V = \bigcup V \setminus H_i$. Les ensembles $V \setminus H_i$ sont élémentaires, donc on a $m(V) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(V \setminus H_i)$. On a aussi $(V \setminus H_i) \cup H_i \subset A_n$, donc $m(V \setminus H_i) + m(H_i) \leqslant \alpha_n$ d'où $m(V \setminus H_i) \leqslant \alpha_n - m(H_i) \leqslant \alpha_i - m(H_i) \leqslant \frac{\alpha}{2^{i+1}}$. En sommant on a $m(V) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{2^{i+1}} < \frac{\alpha}{2}$. Il en résulte que $\alpha \leqslant \alpha_n = \mathrm{Sup}\, m(V) \leqslant \frac{\alpha}{2}$, ce qui est absurde. ♦

Partie B : Les théorèmes de Lebesgue

§1. *Convergence bornée.*

Définition 4. *On dit qu'une suite de fonctions* (f_n) *intégrables sur un intervalle* I ***converge en moyenne*** *vers une fonction* f *intégrable sur* I *si* $\int_I |f_n - f|$ *tend vers 0.*

Proposition 3. *La convergence en moyenne d'une suite* (f_n) *de fonctions intégrables entraîne la convergence de la suite des intégrales, c'est-à-dire*

$$\int_I f = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n \, .$$

Théorème de convergence bornée. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux sur* $J = [a, b]$, *telle que* (f_n) *converge simplement sur* J *vers une fonction* f *continue par morceaux sur* J, *et qu'il existe une constante* $M > 0$ *vérifiant* $|f_n(x)| \leqslant M$ *pour tout entier* n *et tout* $x \in J$, *alors la suite* (f_n) *converge en moyenne vers* f *sur* J.

Démonstration: Introduisons $g_n = |f_n - f|$. Cette suite de fonctions a les qualités suivantes: les g_n sont positives, continues par morceaux, tendent simplement vers 0, et sont uniformément bornées sur J par $2M$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $A_n = \{x \in J \ / \ \exists i \geqslant n, \ g_i(x) \geqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\}$. Ceci définit une suite (A_n) de parties de J et il est clair que c'est une suite décroissante (un élément x de J a "moins de chances" d'appartenir à A_{n+1} qu'à A_n). De plus, si x appartient à J il existe un rang $n_0(x)$ tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait $g_n(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, grâce à la convergence simple de la suite. Il en résulte que x ne se trouve pas dans A_{n_0}; en conséquence, $\bigcap A_n$ est vide.

Nous pouvons alors appliquer le principe de décroissance de la mesure intérieure à cette suite d'ensembles; ainsi, la mesure intérieure de A_n sera inférieure à $\frac{\varepsilon}{4M}$ pour n assez grand ($n \geqslant n_1$); soit un tel entier n fixé désormais.

D'autre part, soit une fonction s en escalier telle que $s \leqslant g_n$. Soit alors $E = \{x \in J \ / \ s(x) \geqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\}$; comme s est en escalier, E est un ensemble élémentaire et il est clairement inclus dans A_n . On a donc $m(E) \leqslant \frac{\varepsilon}{4M}$. L'ensemble $F = J \setminus E$ est aussi élémentaire. Au total, on a

$$\int_J s = \int_E s + \int_F s \leqslant m(E) \times 2M + m(F) \times \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Passant à la borne supérieure (s décrivant l'ensemble des fonctions en escalier dominées par f), il vient $\int_J g_n \leqslant \varepsilon$. Ainsi, $\int_J g_n$ tend vers 0, ce qu'il fallait. ♦

Une conséquence immédiate apparaît...

Théorème de convergence monotone. *Soit* (f_n) *une suite croissante de fonctions à valeurs réelles continues par morceaux sur* J *convergeant simplement sur* J *vers une fonction* f *continue par morceaux sur* J . *Alors on a*

$$\int_J f = \operatorname*{Sup}_n \int_J f_n = \lim_n \int_J f_n \, .$$

§2. *Convergence dominée.*

A partir de maintenant nous considérons des intégrales sur un intervalle I ouvert.

Théorème de convergence dominée. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux sur* I *et* φ *une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur* I. *Si* (f_n) *converge simplement sur* I *vers une fonction* f *continue par morceaux sur* I *et si, pour tout entier* n, *on a la domination* $|f_n| \leqslant \varphi$, *alors* f *est intégrable sur* I *et la suite* (f_n) *converge en moyenne vers* f; *et, en conséquence, la formule d'interversion a lieu:*

$$\int_I f = \int_I \lim_n f_n = \lim_n \int_I f_n \, .$$

Démonstration: L'intégrabilité de f_n provient de la domination par φ. La relation de domination passe à la limite simple et montre que $|f| \leqslant \varphi$; en conséquence, f est intégrable sur I. Puis on considère un segment J inclus dans I. On a

$$\int_I |f - f_n| \leqslant \int_{I \setminus J} |f - f_n| + \int_J |f - f_n| \leqslant \int_{I \setminus J} 2\varphi + \int_J |f - f_n| \, .$$

L'intégrabilité de φ permet de majorer la première intégrale par $\frac{\varepsilon}{2}$ pour J bien choisi. A ce moment, la suite $(f - f_n)$ converge vers 0 sur le segment J en étant bornée par $2\|\varphi\|_\infty$ (φ est supposée continue par morceaux sur J, donc elle y est bornée). Le résultat en découle par le théorème de convergence bornée (sur J). ♦

¶ **Remarque.** L'hypothèse de domination est essentielle; faute de la vérifier, on peut avoir des contre-exemples notoires. Ainsi, la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = \begin{cases} |\sin x| & \text{si } x \in [n\pi, (n+1)\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est convergente vers 0 (la "bosse" part à l'infini) et a une intégrale constante. Ici, la limite des intégrales ne vaut pas l'intégrale de la limite.

§*3. Convergences monotones.*

Théorème de convergence monotone. *Soit (f_n) une suite croissante de fonctions à valeurs réelles continues par morceaux et intégrables sur I convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I. Alors f est intégrable sur I si et seulement si la suite $(\int_I f_n)$ est majorée. Dans ces conditions, la suite (f_n) converge en moyenne vers f et on a*

$$\int_I f = \operatorname*{Sup}_n \int_I f_n = \lim_n \int_I f_n \,.$$

Théorème d'intégration des séries positives. *Soit (u_n) une suite de fonctions continues par morceaux à valeurs réelles positives et intégrables sur I, telles que la série $\sum u_n$ converge simplement sur I, ayant pour somme une fonction u continue par morceaux sur I. Alors u est intégrable si et seulement si on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$ converge; dans ce cas, on a*

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n \,.$$

Le premier théorème résulte du second, car si on a une suite (f_n) croissante il suffit de poser $u_n = f_n - f_{n-1}$ et $u_0 = f_0$ pour que l'on ait $f_n = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p$ avec $u_p \geqslant 0$.

Démonstration: On commence par traiter le cas où I est un segment; alors, comme on l'a vu précédemment, le théorème de convergence monotone entraîne trivialement le théorème de convergence dominée. Le théorème d'intégration des séries positives en résulte dans ce cas.

Pour le cas général, on va rattacher le théorème d'intégration des séries positives au théorème d'interversion des sommations pour les suites doubles sommables (dites "séries doubles"). Soit en effet une suite croissante (J_p) de segments dont l'union est I. Posons $K_p = J_p \setminus \overset{\circ}{J}_{p-1}$. Comme J_p est un intervalle, K_p est un segment ou l'union de deux segments et on peut écrire $\int_I u_n = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \int_{K_p} u_n$. Considérons par conséquent la famille de nombres réels positifs: $u_{np} = \int_{K_p} u_n$. Sa sommabilité peut être vue aussi bien selon les lignes que les colonnes. Or,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{np} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{K_p} u_n = \int_{K_p} \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_{K_p} u$$

selon le théorème d'intégration des séries positives sur un segment. Tout ceci est fini parce que u est supposée continue par morceaux sur le segment K_p. Dans ces conditions, si u est intégrable la série $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \int_{K_p} u$ converge, la famille u est sommable et sa somme vaut

$$\int_I u = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{K_p} u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \int_{K_p} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n$$

ce qu'il fallait. Si la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_I u_n$ converge, la famille est encore sommable et u l'est. ♦

§4. *Intégration terme à terme de séries.*

Nous considérons à présent des séries de fonctions à valeurs réelles ou complexes.

Lemme 2. *Soient ψ et (φ_n) des fonctions continues par morceaux sur un segment J, telles que*

(i) *ψ et les φ_n sont positives;*

(ii) *la suite (φ_n) est croissante;*

(iii) *on a pour tout x de J: $\psi(x) \leqslant \lim\limits_n \varphi_n(x)$ (limite éventuellement infinie);*

(iv) *la suite $(\int_J \varphi_n)$ est majorée.*

Alors on a $\int_J \psi \leqslant \lim\limits_n \int_J \varphi_n$.

Démonstration: Introduisons les fonctions $f_n = \mathrm{Inf}(\psi, \varphi_n)$; il s'agit encore de fonctions continues par morceaux et positives. La croissance de la suite (φ_n) se transmet à la suite (f_n); cependant, les f_n sont dominées par ψ qui est continue par morceaux, donc bornée. Ainsi, la suite (f_n) converge simplement sur J. Montrons que la limite de la suite (f_n) est précisément ψ. Si ce n'était pas le cas, on pourrait avoir $\psi(x) > \lim\limits_n f_n(x) \geqslant f_p(x)$ pour tout p, donc $f_p(x) = \varphi_p(x)$. En passant à la limite sur p, il vient $\psi(x) > \lim\limits_p \varphi_p(x)$, en contradiction avec l'hypothèse (iii).

On a enfin $\int_J f_n \leqslant \int_J \varphi_n$, donc la suite des intégrales des f_n est majorée. Ce sont là toutes les hypothèses requises pour l'application du théorème de convergence monotone; il en résulte que $\int_J f_n$ tend vers $\int_J \psi$ tout en restant plus petite que $\int \varphi_n$, ce qui fournit la conclusion espérée. ♦

Théorème d'intégration des séries de fonctions. *Soit (u_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux et intégrables sur I telles que la série $\sum u_n$ converge simplement sur I vers une fonction S continue par morceaux sur I. Alors si la série $\sum\limits_n \int_I |u_n|$ converge, S est intégrable sur I et*

$$\int_I \Big|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |u_n|, \quad \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n .$$

Démonstration: On choisit d'abord un segment $J \subset I$. Choisissons un entier p et posons $\psi(x) = \Big|\sum\limits_{n=p}^{\infty} u_n\Big|$ et $\varphi_n = \sum\limits_{k=p}^{n} |u_k|$, dans le but d'appliquer le lemme précédent. La fonction ψ est bien continue par morceaux, comme différence entre la somme complète S et une somme partielle de la série des u_n. Les hypothèses (i) et (ii) sont immédiatement vérifiées. L'hypothèse (iii) provient d'un passage à la limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$) sur l'inégalité triangulaire. L'hypothèse (iv) est enfin vraie car

$$\int_J \varphi_n = \sum_{k=p}^{n} \int_J |u_k| \leqslant \sum_{k=p}^{n} \int_I |u_k| \leqslant \sum_{k=p}^{\infty} \int_I |u_k| .$$

Le lemme assure alors que

$$\int_J \Big|\sum_{k=p}^{\infty} u_k\Big| \leqslant \sum_{k=p}^{\infty} \int_J |u_k| \leqslant \sum_{k=p}^{\infty} \int_I |u_k| .$$

Comme ψ a des intégrales sur les sous-segments de J qui sont majorées, elle est intégrable sur I et son intégrale vérifie $\int_I \Big|\sum\limits_{k=p}^{\infty} u_k\Big| \leqslant \sum\limits_{k=p}^{\infty} \int_I |u_k|$. En prenant $p = 0$ on obtient la première moitié de la conclusion attendue. D'autre part, lorsque p tend vers l'infini le membre de droite de cette inégalité tend vers 0 (c'est un reste de série), donc $\Big|\sum\limits_{k=p}^{\infty} u_k\Big| = \Big|\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k - \sum\limits_{k=0}^{p-1} u_k\Big|$ tend aussi vers 0, ce qui achève la preuve. ♦

¶ **Remarques et exemples.** L'hypothèse de convergence de la série $\sum \int_I |f_n|$ est essentielle. En effet, si nous considérons la série de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \in [n\pi, (n+1)\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, la somme est la fonction sinus car la suite $(f_n(x))$ est stationnaire, n'ayant qu'un seul terme éventuellement non nul; mais la fonction sinus n'est pas intégrable. Ici, l'hypothèse cruciale n'est pas vérifiée.
Un inconvénient de ce théorème est qu'il ne s'appliquera jamais si la série de fonctions n'est pas absolument convergente dans l'intérieur de I (mais pour le savoir il faut disposer de l'énoncé analogue dans la théorie de l'intégrale de Lebesgue). Ainsi, si l'on considère $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ sur $I = [1, 2]$, le présent théorème ne s'applique pas (et, effectivement, la série des intégrales des modules diverge), alors que la série converge uniformément (elle est alternée et son reste se majore aisément), donc permet l'échange de la somme de série et de l'intégrale.

Partie C : Quelques applications

§1. *Continuité sous le signe $\int$.*

Théorème 1. *Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes sur $A \times I$, où A est une partie de $\mathbb{R}^m$ telle que*

(i) *pour tout élément x de A, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I,*
(ii) *pour tout élément t de I, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A,*
(iii) *il existe une fonction φ continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que $|f(x, t)| \leqslant \varphi(t)$ pour tout (x, t) de $A \times I$.*

Alors la fonction g définie sur A par $g(x) = \int_I f(x, t)\, dt$ est continue.

Démonstration: On applique le théorème de convergence dominée. L'intégrabilité en t provient de la domination par φ (donc g existe). Exprimons la continuité de g sous forme séquentielle. Choisissons un point x de A et une suite (x_n) d'éléments de A, ayant pour limite x. Il convient de montrer que $g(x_n)$ tend vers $g(x)$. Or, $g(x_n) = \int_a^b f(x_n, t)\, dt$; posons $f_n(t) = f(x_n, t)$: ces fonctions sont intégrables sur I par hypothèse, et l'hypothèse de domination s'écrit $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$. La continuité partielle (en x à t fixé) montre que $f_n(t)$ tend vers $f(x, t)$. Le théorème de convergence dominée fait le reste. ♦

§2. *Dérivation sous le signe $\int$.*

Théorème de Leibniz. *Soit A et I deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $A \times I$ à valeurs réelles ou complexes, telle que*

(i) *pour tout élément x de A, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I,*
(ii) *pour tout élément t de I, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est dérivable sur A,*
(iii) *pour tout élément x de A, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I,*
(iii) *et il existe une fonction φ continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que $|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)| \leqslant \varphi(t)$ pour tout (x, t) de $A \times I$.*

Alors la fonction g définie sur A par $g(x) = \int_I f(x, t)\, dt$ est dérivable sur A et

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt\,.$$

Si, de plus, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur A pour tout t fixé, alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A.

Démonstration: On applique la même méthode, considérant la dérivée comme une limite d'un point de vue séquentiel. Il suffit de démontrer le théorème dans le cas où f est à valeurs réelles, ce qui entraîne le cas où f est à valeurs complexes (par partie réelle et imaginaire).
La fonction g existe par l'hypothèse (i) du théorème. On choisit une suite (h_n) de limite nulle et $x \in A$, de sorte que les segments $[x, x+h_n]$ restent inclus dans A. On a

$$\frac{g(x+h_n)-g(x)}{h_n} = \int_I \frac{f(x+h_n,t)-f(x,t)}{h_n}\,dt\,.$$

On considère donc la suite de fonctions définie par $u_n(t) = \dfrac{f(x+h_n,t)-f(x,t)}{h_n}$. Le théorème des Accroissements Finis (applicable puisque la fonction f est partiellement dérivable en x sur $[x, x+h_n]$ par hypothèse (ii)) montre qu'il existe $z \in [x, x+h_n]$ vérifiant

$$|u_n(t)| = |\frac{\partial f}{\partial x}(z,t)| \leqslant \varphi(t)\,.$$

Or, u_n est continue par morceaux comme $t \mapsto f(x,t)$ et intégrable sur I (hypothèse (i)). La dérivabilité partielle de f au point (x,t) entraîne la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) vers la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$. Cette dérivée partielle est intégrable sur I (c'était évident par la majoration par φ, hypothèse (iv)); le seul point non évident, et qui doit figurer en hypothèse, est la continuité de la dérivée partielle: hypothèse (iii)). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, qui nous apprend que $\dfrac{g(x+h_n)-g(x)}{h_n}$ tend vers $\displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$, d'où le résultat. Pour la continuité il suffit d'appliquer le théorème précédent. ♦

§3. *Formule de Fubini.*

Sans prétendre bâtir une théorie de l'intégrale double, on peut atteindre un résultat "à la Fubini" avec les outils précédents. Nous supposons prouvé que les sommes de Riemann d'une fonction continue par morceaux sur un segment convergent vers son intégrale.

Théorème de Fichtenholz. *Soit une application* f *de* $[a,b]\times[c,d]$ *dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *telle que les applications partielles* $x \mapsto f(x,y_0)$ *et* $y \mapsto f(x_0,y)$ *soient continues par morceaux pour tous* x_0 *et* y_0, *et que les fonctions* $y \mapsto \int_a^b f(x,y)\,dx$ *et* $x \mapsto \int_c^d f(x,y)\,dy$ *soient continues par morceaux. Alors on a la formule*

$$\int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big)\,dy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy\Big)\,dx\,.$$

Démonstration: Posons $h = d-c$. L'intégrale $g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ est limite de ses sommes de Riemann de la forme $R_n(x) = \dfrac{h}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x, c+k\dfrac{h}{n})$, parce que la fonction partielle $y \mapsto f(x,y)$ est continue par morceaux pour tout x. Chacune de ces sommes est manifestement une fonction continue par morceaux de la variable x, en tant que combinaison linéaire. De plus, on a une majoration uniforme: $|R_n(x)| \leqslant h\|f\|_\infty$. Et la fonction g a été supposée continue par morceaux. Par conséquent, le théorème de convergence bornée s'applique et montre que

$$\lim_n \int_a^b R_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_n R_n(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx\,.$$

Cependant, on a

$$\int_a^b R_n(x)\,dx = \frac{h}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^b f(x, c+k\frac{h}{n})\,dx = \frac{h}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_1(c+k\frac{h}{n})$$

en ayant posé $f_1(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$. Cette fonction f_1 est aussi continue par morceaux par l'hypothèse posée. Dans ces conditions, l'intégrale de R_n est une somme de Riemann de f_1 et tend vers l'intégrale de f_1, qui n'est autre que $\int_c^d \big(\int_a^b f(x,y)\,dx\big)\,dy$, ce qu'il fallait. ♦

Il n'est guère plus difficile de produire un théorème d'interversion des intégrales lorsque l'un des deux intervalles est ouvert. Par exemple, l'énoncé suivant:

Théorème 2. *Soit une application* f *de* $[a,b]\times\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *telle que*

(i) *les applications partielles* $x\mapsto f(x,y_0)$ *et* $y\mapsto f(x_0,y)$ *sont continues par morceaux pour tous* x_0 *et* y_0*;*

(ii) *les fonctions* $y\mapsto \int_a^b f(x,y)\,dx$ *et* $x\mapsto\int_0^\infty f(x,y)\,dy$ *sont continues par morceaux;*

(iii) *il existe une fonction* φ *intégrable sur* $\mathbb{R}_+$ *telle que pour tout* $x\in[a,b]$ *et* $y\geqslant 0$ *on ait* $|f(x,y)|\leqslant\varphi(y)$.

Alors on a la formule

$$\int_0^\infty\Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big)\,dy=\int_a^b\Big(\int_0^\infty f(x,y)\,dy\Big)\,dx\,.$$

Partie D : Les exemples.

Exemple 1. Voyons le comportement de $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1+t+\cdots+t^n}=\int_0^1\frac{(1-t)\,dt}{1-t^{n+1}}$. La suite $f_n(t)=\dfrac{1}{1+t+\cdots+t^n}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers $1-t$. La convergence uniforme a en fait lieu mais n'est pas évidente. En revanche, le théorème de convergence monotone s'applique instantanément (la suite (f_n) décroît) et le théorème de convergence bornée aussi bien ($f_n(t)\leqslant 1$).

Exemple 2. Le théorème de convergence bornée donne une solution élégante au problème suivant, que Cantor traita avec force suites extraites.

> *Etant données deux suites réelles* (a_n) *et* (b_n)*, telles que la suite* $u_n=a_n\cos nx+b_n\sin nx$ *tende vers 0 tout au long d'un intervalle* $J=[\alpha,\beta]$*, est-il vrai que ces deux suites tendent vers 0 ?*

La solution consiste à transformer l'expression proposée pour la mettre sous la forme $u_n=\rho_n\cos(nx+\theta_n)$, avec $\rho_n^2=a_n^2+b_n^2$. Si ρ_n ne tend pas vers 0, on peut en extraire une suite $\rho_{\varphi(n)}$ minorée par une constante $\delta>0$. Ainsi, la suite $v_n(x)=\dfrac{u^2_{\varphi(n)}}{\rho^2_{\varphi(n)}}$ tend toujours vers 0 et est uniformément bornée (par 1). On applique le théorème de convergence bornée, ce qui donne (avec $p=\varphi(n)$)

$$\int_J v_n=\frac{\beta-\alpha}{2}+\frac{\sin(p\beta+\theta_p)-\sin(p\alpha+\theta_p)}{4p}\longrightarrow_{p\to\infty}0$$

énoncé manifestement absurde.

Exemple 3. Considérons la série géométrique $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ sur l'intervalle $[0,1]$. Elle n'y converge pas normalement, ni même uniformément car le reste est au signe près $\dfrac{x^{n+1}}{1+x}$ dont la borne supérieure ne tend pas vers 0. Soit $f_N(x)=\sum\limits_{n=0}^{N}(-1)^n x^n$. Comme il s'agit d'une série alternée, on sait que ses sommes partielles restent comprises entre les deux premières sommes partielles, soit $0\leqslant 1-x\leqslant f_N(x)\leqslant 1$. Ainsi, la suite $(f_N(x))$ converge simplement sur $[0,1[$ vers $\dfrac{1}{1+x}$, en restant uniformément bornée. Au point $x=1$ la convergence n'a plus lieu, mais ce n'est pas grave car on peut modifier arbitrairement f_N en posant $f_N(1)=\dfrac{1}{2}$, de sorte que ces fonctions sont continues par morceaux, ont la même intégrale que précédemment, et convergent simplement (partout !) vers $\dfrac{1}{1+x}$. Le théorème de convergence bornée s'applique alors et donne

$$\int_0^1\frac{dt}{1+t}=\ln 2=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\,.$$

Pour obtenir ce dernier résultat avec des méthodes plus “classiques”, il faut calculer le reste de la série, l'intégrer entre 0 et 1, et majorer cette intégrale.

Cet exemple ne peut pas être abordé par le théorème d'intégration des séries, parce que la série des intégrales des valeurs absolues ne converge pas puisque $\int_0^1 |(-1)^n x^n|\, dx = \frac{1}{n+1}$.

Exemple 4. Considérons la série entière introduite ci-dessus

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

et tentons de l'intégrer terme à terme sur $[0,1]$. La convergence uniforme a lieu mais n'est pas évidente; la convergence normale n'a pas lieu par divergence de la série harmonique. Cependant, posons $g_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$; alors $\int_{[0,1]} |g_n| = \frac{1}{n(n+1)}$, terme général d'une série convergente. Le théorème d'intégration des séries s'applique et donne aussitôt

$$\int_{[0,1]} \ln(1+x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+1)} .$$

Cette intégrale vaut, en fait, $2\ln 2 - 1$ par application du calcul de primitives.

Exemple 5. Soit $f(x,t) = \dfrac{1-\cos t}{\sqrt{\sin^2 t + x\cos^2 t}}$ et $F(x) = \int_0^{\pi/2} f(x,t)\, dt$. Cette fonction est clairement décroissante et continue (théorème sur les intégrales à paramètre). On a

$$F(0) = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{\sin t}\, dt = \int_0^{\pi/2} \tan\frac{t}{2}\, dt = \ln 2 .$$

Ainsi, F est bornée. Sa continuité en 0 n'est pas évidente car la fonction intégrée n'est peut-être pas continue au voisinage de $x = 0$. Mais le théorème de convergence monotone (sur un intervalle compact) vient à la rescousse, car pour toute suite (x_n) décroissante de limite nulle on a $\lim f(x_n, t) = \tan\frac{t}{2}$ (convergence simple et monotone de surcroît) et la fonction $t \mapsto \tan\frac{t}{2}$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi, $F(x_n)$ tend vers $F(0)$ et F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

On peut de même déterminer la limite de F à l'infini: si (x'_n) est une suite croissante de limite $+\infty$, pour tout t fixé $f(x'_n, t)$ tend vers 0, excepté pour $t = \frac{\pi}{2}$. Cette convergence est encore monotone et la fonction-limite est continue par morceaux sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Le théorème de convergence monotone sur les compacts entraîne que $F(x'_n)$ tend vers l'intégrale de la fonction caractéristique de $\{\frac{\pi}{2}\}$, soit 0. Donc $\lim_{\infty} F = 0$.

On s'intéresse alors à F'. Pour $x > 0$ la dérivation est possible selon la règle de Leibniz (la dérivée partielle est continue), et donne:

$$F'(x) = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{(1-\cos t)\cos^2 t}{(\sin^2 t + x\cos^2 t)^{3/2}}\, dt$$

qui est visiblement croissante. On considère, comme ci-dessus, $F'(x_n)$. On a encore

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, t) = \frac{(1-\cos t)\cos^2 t}{\sin^3 t} = h(t)$$

et cette convergence est monotone. Mais la fonction-limite h n'est pas intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, donc selon le théorème de convergence monotone (sur un intervalle ouvert cette fois) on a $\lim F'(x_n) = -\infty$. La croissance de F' montre alors que $\lim_0 F'(x) = -\infty$. Enfin, en utilisant le Théorème des Accroissements Finis, on apprend que $F'(0) = -\infty$.

Exemple 6. Dans certains cas, la domination n'apparaît plus, parce que la convergence en moyenne n'a pas lieu. Soit par exemple une fonction f continue sur $[0,1]$, et $g_n(t) = nt^n f(t)$. Cette suite de fonctions converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction nulle. Cependant, les intégrales des g_n ne tendent pas vers 0. On peut changer de variable et poser $u = t^n$, de sorte que

$$\int_0^1 g_n(t)\,dt = \int_0^1 uf(u^{1/n})u^{-1+1/n}\,du\,.$$

On introduit la suite de fonctions $h_n(u) = u^{1/n}f(u^{1/n})$. Elle est uniformément bornée (par $\|f\|_\infty$) et converge simplement vers $f(1)$. Il en résulte que $\int_0^1 g_n(t)\,dt$ tend vers $f(1)$. Le traitement direct de cet exercice nécessite un découpage de l'intervalle (technique qui conserve tout son intérêt dans d'autres situations).

Exemple 7. Un autre exemple, très intéressant, est fourni par l'exercice suivant sur le réarrangement décroissant. Cet exercice est pénible dans le cadre strict de l'intégrale de Riemann (sans les théorèmes de Lebesgue).

> *Soit (u_n) une suite de réels positifs, de limite nulle. On définit, pour $x > 0$, $N(x)$ comme étant le nombre de termes de la suite supérieurs ou égaux à x. On pose: $N(0) = 0$ par convention. Prouver que $N(x)$ est bien défini, que la série de terme général u_n converge si, et seulement si N est intégrable sur $]0,+\infty[$ et qu'en ce cas $\int_{\mathbb{R}_+^*} N = \sum u_n$.*

Pour comprendre l'efficacité annoncée, il convient de voir la fonction N différemment. En fait, pour déterminer $N(x)$ avec $x > 0$ il suffit de “balayer” la suite (u_n) et de “marquer” 1 chaque fois que $u_n \geqslant x$. La formule s'écrit: $N = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{]0,u_n]}$. Il s'agit d'une série de fonctions positives, continues par morceaux. Le théorème d'intégration des séries positives (sur un intervalle ouvert) s'applique ici, et montre que N est intégrable si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} \mathbf{1}_{]0,u_n]}$ converge; cette dernière somme n'est autre que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Si donc la série converge, on a la formule demandée par application du théorème d'interversion.

La solution “classique” de cete exercice consiste à réaliser le réarrangement décroissant de (u_n) “à la main”, ce qui n'est pas commode.

Exemple 8. Nos méthodes permettent, par exemple, de calculer aisément l'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt$ à partir de la majoration $\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ et du fait que $\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ tend vers e^{-t^2} (on se ramène à des intégrales de Wallis). Le traitement “classique” de cette idée nécessite de minorer l'exponentielle sur $[0,\sqrt{n}]$ par $\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n$ et de comparer les intégrales des encadrants.

Exemple 9. Voici un exercice où la recherche de la domination n'est pas immédiate:

> *Calculer* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{np-p^2}}$.

On introduit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ et on tente de montrer que la limite est $\int_0^1 f(x)\,dx = \pi$. Soit $f_n(x) = f\left(\frac{k}{n}\right)$ sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$, nulle sur $\left[0, \frac{1}{n}\right[$. Les f_n convergent simplement vers f par continuité de celle-ci. Il reste à trouver une domination de $f_n(x)$, ce qui n'est pas immédiat car la fonction f n'est pas monotone ! En fait, on prend $\varphi(x) = \mathrm{Max}(f(x), f(\frac{x}{2}))$: si x se trouve dans $[\frac{1}{2}, 1[$, la croissance de f assure que $f_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$ et si x se trouve dans $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[\subset [\frac{1}{n}, \frac{1}{2}[$ on a

$$f_n(x) \leqslant f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant f\left(\frac{k+1}{2n}\right) \leqslant f\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant \varphi(x)\,.$$

La fonction φ est intégrable sur $]0,1[$ comme f et $f(\frac{x}{2})$, ce qui amène le résultat voulu.

Exemple 10. On peut appliquer le théorème sur les séries avec succès pour des intégrales ayant une bonne convergence. Par exemple, on peut calculer ainsi la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$. Ou encore, l'exercice suivant (avec une série géométrique):

Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t}{\operatorname{sh} t}\,dt = \frac{\pi^2}{4}$.

Exemple 11. Le théorème de convergence dominée permet de démontrer quantité de passages à la limite. Considérons, par exemple, une fonction f continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et dominée par un polynôme ($|f(t)| \leqslant A + Bt^q$ pour des constantes A, B, q fixées), et la tranformée de Laplace de f:

$$Lf(p) = \int_0^\infty e^{-tp} f(t)\,dt = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-u} f(\tfrac{u}{p})\,du\,.$$

Prenant $t \in [a, +\infty[$, avec $a > 0$, on a $|e^{-pt}f(t)| \leqslant e^{-at}|f(t)|$, et cette dernière fonction est intégrable; le théorème de continuité des intégrales à paramètre s'applique et donne la continuité sur $[a, +\infty[$ de Lf; donc aussi sur $]0, +\infty[$. Si jamais $Lf(0)$ existe, alors f est certainement intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et on peut tout dominer par $|f|$; alors Lf est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour examiner le comportement de la transformée de Laplace vers l'infini, on écrit $pLf(p) = \int_0^\infty e^{-u} f(\frac{u}{p})\,du$. La suite de fonctions $g_p(u) = f(\frac{u}{p})$ converge simplement vers $f(0)$ sur $\mathbb{R}_+$. Il reste à assurer la domination. On a alors $\left|f(\frac{u}{p})\right| \leqslant A + B\left(\frac{u}{p}\right)^q \leqslant A + Bu^q$ si on prend $p \geqslant 1$. Et la fonction $u \mapsto e^{-u}(A + Bu^q)$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On en tire que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} pLf(p) = f(0)\int_0^\infty e^{-u}\,du = f(0)$, donc que $Lf(p) \sim \dfrac{f(0)}{p}$ vers l'infini.

Lorsque p tend vers 0, le résultat dépend du comportement de f vers l'infini. Supposons par exemple que f ait une limite finie vers l'infini; elle est donc bornée et la suite de fonctions $h_p(u) = f(\frac{u}{p})e^{-u}$ tend vers $(\lim\limits_\infty f)e^{-u}$ en étant dominée par $\|f\|_\infty e^{-u}$. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée pour trouver $LF(p) \sim \dfrac{\lim\limits_\infty f}{p}$ quand p tend vers 0.

Conclusion

La recherche d'une présentation élémentaire des théorèmes de convergence des suites d'intégrales n'est pas nouvelle, et d'autres pistes ont été explorées. On trouvera des indications historiques sur ce sujet dans [3] et [5].

En ce qui concerne l'intérêt pédagogique, les exemples présentés montrent assez qu'on se trouve mieux armé avec nos théorèmes de convergence que sans ceux-ci pour des applications comme la transformée de Laplace (pour la transformée de Fourier c'est moins net). Les étudiants assimilent, d'ailleurs, rapidement les notions de monotonie et de domination qui leur paraissent plutôt naturelles. Cette présentation a aussi des inconvénients. En premier lieu, elle amoindrit le rôle joué par la convergence uniforme, ce qui est néfaste à la compréhension de cette dernière (et on constate que les étudiants attachent moins de prix à la convergence uniforme qu'autrefois). D'autre part, les activités traditionnelles de découpage d'une intégrale (ou d'une somme) selon deux ou trois intervalles dans le but de contrôler la dépendance vis-à-vis de divers paramètres sont nécessaires dans une formation mathématique digne de ce nom, mais paraissent moins évidentes lorsque les théorèmes de convergence ont été donnés.

Bibliographie

[1] J.W. Lewin, *A Truly Elementary Approach to the Bounded Convergence Theorem,* American Mathematical Monthly, 93 (1986), pp. 395-397

[2] J.W. Lewin, *Some Applications of the Bounded Convergence Theorem for an Introductory Course in Analysis,* American Mathematical Monthly, 94 (1987), pp. 988-993

[3] Frédéric Riesz, Bela S.Z. Nagy, Leçons d'Analyse Fonctionnelle, Acad. Sci. Hungarica, p. 38

[4] M. Coursac, *Les nouveaux théorèmes d'intégration en Mathématiques Spéciales,* Quadrature, 30, p.21

[5] M. Guigue, *Convergence d'une suite d'intégrales,* Revue de Mathématiques Spéciales (1985-1986) num. 5, pp. 183-185

[6] Problème proposé au concours d'entrée à l'ENSET de Cachan en 1978, Option A1, première épreuve.

[7] A. Warusfel, *Fubini, simple et efficace,* Revue de Mathématiques Spéciales (1993-1994) num. 8, pp. 529-539

[8] C. Arzelà, *Sulla integrabilità di une serie di funzioni,* Rendiconti Acc. dei Lincei (4) tome I, 1885, pp. 321-326,532-537,566-569

[9] J.-M. Arnaudiès, *L'intégrale,* Revue de Mathématiques Spéciales (1989-1990) num. 6, pp. 287-289

[10] H. Pépin, *Convergence monotone et convergence dominée,* Revue de Mathématiques Spéciales (1996-1997) num. 2, pp. 199-206