L'INTÉGRALE SIMPLE.
Proposition pour le programme de 3ème semestre de DEUG MIAS,
É. Charpentier, université Bordeaux I.
(Version non définitive.)

Table des matières

1 Introduction. L'idée

1.1 Intégrale des fonctions en escalier sur un segment $[a, b]$.

(Faire un dessin. Remuer les mains. Écrire la somme des aires des rectangles.)

1.2 L'idée.

L'idée est de ramener à ce cas simple le calcul de l'aire qui se trouve sous une courbe qui n'est plus en escalier $\longrightarrow$ sommes de Riemann.

On voit tout de suite ce qui ne va pas avec une telle approche : prenez le graphe de la fonction $x \to x^{-1/2}$ sur $]0, 1]$. L'aire sous la courbe est finie. On voudrait donc que la fonction soit intégrable sur $]0, 1]$. Mais si vous essayez d'approximer son graphe par celui d'une fonction en escalier, il y a un problème avec la première marche : vous la choisissez à la hauteur $f(x_1)$ (avec x_1 dans l'intervalle I_1 de la subdivision), et en prenant x_1 arbitrairement voisin de 0, cette hauteur va être arbitrairement grande. Alors, même si vous avez pris soin de prendre toutes vos marches moins larges qu'un certain $\delta > 0$, aussi petit que soit ce δ, vous pourrez rendre vos sommes de Riemann arbitrairement grandes, et la définition de Riemann ne s'applique pas.

La raison est bien simple : une fonction en escalier (à un nombre *fini* de marches) ne peut épouser partout la forme d'une courbe non bornée – aussi petites qu'on prenne les marches. Elle ne peut non plus épouser partout la forme d'une courbe qui oscille trop, même si elle est bornée.

Ce qui ne va pas dans la définition de Riemann, c'est qu'elle suppose qu'on prenne une même largeur δ tout le long du graphe de la fonction. Or on voit bien que là où la fonction varie rapidement, on doit diminuer le pas des marches.

Euler, dans ses *institutiones calculi integralis* (1768), parlant du calcul numérique des intégrales par ce qu'on appelle aujourd'hui les sommes de Riemann, écrivait : *"Nous avons déjà noté que les distances $a_j - a_{j-1}$, par lesquelles x est supposé croître successivement, doivent être prises très petites pour que les valeurs correspondantes $f(a_{j-1})$, $f(a_j)$, ne diffèrent à leur tour guère l'une de l'autre ; à partir de cela, il faut juger si les intervalles $a_1 - a$, $a_2 - a_1$, ... doivent être pris égaux ou inégaux. En fait, là où la valeur de $f(x)$ ne change guère lorsque x varie, l'intervalle par lequel x croît peut être pris grand sans danger. D'autre part, là*

où des changements peu importants de x conduisent à des variations violentes de $f(x)$, on devra prendre l'intervalle très petit". (Cité dans Mawhin [3].)
Or, c'est vrai non seulement pour le calcul pratique, mais aussi pour les questions théoriques, quand on a affaire à des fonctions qui présentent des irrégularités vraiment très violentes. Comme le dit Borel [2] [1] : *"Un caractère important de cette définition [de Riemann] est le suivant : la division en intervalles est entièrement indépendante des propriétés de la fonction ; si l'on considère deux fonctions différentes, on prendra pour ces fonctions les mêmes intervalles, c'est-à-dire qu'on leur appliquera* un procédé de calcul uniforme. *C'est évidemment là un grand avantage pour le calcul. Mais c'est en même temps un inconvénient : un tel procédé, qui ne tient pas compte des propriétés particulières de la fonction à laquelle il s'applique, peut être comparé à ces vêtements confectionnés qui ne sauraient être exactement ajustés, surtout s'il s'agit d'habiller un individu difforme : certaines fonctions singulières ont pu être justement comparées aux types monstrueux de la biologie"*.

La solution est là : *remplacer dans la définition de Riemann la constante δ par une* fonction *dont on peut adapter les propriétés à celles de la fonction f à intégrer* – ne garder que les subdivisions qui adhèrent au plus près au graphe de la fonction, en suivant ses irrégularités. D'où les définitions que voici.

2 Définition(s)

Définition 2.1 1. *Une* subdivision pointée *(s.p.) d'un intervalle $I = [a, b]$ $(a < b)$ de $\mathbb{R}$ est un ensemble fini $P = \{(x_1, I_1), \ldots, (x_n, I_n)\}$, où $I_1, \ldots, I_n$ sont des intervalles de I, d'intérieurs disjoints deux à deux, dont la réunion est I, et où $\forall i$, x_i est un point de I_i.*

2. *On note $\ell(I)$ la longueur d'un intervalle I*

3. *On appelle* jauge *sur un segment I de $\mathbb{R}$ une application $\delta : I \to \mathbb{R}_+^*$.*

4. *Étant donné une jauge δ sur I, une s.p. $\{(x_1, I_1), \ldots, (x_n, I_n)\}$ de I sera dite "fine selon la jauge δ" ou, pour le dire plus vite, δ-fine si pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$, $\ell(I_i) < \delta(x_i)$.*

1. Reproduit dans [1], pp. 1277-1307. La citation est p. 1301. Cité aussi dans Mawhin [3].

On voit que la jauge contrôle la taille des intervalles de la subdivision – d'où son nom. Avant d'aller plus loin, il faut vérifier une petite chose toute bête, mais sans laquelle tout cela n'aurait guère d'intérêt :

Proposition 2.1 *Pour toute jauge δ, il existe des s.p. δ-fines.*

Preuve.
Les ouverts $\big(]x-\delta(x), x+\delta(x)[\big)_{x\in[a,b]}$ recouvrent $I=[a,b]$, on extrait un sous-recouvrement fini $\big(]x_i-\delta(x_i), x_i+\delta(x_i)[\big)_{i=1}^n$, avec $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$, *minimal* en ce sens qu'on ne peut plus en extraire un sous-recouvrement de $[a,b]$. On choisit $a_0=a$, a_i entre $\max\{x_{i+1}-\delta(x_{i+1}), x_i\}$ et $\min\{x_i+\delta(x_i), x_{i+1}\}$ ($1 \le i \le n-1$), et $a_n=b$. Les intervalles $I_i=[a_{i-1},a_i]$ ($1\le i\le n$), et les points x_i définissent une s.p. δ-fine.
Maintenant, encore quelques définitions :

Définition 2.2 *Étant donné une fonction f sur I, à valeurs réelles, et une s.p. $P=\{(x_1,I_1),\ldots,(x_n,I_n)\}$ de I, on note :*

$$S(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ell(I_i)$$

("Somme de Riemann" de f relative à P).

Définition 2.3 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, compact.*

1. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite intégrable (au sens de Riemann complété) sur I s'il existe un réel J tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge $\delta : I \to \mathbb{R}_+^*$ t.q. pour toute s.p. P δ-fine de I, on ait :*

$$|J - S(f,P)| < \varepsilon. \tag{1}$$

   J est alors unique, on le note

$$\int_I f(t)dt = J,$$

   ($\int_a^b f(t)dt$ si $I=[a,b]$) et on l'appelle l'intégrale (de Riemann complète) de f sur I. (On définit aussi alors $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$.)

2. *Une jauge satisfaisant aux conditions ci-dessus sera dite adaptée à f sur I à la précision ε, ou, plus brièvement: ε-adaptée à f sur I.*

3. *f sera dite intégrable* au sens de Riemann *("R- intégrable") si elle est intégrable et que pour tout ε on peut prendre une jauge ε-adaptée* constante.

Cette définition est due indépendamment à Kurzweil (1957) et à Henstock (1961).

Remarque 2.1 *La définition 2.3 et les résultats qui vont suivre resteront valables (sauf mention contraire) sur un intervalle borné non compact : par exemple f sera intégrable sur $]a,b[$ ssi elle l'est sur $[a,b]$, quitte à définir (n'importe comment) f en a et en b : le résultat n'en dépendra pas : cf. plus loin. De même, tout cela restera valable sur un intervalle non borné, à condition de* ne tenir compte que des intervalles bornés *de la subdivision dans le calcul des sommes de Riemann. Cela signifie que si I n'est pas borné, f sera intégrable sur I ssi elle l'est sur tout sous-intervalle compact de I et que l'intégrale de f sur ces sous-intervalles tend vers une limite quand ces sous-intervalles viennent "remplir" I de n'importe quelle façon. Soyons un peu plus précis :*
On dit que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ si elle l'est sur tout segment $[a,b]$ et que $\int_a^b f(t)dt$ tend vers une limite quand $a \to -\infty$ et $b \to \infty$. Cette limite est alors notée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$, ou $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt$. Définition analogue pour l'intégrale sur $[a,+\infty[$, etc.

Avis. Maintenant, tout peut aller très vite. Outre diverses propriétés qu'on va rencontrer tout de suite (dont l'intégrabilité des fonctions continues ou monotones sur les compacts, la relation de Chasles, la continuité de l'intégrale indéfinie), les résultats clés sont : le Théorème Fondamental (lien avec les primitives) et l'intégration par parties et la formule de changement de variables ; le théorème de convergence monotone, et le théorème de convergence encadrée (ou dominée) et ses applications aux intégrales dépendant d'un paramètre.
Tout le reste ne mérite qu'un *glissendo*.
Ensuite, il faut mettre beaucoup d'exemples et d'applications qu'on trouve dans tous les cours et TD usuels.

Plus tard (au 4ème semestre ?), la même présentation de l'intégrale, mais dans $\mathbb{R}^d$, donnera les énoncés analogues pour les théorèmes de convergence et les intégrales paramétriques. On pourra intégrer sur des domaines quelconques et faire une introduction à la notion de mesure (=l'intégrale d'une fonction caractéristique), qui pourra être utile pour le cours de licence[2], et énoncer un bon théorème de Fubini (sans restriction), et une bonne formule de changement de variable.

2. Où, du coup, on n'aura plus besoin de construire la mesure par la méthode de Lebesgue – ce qui ne passe jamais – et où, en *inversant la vapeur*, on pourra reconstruire l'intégrale

3 Premières propriétés

Proposition 3.1 *1. Il existe des fonctions intégrables (les constantes).*

2. L'intégrale est linéaire.

3. Si f et g sont intégrables et que $|f| \leq g$, on a l'inégalité[3] $|\int_a^b f| \leq \int_a^b g$ *; par conséquent l'intégrale est* **positive***.*

4. Si une fonction f est intégrable sur $[a,b]$, la fonction $x \mapsto f(x+c)$ $(c \in \mathbb{R})$ est intégrable sur $[a+c, b+c]$ et on a : $\int_a^b f(t)dt = \int_{a+c}^{b+c} f(t+c)dt$.

5. Une fonction nulle sauf en un nombre fini de points est intégrable (et même R-intégrable) et son intégrale est nulle ; conséquence : si $f = g$ sauf en un nombre fini de points et que f est intégrable, g l'est aussi et a la même intégrale.

Avec la proposition 2.1, on peut vérifier que le **critère de Cauchy** s'applique pour le type de convergence sous-jacent à la définition de l'intégrabilité, i.e. :

Proposition 3.2 *Si $\forall \varepsilon > 0$, existe une jauge δ t.q. pour toutes s.p. P, P' δ-fines on ait $|S(f,P') - S(f,P)| < \varepsilon$, f est intégrable sur I.*

Je crois que le mieux est d'admettre ce critère *par analogie* avec le critère de Cauchy usuel : ça fait gagner du temps, et c'est une excellente occasion de faire appel à l'aptitude de nos étudiants à *faire des analogies*. Pour les étudiants intéressés par une preuve, voici l'idée : si $\forall \varepsilon > 0$, existe une jauge δ t.q. pour toutes s.p. P, P' δ-fines on ait $|S(f,P') - S(f,P)| < \varepsilon$, on a immédiatement (récurrence[4]) l'existence d'une suite décroissante de jauges δ_n correspondant à la suite $\varepsilon_n = 1/n$, et une suite associée P_n de s.p. δ_n-fines, et on vérifie que la suite $\big(S(f,P_n)\big)_n$ est de Cauchy, puis que $\forall m \geq 1$, et pour toute s.p. δ_m-fine, l'inégalité (1) a lieu pour $\varepsilon = 2/m$. Donc f est intégrable sur I.

---

selon le point de vue de Lebesgue, parce qu'il est utile d'avoir les *deux* points de vue (qui sont *complémentaires*), et parce que celui de Lebesgue est plus simple pour le passage à l'intégrale abstraite et les applications aux probabilités.

3. N.B. une telle fonction g peut ne pas exister : contrairement au cas particulier de l'intégrale Riemann, f intégrable n'implique pas $|f|$ intégrable, comme on le verra. Il faut avoir à l'esprit l'idée que l'intégrale complète est un peu à l'intégrale de Riemann ce que les séries convergentes sont aux séries absolument convergentes.

4. Et axiome du choix dépendant (comme déjà dans Borel -Lebesgue, d'ailleurs), car la récurrence ne peut prouver que l'existence de suites *finies* de longueur arbitraire ... On ne le dit jamais, je ne sais pas si c'est bien.

Une première conséquence utile (et triviale) de ce critère de Cauchy est que

Corollaire 3.1 *L'intégrale a la propriété de restriction (pour les intervalles), i.e. si f est intégrable sur $[a,b]$ et si $[c,d] \subset [a,b]$, f est intégrable sur $[c,d]$. En particulier, l'intégrale indéfinie $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est bien définie (!)*
N.B. On a aussi une première version de la "relation de Chasles" : si f est intégrable sur $[a,b]$ $(a < b)$, et si $a < c < b$, alors f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$, et $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Nous verrons bientôt une réciproque.

Corollaire 3.2 *Une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ (I compact) est intégrable.*

Preuve. soit $\varepsilon > 0$; soit δ une jauge t.q. $\forall x, \forall y, |y-x| < \delta(x) \Longrightarrow |f(y)-f(x)| < \varepsilon$; soient $P = \{(x_1, I_1), \ldots, (x_n, I_n)\}$, $P' = \{(x'_1, I'_1), \ldots, (x'_m, I'_m)\}$, deux s.p. δ-fines, et soit P'' une s.p. $P'' = \{(y_{ij}, I_i \cap I'_j)_{i,j}\}$, obtenue en piochant dans chaque $I_i \cap I'_j$ non vide un y_{ij}. On a $\forall i, j$ t.q. $I_i \cap I'_j \neq \emptyset$, $|f(x_i) - f(y_{ij})| < \varepsilon$ et $|f(y_{ij}) - f(x'_j)| < \varepsilon$, et donc : $|S(f, P') - S(f, P)| = \left| \sum_{ij} \big(f(x_i) - f(x'_j)\big) \ell(I_i \cap I'_j) \right| \leq \sum_{ij} \big(|f(x_i) - f(y_{ij})| + |f(y_{ij}) - f(x'_j)|\big) \ell(I_i \cap I'_j) < 2\varepsilon(b-a)$. Le critère de Cauchy conclut.

N.B. Pour le calcul numérique, on a besoin de savoir que les fonctions continues sont *Riemann* -intégrables. C'est la même preuve, sauf que là il faut utiliser le théorème de Heine pour minorer les $\delta(x)$ par une constante ($\longrightarrow$ TD ?)

Corollaire 3.3 *Les fonctions monotones sont intégrables (sur les compacts).*

Preuve. Critère de Cauchy. (Là encore, *exercice*, pour les TD : les fonctions monotones sont *aussi Riemann*- intégrables.)

Proposition 3.3 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est croissante, et si on note $a_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a_k) \leq \int_a^b f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a_k).$$

Résultat analogue pour f décroissante.

Pour la preuve : faire un dessin et dire "voyez !"

On en déduit trivialement la **comparaison entre série et intégrale** pour une fonction f décroissante sur $[0, +\infty[$:

Corollaire 3.4 *Soit f une fonction positive décroissante sur $[0, +\infty[$, tendant vers 0 quand $x \to +\infty$. La série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge ssi la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$ (on dit aussi : l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge). Et si elle diverge, on a l'équivalent :*

$$\sum_{n=0}^{N} f(n) \overset{N \to \infty}{\sim} \int_0^N f(t)dt.$$

Proposition 3.4 *Si f est C^1 sur $[a, b]$, et si on note encore $a_k = a + \frac{k}{n}(b - a)$ et qu'on choisi x_k dans $[a_k, a_{k+1}]$, il existe une constante K telle que :*

$$\Big| \int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_k) \Big| \leq \frac{K}{n}$$

Preuve. f' étant continue sur $[a, b]$, elle y est bornée. Notons M sa borne supérieure. D'après l'inégalité des accroissements finis et l'inégalité de la proposition 3.1, on a :

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_k) \Big| = \Big| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} [f(t) - f(x_k)]\, dt \Big| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} M|t - x_k| dt \qquad (2) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} M \frac{b-a}{n} dt \leq \frac{(b-a)^2}{n} M.
\end{aligned}$$

N.B. On a immédiatement la possibilité de faire en TD quelques ex. sur l'intégrale de Riemann : une fonction R- intégrable est bornée, etc. Aussi quelques exemples de calcul numérique par les sommes de Riemann (méthodes des trapèzes, du milieu ...), pour les fonctions R-intégrables.

4 Intégrale et primitives

Voici le Théorème Fondamental (TF) du *calculus*, valable ici sans aucune restriction :

Théorème 4.1 *Soit $a \in \mathbb{R}$, soit f continue et dérivable sur un intervalle ouvert $I \ni a$, borné. Alors $\forall x \in I$, f' est intégrable sur $[a, x]$ et $\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$.*

Preuve.
Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in I$, il existe $\delta(x) > 0$ tel que $\forall y, z \in I$, si $y \leq x \leq z$ et $z - y < \delta(x)$, alors

$$\Big| f(z) - f(y) - (z-y)f'(x) \Big| \leq \frac{\varepsilon(z-y)}{\ell(I)}$$

On a alors, pour toute s.p. δ-fine de $[a, x]$,

$$\begin{aligned} \Big| f(x) - f(a) - S(f', P) \Big| &= \Big| \sum_{i=1}^{n} \big(f(a_i) - f(a_{i-1}) - (a_i - a_{i-1}) f'(x_i) \big) \Big| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{x-a} \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = \varepsilon. \end{aligned} \tag{3}$$

D'où le résultat.

N.B. Si f' est *continue*, on a le même résultat avec l'intégrale de Riemann, en utilisant le théorème de Heine pour minorer les $\delta(x)$ par une constante.

On déduit du théorème la formule d'**intégration par parties** (sans aucune restriction artificielle) :

Corollaire 4.1 *Soient f, g dérivables sur un intervalle I. Soient a, b dans I. fg' est intégrable sur $[a, b]$ ssi $f'g$ l'est, et alors*

$$\int_a^b fg' = f(b) - f(a) - \int_a^b f'g.$$

Une autre conséquence importante du théorème 4.1 est la formule de **changement de variable** :

Corollaire 4.2 *Si g est dérivable sur $[a, b]$ et si f est une dérivée sur $g([a, b])$*

$$\int_a^b f(g(t))\, g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)ds$$

Preuve. $g([a,b])$ est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires). Il suffit alors d'appliquer le TF à $F \circ g$ et à f).

5 La relation de Chasles

C'est une bonne occasion d'illustrer une nouvelle fois la *souplesse* de la notion de jauge. Là encore, tout tient en quelques mots autour d'un dessin tout bête, et je ne rédige que *for completeness*.

On suppose donc $a < c < b$ et f intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Soient δ_1 une jauge ε-adaptée sur $[a,c]$ et δ_2 une jauge ε-adaptée sur $[c,b]$.

Définissons une jauge comme suit : Pour $x \in [a,c[$ (resp. $x \in]c,b]$), on prend $\delta(x) < \delta_1(x)$ assez petit pour que $x + \delta(x) < c$ (resp. $\delta(x) < \delta_2(x)$ assez petit pour que $x - \delta(x) > c$), et on prend $\delta(c) < \min\{\delta_1(c), \delta_2(c)\}$ assez petit pour que $]c - \delta(c), c + \delta(c)[$ soit inclus dans $]a,b[$.

Soit $P = \{(z_1, K_1), \ldots, (z_p, K_p)\}$ une s.p. de I, δ-fine.
Je dis que les $(z_i, K_i \cap [a,c])$ t.q. $K_i \cap [a,c] \neq \emptyset$ forment une s.p. P_1 de $[a,c]$, i.e. $z_i \in K_i \cap [a,c]$ ssi $K_i \cap [a,c] \neq \emptyset$ (et que les $(z_i, K_i \cap [c,b])$ t.q. $K_i \cap [c,b] \neq \emptyset$ forment une s.p. P_2 de $[c,b]$).

En effet, si $z_i \in [a,c[$ (resp. si $z_i \in]c,b]$) on a $K_i \subset [a, z_i + \delta(z_i)[\subset [a,c[$ donc $K_i \cap [c,b] = \emptyset$ (resp. $K_i \cap [a,c] = \emptyset$), et si $z_i = c$, z_i est dans $K_i \cap [a,c]$ et dans $K_i \cap [c,b]$.

Par construction, P_1 et P_2 sont δ-fines, donc respectivement δ_1-fine et δ_2-fine, et on a immédiatement que $S(f,P) = S(f,P_1) + S(f,P_2)$, d'où : $|\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt - S(f,P)| = |\int_a^c f(t)dt - S(f,P_1) + \int_c^b f(t)dt - S(f,P_2)| < 2\varepsilon$,
ce qui prouve que f est intégrable sur I et que $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

N.B. La relation de Chasles appliquée à **l'intégrale indéfinie**, $\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$, montre (par un encadrement évident) que celle-ci est une **primitive de f si f est continue** (donc toute fonction continue est une dérivée : Cauchy, 1823).

Elle montre encore que l'intégrale indéfinie est continue si f est bornée, car alors $|\int_x^{x+h} f(t)dt| \leq M|h|$ (en observant les sommes de Riemann) : c'est le même argument que pour l'intégrale de Riemann (qui n'est capable de traiter *que ce cas* : f bornée). Si f n'est pas bornée (nous verrons que cela arrive), son intégrale indéfinie est quand même continue. Pour le prouver, il nous faut un lemme évident mais très utile (c'est le *leitmotiv* de l'intégrale complète) :

6 Lemme de la subdivision partielle (Henstock), et continuité de $x \mapsto \int^x f$

Lemme 6.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur I. Soient $\varepsilon > 0$, et δ une jauge ε-adaptée à f sur I. Soient enfin $(K_i)_{1\leq i\leq n}$ des sous-intervalles de I d'intérieurs deux à deux disjoints, $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ des points choisis resp. dans les $(K_i)_{1\leq i\leq n}$, et supposons que $\forall i$, $\ell(K_i) < \delta(x_i)$ (autrement dit les $(x_i, K_i)_{1\leq i\leq n}$ sont des sous-intervalles pointés δ-fins de I : on dit qu'ils forment une* s.p. partielle *δ-fine de I). Alors $\left|\sum_{i=1}^n \big(f(x_i)\ell(K_i) - \int_{K_i} f\big)\right| \leq \varepsilon$;*

Preuve. Là encore, un dessin et une expression clé ("*il n'y a qu'à compléter en une subdivision assez fine*"), et le tour est joué. Je donne une preuve epsilonesque parce que ça ne coûte pas plus cher, et parce que l'idée est intéressante (introduire le η) :

On prend $\eta > 0$; on complète la subdivision. Par exemple, soient J_j $(1 \leq j \leq q)$ les composantes connexes de $I \setminus \cup_i K_i$. Dans chaque J_j, on choisit une jauge $\gamma_j \leq \delta$ et une s.p. P_j γ_j-fine de façon à avoir $|\int_{J_j} f - S(f, P_j)| < \eta$. Les restrictions de δ aux K_i et les γ_j définissent une jauge δ' sur I, les (x_i, K_i) et les P_j définissent une s.p. P δ'-fine, donc δ-fine, de I, et
$\left|\sum_{i=1}^n \big(f(x_i)\ell(K_i) - \int_{K_i} f\big)\right| \leq |S(f,P) - \sum_j S(f,P_j) - \int_I f + \sum_j \int_{J_j} f| \leq \varepsilon + q\eta$,
et cela $\forall \eta > 0$, d'où le résultat.

Proposition 6.1 *Pour toute f intégrable sur $[a,b]$, l'intégrale indéfinie $x \mapsto \int_a^x f$ est continue sur $[a,b]$.*

Preuve Il s'agit de prouver que $\forall x$, $\int_x^{x+h} f(t)dt$ tend vers 0 avec h. Soit $\varepsilon > 0$. Soit δ une jauge ε-adaptée à f. Prenons h t.q. $|h| < \delta(x)$. Notons K le segment joignant x à $x+h$. On a $K \subset]x-\delta(x), x+\delta(x)[$, et le lemme d'Henstock appliqué à (x, K) montre que $\left| \int_x^{x+h} f - f(x)|h| \right| \leq \varepsilon$, d'où $\int_x^{x+h} f \leq \varepsilon + |f(x)h|$. Quitte à diminuer encore $|h|$ de façon à ce que $|f(x)h| \leq \varepsilon$, on aura $\int_x^{x+h} f \leq 2\varepsilon$. C'est tout.

Nous en arrivons aux théorèmes de convergence, valables là aussi sans aucune restriction artificielle :

7 Le théorème de convergence monotone

Théorème 7.1 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non), et $f_n : I \to \mathbb{R}$ ($n \geq 0$), $f : I \to \mathbb{R}$ des applications telles que :*

1. *toutes les f_n sont intégrables sur I ;*
2. *la suite (f_n) est monotone et converge (simplement) vers f sur I.*

Alors f est intégrable sur I ssi *la suite des $\int_I f_n$ converge, et dans ce cas $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$.*

Preuve On peut se contenter d'en donner l'idée, i.e. d'écrire les inégalités (4) et (5) et de remuer les mains (et, en effet, tout le reste n'est que commentaire), en aiguillant les étudiants intéressés sur un polycopié contenant les détails – je suis même disposé à le rédiger.
Je la donne ici *for completeness.*

Quitte à changer le signe, on se ramène au cas où la suite (f_n) est croissante. L'une des implications est évidente : si f est intégrable, la suite (croissante) des $\int_I f_n$ est majorée par $\int_I f$, donc converge. Montrons la réciproque.

On suppose donc que la suite des $\int_I f_n$ converge vers une limite ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N à partir duquel $0 \leq \ell - \int_I f_n \leq \varepsilon$. Comme la suite (f_n) converge (simplement) vers f, il existe pour tout $x \in I$ un rang $M(x)$ (qu'on peut toujours prendre $\geq N$) à partir duquel $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

On veut en déduire que f est intégrable et que $\int_I f = \ell$, i.e. qu'il existe une jauge δ telle que pour toute s.p. P de I, δ-fine, $|S(f, P) - \ell|$ soit majoré par un même nombre tendant vers 0 avec ε.

Soit donc $P = \{(x_1, I_1), \ldots, (x_n, I_n)\}$ une s.p. P de I. On a :

$$
\begin{aligned}
\Big|S(f,P)-\ell\Big| &\le \sum_{i=1}^{n}\Big|f(x_i)-f_{M(x_i)}(x_i)\Big|\ell(I_i) \\
&+\Big|\sum_{i=1}^{n}\Big(f_{M(x_i)}(x_i)\ell(I_i)-\int_{I_i}f_{M(x_i)}(t)dt\Big)\Big|+\Big|\sum_{i=1}^{n}\int_{I_i}f_{M(x_i)}(t)dt-\ell\Big|.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Des trois termes du second membre, le premier est majoré par $\varepsilon\ell(I)$, le dernier par ε car, puisque tous les $M(x_i)$ sont $\geq N$ et inférieurs au plus grand d'entre eux (disons μ), on a :

$$
0\le \ell-\int_I f_\mu=\ell-\sum_i\int_{I_i}f_\mu\le \ell-\sum_i\int_{I_i}f_{M(x_i)}\le \ell-\sum_i\int_{I_i}f_N=\ell-\int_I f_N\le\varepsilon,
$$

et il ne reste donc plus qu'à majorer le deuxième. C'est là qu'il va falloir trouver une jauge adéquate.

Les $M(x_i)$ sont tous compris entre N et le plus grand d'entre eux, μ. Dans la somme à majorer, regroupons les termes correspondant à une même valeur de $M(x_i)$: notant, pour $N\le k\le\mu$, $\sigma(k)$ l'ensemble (éventuellement vide) des indices i t.q. $M(x_i)=k$, on a :

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=1}^{n}\Big(f_{M(x_i)}(x_i)\ell(I_i)-\int_{I_i}f_{M(x_i)}(t)dt\Big)\Big| \\
&=\Big|\sum_{k=N}^{\mu}\Big(\sum_{i\in\sigma(k)}\Big(f_k(x_i)\ell(I_i)-\int_{I_i}f_k(t)dt\Big)\Big)\Big| \\
&\le\sum_{k=N}^{\mu}\Big|\sum_{i\in\sigma(k)}\Big(f_k(x_i)\ell(I_i)-\int_{I_i}f_k(t)dt\Big)\Big|
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Choisissons pour chaque $k\in\mathbb{N}$ une jauge δ_k qui soit 2^{-k}- adaptée à f_k, et $\forall x\in I$ posons $\delta(x)=\delta_{M(x)}(x)$. (C'est *cela* qui ne marcherait pas pour l'intégrale de Riemann : même si les jauges δ_k sont constantes, δ ne l'est pas en général – sauf s'il y a convergence uniforme, auquel cas on peut prendre $M(x)=M$ $\forall x$ et δ_M constante si les f_M sont Riemann-intégrables (sur I borné) – et aucune jauge constante ne pourrait la remplacer dans ce qui suit.)

Si P est δ- fine, pour tout k de N à μ t.q. $\sigma(k) \neq \emptyset$ la famille $(x_i, I_i)_{i\in\sigma(k)}$ est δ-fine et le lemme d'Henstock donne donc :

$$\Big| \sum_{i\in\sigma(k)} \left(f_k(x_i)\ell(I_i) - \int_{I_i} f_k(t)dt \right) \Big| \leq 2^{-k},$$

d'où :

$$\Big| \sum_{i=1}^{n} \left(f_{M(x_i)}(x_i)\ell(I_i) - \int_{I_i} f_{M(x_i)}(t)dt \right) \Big| \leq \sum_{k=N}^{\mu} 2^{-k}.$$

Quitte à augmenter N, on peut se ramener au cas où $\forall M \geq N$, $\sum_{k=N}^{M} 2^{-k} \leq \varepsilon$.

Dans ces conditions, on a donc obtenu que δ est ε'- adaptée, avec $\varepsilon' = (\ell(I) + 2)\,\varepsilon$, et que f est intégrable, avec $\int_I f = \ell$. Cela achève la preuve.

Quelques exemples

1. La fonction $x \to x^{-1/2}$ (complétée comme on veut en 0) est intégrable sur $[0, 1]$. En effet c'est la limite croissante de ses restrictions aux intervalles $[\frac{1}{n}, 1]$ (prolongées par 0 partout ailleurs), et la suite des intégrales de celles-ci converge.

2. Autres ...

Corollaire 7.1 *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue. f est intégrable sur $[a, +\infty[$ ssi $\lim_{X\to+\infty} \int_a^X f(t)dt < +\infty$, et alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{X\to+\infty} \int_a^X f(t)dt$.*

Application. Soient $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ continues. On a : $f \leq g$ et g intégrable $\Longrightarrow f$ intégrable ;
$f \sim g$ et g intégrable $\Longrightarrow f$ intégrable ;

Exemples de références. $(x - b)^{-\alpha}$ est intégrable sur $[a, b[$ ssi $\alpha < 1$; $x^{-\alpha}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ $(a > 0)$ ssi $\alpha > 1$; e^{-ax} est intégrable sur $[a, +\infty[$; $(\ln x)^a$ est intégrable sur $[0, \varepsilon[$ $\forall \varepsilon \in]0, 1[$.

8 Les fonctions absolument intégrables

De même qu'il y a des séries qui ne sont pas absolument convergentes, il y a des fonctions qui ne sont pas absolument intégrables.

Exemple 8.1 *La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(0) = 0$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], f(x) = (-1)^{n-1} n$$

est intégrable sur $[0,1]$ et son intégrale est $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$. Sa valeur absolue n'est pas intégrable parce que la série harmonique ne converge pas.

On dit qu'une fonction f est **absolument intégrable** si f et $|f|$ sont intégrables [5].

L'étude des fonctions absolument intégrables a son propre intérêt, exactement comme celle des séries absolument convergentes.

N.B. Si on estime que la proposition 8.1 ci-dessous est trop technique, on peut la zapper et admettre ses conséquences (les fonctions absolument intégrables forment un espace vectoriel, etc.) – si un étudiant demande un preuve, on peut lui rédiger ce qui suit ...
Si on veut prouver les résultats qu'on va énoncer, on commence par un complément au lemme d'Henstock :

Complément au lemme d'Henstock.
Sous les conditions du lemme 6.1 (d'Henstock), on a aussi :

1. $$\sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i)\ell(K_i) - \int_{K_i} f \right| \leq 2\varepsilon;$$
2. Pour toute s.p. δ-fine de I,
$$\left| S(|f|, P) - \sum_{i=1}^{m} | \int_{I_i} f | \right| \leq 2\varepsilon.$$

Preuve

1. On applique le lemme d'Henstock d'abord aux K_i tels que $f(x_i)\ell(K_i) - \int_{K_i} f$ soit positif, puis aux autres, et on ajoute.

5. $|f|$ intégrable n'implique pas f intégrable. Mais tout contre-exemple est tiré par les cheveux et repose sur des hypothèses discutables concernant les propriétés fines des nombres réels ...

2. On applique l'inégalité ci-dessus aux I_i, après avoir appliqué une inégalité triangulaire.

Avec cela, nous pouvons donner une caractérisation des fonctions absolument intégrables :

Proposition 8.1 *Soient I un intervalle borné de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ intégrable. Notons V_f la borne supérieure (finie ou infinie) des nombres $\sum_i \left| \int_{I_i} f \right|$ quand $(I_i)_i$ décrit toutes les subdivisions de I.*
$|f|$ est intégrable ssi *V_f est finie, et dans ce cas $\int_I |f| = V_f$.*

Preuve. La nécessité est évidente puisque $\sum_i \left| \int_{I_i} f \right| \leq \sum_i \int_{I_i} |f| = \int_I |f|$ si $|f|$ est intégrable, en vertu d'une inégalité déjà vue (proposition 3.1). Montrons la suffisance.

On suppose donc V_f finie. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $P = \{(I_1), \dots, (I_m)\}$ une subdivision telle que $V_f - \varepsilon \leq \sum_i \left| \int_{I_i} f \right|$.

Dans la preuve de la relation de Chasles, on avait construit une jauge δ ε-adaptée sur I t.q. toute s.p. P δ-fine de I induise des s.p. P_1 et P_2 de $[a, c]$ et de $[c, b]$, resp., t.q. $S(f, P) = S(f, P_1) + S(f, P_2)$.

En raisonnant exactement de la même façon, on construit ici une jauge δ ε-adaptée sur I t.q. toute s.p. δ-fine de I, $P = \{(x_1, K_1), \dots (x_n, K_n)\}$, induise sur chaque I_i une s.p. P_i, avec $S(f, P) = \sum_{i=1}^m S(f, P_i)$. On a alors :

$$V_f - \varepsilon \leq \sum_i \left| \int_{I_i} f \right| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left| \int_{I_i \cap K_j} f \right| \leq V_f$$

donc :

$$\left| V_f - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n | \int_{I_i \cap K_j} f | \right| \leq \varepsilon.$$

Vu le complément au lemme d'Henstock et le fait que $S(|f|, P) = \sum_{i=1}^m S(|f|, P_i)$ est la somme de Riemann de $|f|$ relative à la s.p. $(x_j, K_j \cap I_i)_{\{i,j \mid K_j \cap I_i \neq \emptyset\}}$, on a aussi

$$\left|S(|f|,P)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|\int_{K_j\cap I_i} f|\right| \leq 2\varepsilon,$$

d'où en ajoutant :

$$\left|S(|f|,P)-V_f\right| \leq 3\varepsilon.$$

Corollaire 8.1
1. *Une fonction intégrable (dans un intervalle I borné ou non) dont la valeur absolue est majorée par une fonction intégrable est absolument intégrable, et l'inégalité passe aux intégrales.*
2. *Sur un compact, une fonction intégrable bornée est absolument intégrable.*
3. *L'ensemble des fonctions absolument intégrables (sur I, borné ou non) est un espace vectoriel (on le note $\mathcal{L}^1(I)$).*
4. *En particulier, que si f et g sont absolument intégrables, $f-g$ et $f+g$ le sont aussi, et donc* $\max\{f,g\}=\frac{1}{2}(f+g)+\frac{1}{2}|f-g|$ *et* $\min\{f,g\}=\frac{1}{2}(f+g)-\frac{1}{2}|f-g|$ *le sont aussi.*

Preuve.

1. Si $|f|\leq g$ avec f et g intégrables, en appliquant l'inégalité déjà vue $|\int_{I_i} f|\leq \int_{I_i}|g|$ dans tout intervalle d'une subdivision de I, et en sommant sur i, on obtient que $V_f\leq\int_I g$, et la proposition 8.1 conclut.
2. C'est une conséquence de 1. Car $|f|$ est alors majorée par une fonction g *constante* donc intégrable.

N.B. Par contre, f,g intégrables n'implique pas $\max\{f,g\}$ intégrable (ni $\min\{f,g\}$) : exemple : $f=$ la fonction de l'exemple 8.1, $g=0$. Ni le max ni le min ne sont intégrables sur $[0,1]$.

Mais on a ceci :

Lemme 8.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si f et g sont intégrables sur I, et si elles sont minorées (resp. majorées) sur I par une fonction intégrable, alors* $\max\{f,g\}$ *et* $\min\{f,g\}$ *sont intégrables et :* $\int_I \min\{f,g\}\leq\min\left\{\int_I f,\int_I g\right\}$
$\leq\max\left\{\int_I f,\int_I g\right\}\leq\int_I\max\{f,g\}$

Preuve
Supposons f et g minorées par h intégrable (si elles sont majorées, l'argument est analogue ; ou changer les signes ...) Alors $f - h$ et $g - h$ sont positives et intégrables, donc absolument intégrables, donc $h + \max\{f - h, g - h\} = \max\{f, g\}$ et $h + \min\{f - h, g - h\} = \min\{f, g\}$ sont intégrables, et les inégalités découlent de la positivité de l'intégrale .

N.B. Le cas d'un nombre $n \geq 2$ de fonctions en découle trivialement.

Cela nous mène tout droit au théorème de convergence "encadrée" (ou dominée) :

9 Le théorème de convergence encadrée (ou dominée)

Théorème 9.1 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, borné ou non, et $f_n : I \to \mathbb{R}$ ($n \geq 0$), $f : I \to \mathbb{R}$ des applications telles que :*

1. *toutes les f_n sont intégrables sur I ;*
2. *la suite (f_n) converge (simplement) vers f sur I.*
3. *il existe des fonctions $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ intégrables sur I qui "encadrent" toutes les f_n : $\forall n,\ g \leq f_n \leq h$.*

Alors f est intégrable sur I et $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$.

Preuve On peut se contenter d'en donner l'idée (en aiguillant les étudiants intéressés sur un polycopié contenant les détails). Je la donne ici *for completeness.*
Si on note $s_{n,p} = \min\{f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+p}\}$, $t_{n,p} = \max\{f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+p}\}$ (qui sont intégrables vu le lemme précédent), on a $\forall n$, $\forall p$:

$$g \leq s_{n,p+1} \leq s_{n,p} \leq s_{n+1,p-1} \leq f_{n+1} \leq t_{n+1,p-1} \leq t_{n,p} \leq t_{n,p+1} \leq h.$$

$\forall n$, la suite $(s_{n,p})_p$ est décroissante minorée (la suite des intégrales aussi), donc elle a une limite s_n intégrable et $\int_I s_n = \lim_p \int_I s_{n,p}$ par le théorème de convergence monotone.
De même, $(t_{n,p})_p \uparrow t_n$ intégrable et $\int_I t_n = \lim_p \int_I t_{n,p}$.
Faisant $p \to \infty$ dans les inégalités précédentes, on obtient :

$$g \leq s_n \leq s_{n+1} \leq f_{n+1} \leq t_{n+1} \leq t_n \leq h,$$

d'où encore par convergence monotone, $(s_n)_n \uparrow s$ intégrable, avec $\int_I s = \lim_n \int_I s_n$, et $(t_n)_n \downarrow t$ intégrable, avec $\int_I t = \lim_n \int_I t_n$,
On n'a pas encore utilisé l'hypothèse $f_n \to f$: soit $\varepsilon > 0$; pour tout $x \in I$, existe $N(x) \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq N(x) \Longrightarrow f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon$. Alors, pour $n \geq N(x)$ et tout p,

$$f(x) - \varepsilon \leq s_{n,p}(x) \leq f_n(x) \leq t_{n,p}(x) \leq f(x) + \varepsilon$$

d'où

$$f(x) - \varepsilon \leq s_n(x) \leq f_n(x) \leq t_n(x) \leq f(x) + \varepsilon$$

et donc $s = t = f$. On a donc obtenu que f est intégrable, et que $\int_I f = \lim_n \int_I s_n = \lim_n \int_I t_n$.
Enfin, $\forall n$, on a $s_n \leq f_n \leq t_n$, donc $\int_I s_n \leq \int_I f_n \leq \int_I t_n$, et comme les deux extrémités tendent vers $\int_I f$ quand $n \to \infty$, on a le résultat voulu.

Cas particulier (convergence dominée)
Si on remplace l'hypothèse d'encadrement : $\forall n$, $g \leq f_n \leq h$, par une hypothèse de dominance : $\forall n$, $|f_n| \leq h$ (h intégrable), on obtient comme cas particulier le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Dans ce cas, h est absolument intégrable (puisque positive !), donc f et les f_n aussi, et on a comme dans tous les cours sur l'intégrale de Lebesgue cette précision supplémentaire : $\lim \int_I |f - f_n| = 0$.

Corollaire 9.1 *Si f est continue (ou, plus généralement, intégrable sur tout segment), et s'il existe h intégrable sur $\mathbb{R}$ t.q. $|f| \leq h$, alors f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. On applique le théorème de convergence dominée aux $f_n = f \times \mathbf{1}_{[-n,n]}$: f est intégrable, et l'est absolument puisque $|f| \leq h$ (et $\int_{\mathbb{R}} f = \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n$, $|\int_{\mathbb{R}} f| \leq \int_{\mathbb{R}} h$).
Exemple. $\frac{\cos x}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

N.B. Une fonction f intégrable sur tout segment de $[a, +\infty[$, est absolument intégrable sur $[a, +\infty[$ (on dit aussi que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est *absolument convergente*) *ssi* $\lim_{X \to +\infty} \int_a^X |f(t)|dt < +\infty$.

Il est bon de signaler aussi la :

Proposition 9.1 *Soient I un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f_n : I \to \mathbb{R}$ ($n \geq 0$), $f : I \to \mathbb{R}$ des applications telles que :*

1. *toutes les f_n sont R- intégrables sur I ;*

2. la suite (f_n) *converge vers* f uniformément *sur* I.

Alors f *est R- intégrable sur* I *et* $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$.

N.B. L'hypothèse que I soit borné est essentielle, comme le montre le contre-exemple $I = [1, +\infty[$, $f(x) = x^{-1}$, $f_n(x) = x^{-1}\mathbf{1}|_{[1,n]}$.

10 Applications aux intégrales paramétriques

Théorème 10.1 *Soient* X *une partie de* $\mathbb{R}$, x_0 *un point de l'adhérence de* X *dans* $\overline{\mathbb{R}}$, I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, *et* $f : X \times I \to \mathbb{R}$ *t.q. :*

1. $\forall x \in X$, *l'application* $I \ni t \mapsto f(x, t)$ *est intégrable ;*
2. $\forall t \in I$, $\lim_{X\ni x\to x_0} f(x, t)$ *existe (et est finie) ;*
3. *Il existe des fonctions* $g, h : I \to \mathbb{R}$ *telles que* $\forall x$ *dans un voisinage de* x_0 *et* $\forall t \in I$, $g(t) \le f(x, t) \le h(t)$.

Alors la fonction $I \ni t \mapsto \lim_{X\ni x\to x_0} f(x, t)$ *est intégrable et*

$$\int_I \lim_{X\ni x\to x_0} f(x,t)dt = \lim_{X\ni x\to x_0} \int_I f(x,t)dt.$$

(En particulier, si $\forall t \in I$, $X \ni x \mapsto f(x, t)$ *est continue en* x_0, *l'intégrale l'est aussi.)*

Preuve. Pour toute suite $(x_n)_{n\ge 1}$ de points de X qui converge vers x_0, la convergence encadrée donne le résultat.

Corollaire 10.1 *Si* I *est compact et* f *continue sur* $X \times I$, *alors l'intégrale définit une fonction de* x *continue sur l'intérieur de* X *(si celui-ci est* $\neq \emptyset$ *!)*

Preuve. Soit x_0 dans l'intérieur de X ; prenons $r > 0$ tel que l'intervalle $[x_0 - r, x_0 + r]$ soit inclus dans l'intérieur de X. f est continue donc bornée (donc encadrée) sur le compact $[x_0 - r, x_0 + r] \times I$.

Théorème 10.2 *Soient* X *une partie de* $\mathbb{R}$ *d'intérieur non vide,* x_0 *un point de l'intérieur de* X, I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, *et* $f : X \times I \to \mathbb{R}$ *t.q. :*

1. $\forall x \in X$, *l'application* $I \ni t \mapsto f(x, t)$ *est intégrable ;*

2. *$\forall t \in I$, la fonction $x \to f(x,t)$ possède une dérivée, $f'_x(x,t)$, en tout point d'un voisinage de x_0 ;*

3. *Il existe des fonctions $g, h : I \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x$ dans un voisinage de x_0 et $\forall t \in I$, $g(t) \leq f'_x(x,t) \leq h(t)$.*

Alors l'intégrale paramétrique $x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est dérivable en x_0, la fonction $I \ni t \mapsto f'_x(x_0,t)$ est intégrable, et

$$\frac{d}{dx} \int_I f(x,t)dt\Big|_{x=x_0} = \int_I f'_x(x_0,t)dt.$$

Preuve. La dérivée $f'_x(x,t)$ est la limite du taux de variation : on applique le théorème précédent en encadrant le taux de variation par le théorème des accroissements finis, vu l'encadrement de la dérivée.

Corollaire 10.2 *Si I est compact et X ouvert, et si $(x,t) \mapsto f'_x(x,t)$ existe et est continue en tout point de $X \times I$, alors $X \ni x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est continûment dérivable sur X, et sa dérivée s'obtient en dérivant sous le signe intégral.*

Preuve. Comme pour le corollaire précédent.

Exemples d'applications : calcul d'intégrales comme $\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx$ et $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$, peut-être un peu de transformées de Fourier et Laplace, etc.

S'il reste du temps :

Théorème (admis). Soit $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$. Si f est intégrable sur tout segment $[c,d] \subset]a,b[$ et si $\ell = \lim_{c \to a^+, d \to b^-} \int_c^d f(t)\, dt$ existe, alors f est intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b f(t)\, dt = \ell$.

La condition est nécessaire et suffisante, par propriété de restriction et continuité.

On peut mettre une preuve dans le poly (cf. la version complète).

On en déduit la **règle d'Abel** :

Corollaire 10.3 *Soit $I = [a,b[$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a,+\infty]$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. On suppose que*

1. *f est une dérivée sur I : $f = F'$ (d'après le TF, F est donc l'intégrale indéfinie de f) ;*

2. *F est bornée sur I : $\forall x \in I$, $|F(x)| \leq M$;*

3. *g est dérivable, monotone et bornée sur I ;*

4. *$\forall c \in]a, b[$, fg est intégrable sur $[a, c]$;*

5. *$F(c)g(c)$ tend vers une limite quand $c \to b^-$.*

Alors fg est intégrable sur I.

Preuve. Par parties : $\forall c \in [a, b[$, $\int_a^c fg = F(c)g(c) - F(a)g(a) - \int_a^c Fg'$. Comme g est monotone et bornée, $g(c)$ tend vers une limite ℓ quand $c \to b^-$, et donc g' est intégrable sur I (en effet : $\int_a^c g'(t)dt = g(c) - g(a) \to \ell - g(a)$). Comme $|g'|$ est partout égale à g', ou partout égale à $-g'$ (selon que g est croissante ou décroissante), $|g'|$ est intégrable sur I. Et comme $\forall x \in I$, $|F(x)g'(x)| \leq M|g'(x)|$, $F(x)g'(x)$ est absolument intégrable sur I. Donc $\int_a^c fg = F(c)g(c) - F(a)g(a) - \int_a^c Fg'$ a une limite quand $x \to b^-$, i.e. fg est intégrable sur I.

Applications : $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$, $\int_{\mathbb{R}} \sin (x^2) dx$.

Références

[1] É. BOREL. Sur quelques points de la théorie des fonctions. *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (3)*, 12:9–55, 1895.

[2] É. BOREL. La théorie des ensembles et les progrès récents de la théorie des fonctions. *Rev. gén. Sci.*, 20:315–324, 1909.

[3] J. MAWHIN. *Analyse (Fondements, techniques, évolution).* De Boek, 1992.