

# Maryam Mirzakhani et la géométrie des surfaces

Elise Goujard (Université de Bordeaux)

Cycle "Un texte, un mathématicien", BNF

## Maryam Mirzakhani

1977-2017



©Mariana Cook.

- 1977 naissance à Téhéran
- Université de Sharif
- 2004 Thèse à Harvard
- 2004 Prof. assist. à Princeton
- 2008 Prof. à Stanford
- 2014 Médaille Fields

# Thématiques de recherche

Extrait du document de remise de la médaille Fields :

*« Maryam Mirzakhani a apporté des contributions frappantes et très originales à la géométrie et à l'étude des systèmes dynamiques. Son travail sur les surfaces de Riemann et sur les espaces de modules met en relation plusieurs disciplines mathématiques — la géométrie hyperbolique, l'analyse complexe, la topologie, et la dynamique — et les influence à son tour. Elle a bénéficié d'une vaste reconnaissance pour ses premiers résultats en géométrie hyperbolique, et son travail le plus récent constitue une avancée majeure dans l'étude des systèmes dynamiques. »*

Dans cet exposé :

Un résultat pour les surfaces hyperboliques (issu de sa thèse, 2004 et 2008)

Annals of Mathematics, 108 (2008), 97–123

## Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces

By MARYAM MIRZAKHANI

### Contents

1. Introduction
2. Background material
3. Counting integral multi-curves
4. Integration over the moduli space of hyperbolic surfaces
5. Counting curves and Weil-Petersson volumes
6. Counting different types of simple closed curves

### 1. Introduction

In this paper, we study the growth of  $s_X(L)$ , the number of simple closed geodesics of length  $\leq L$  on a complete hyperbolic surface  $X$  of finite area. We also study the frequencies of different types of simple closed geodesics on  $X$  and their relationship with the Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces.

*Simple closed geodesics.* Let  $c_X(L)$  be the number of primitive closed geodesics of length  $\leq L$  on  $X$ . The problem of understanding the asymptotics of  $c_X(L)$  has been investigated intensively. Due to work of Delsarte, Huber and Selberg, it is known that

$$c_X(L) \sim e^L/L$$

as  $L \rightarrow \infty$ . By this result the asymptotic growth of  $c_X(L)$  is independent of the genus of  $X$ . See [Bis] and the references within for more details and related results. Similar statements hold for the growth of the number of closed geodesics on negatively curved compact manifolds [Ma].

However, very few closed geodesics are simple [BS2] and it is hard to discern them in  $\pi_1(X)$  [BS1].

*Counting problems.* Let  $\mathcal{M}_{g,n}$  be the moduli space of complete hyperbolic Riemann surfaces of genus  $g$  with  $n$  cusps. Fix  $X \in \mathcal{M}_{g,n}$ . To understand the

## Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces

By MARYAM MIRZAKHANI

### Contents

1. Introduction
2. Background material
3. Counting integral multi
4. Integration over the moduli
5. Counting curves and W
6. Counting different type

In this paper, we study geodesics of length  $\leq L$ . We also study the frequency  $X$  and their relationship with bordered Riemann surface

Simple closed geodesics of length  $\leq L$  on  $c_X(L)$  has been investigated and Selberg, it is known that

as  $L \rightarrow \infty$ . By this result of the genus of  $X$ . See [1] related results. Similar results geodesics on negatively curved

However, very few can discern them in  $\pi_1(X)$  [18]

Counting problems. 1 Riemann surfaces of genus

JOURNAL OF THE  
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY  
Volume 20, Number 1, January 2007, Pages 1–33  
S 0002-9947(06)00800-2  
Article electronically published on March 8, 2008

### WEIL-PETERSSON VOLUMES AND INTERSECTION THEORY ON THE MODULI SPACE OF CURVES

MARYAM MIRZAKHANI

#### 1. INTRODUCTION

In this paper, we establish a relationship between the Weil-Petersson volume  $V_{g,n}(b)$  of the moduli space  $\mathcal{M}_{g,n}(b)$  of hyperbolic Riemann surfaces with geodesic boundary components of lengths  $b_1, \dots, b_n$ , and the intersection numbers of tautological classes on the moduli space  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  of stable curves. As a result, by using the recursive formula for  $V_{g,n}(b)$  obtained in [22], we derive a new proof of the Virasoro constraints for a point. This result is equivalent to the Witten-Kontsevich formula [14].

Intersection theory of  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . Let  $\mathcal{M}_{g,n}$  be the moduli space of genus  $g$  curves with  $n$  distinct marked points and  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  its Deligne-Mumford compactification. The space  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  is a connected complex orbifold of dimension  $3g - 3 + n$  [6]. These moduli spaces are endowed with natural cohomology classes. An example of such a class is the Chern class of a vector bundle on the moduli space. There are  $n$  tautological line bundles defined over  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ : for each marked point  $i$ , there exists a canonical line bundle  $\mathcal{L}_i$  in the orbifold sense whose fiber at the point  $(C, x_1, \dots, x_n) \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  is the cotangent space of  $C$  at  $x_i$ . The first Chern class of this bundle is denoted by  $\psi_i = c_1(\mathcal{L}_i)$ . Note that although the complex curve  $C$  may have nodes,  $\psi_i$  never coincides with the singular points.

For any set  $\{d_1, \dots, d_n\}$  of integers define the top intersection number of  $\psi$  classes by

Annals of Mathematics, 108 (2008), 97–125

## Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces

By MARYAM MIRZAKHANI

### Contents

1. Introduction
2. Background material
3. Counting integral multi
4. Integration over the mo
5. Counting curves and W
6. Counting different type

In this paper, we stud geodesics of length  $\leq L$ . We also study the frequen  $X$  and their relationship v

JOURNAL OF THE  
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY  
Volume 20, Number 1, January 2007, Pages 1–33  
S 0002-9947(06)00810-1  
Article electronically published on March 8, 2008

### WEIL-PETERSSON VOLUMES AND INTERSECTION THEORY ON THE MODULI SPACE OF CURVES

MARYAM MIRZAKHANI

#### 1. INTRODUCTION

In this paper, we establish a relationship between the Weil-Petersson volume  $V_{g,n}(h)$  of the moduli space  $\mathcal{M}_{g,n}(h)$  of hyperbolic Riemann surfaces with geodesic boundary components of lengths  $h_1, \dots, h_n$ , and the intersection numbers of tautological classes on the moduli space  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  of stable curves. As a result, by using the sieve formula for  $V_{g,n}(h)$  obtained in [22], we derive a new proof of the Virasoro constraints for a point. This result is equivalent to the Witten-Kontsevich formula

intersection theory of  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . Let  $\mathcal{M}_{g,n}$  be the moduli space of genus  $g$  curves with  $n$  distinct marked points and  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  its Deligne-Mumford compactification. The space  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  is a connected complex orbifold of dimension  $3g - 3 + n$  [6]. These spaces are endowed with natural cohomology classes. An example of such a class is the Chern class of a vector bundle on the moduli space. There are  $n$  tautological bundles defined over  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ : for each marked point  $i$ , there exists a canonical bundle  $\mathcal{L}_i$  in the orbifold sense whose fiber at the point  $(C, x_1, \dots, x_n) \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  is the cotangent space of  $C$  at  $x_i$ . The first Chern class of this bundle is denoted by  $c_1(\mathcal{L}_i)$ . Note that although the complex curve  $C$  may have nodes,  $c_1$  never fails to be defined at the singular points. For any set  $\{d_1, \dots, d_n\}$  of integers define the top intersection number of  $\psi$  classes

Invent. math. 167, 179–222 (2007)  
DOI: 10.1007/s00222-006-0013-2

*Inventiones  
mathematicae*

## Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces

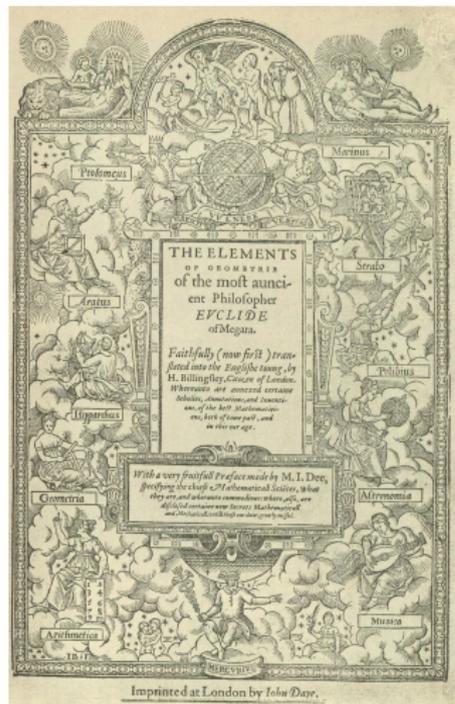
Maryam Mirzakhani

Department of Mathematics, Princeton University, Fine Hall, Washington Road, Princeton, NJ 08544, USA (e-mail: mmirzakh@math.princeton.edu)

# Différentes géométries

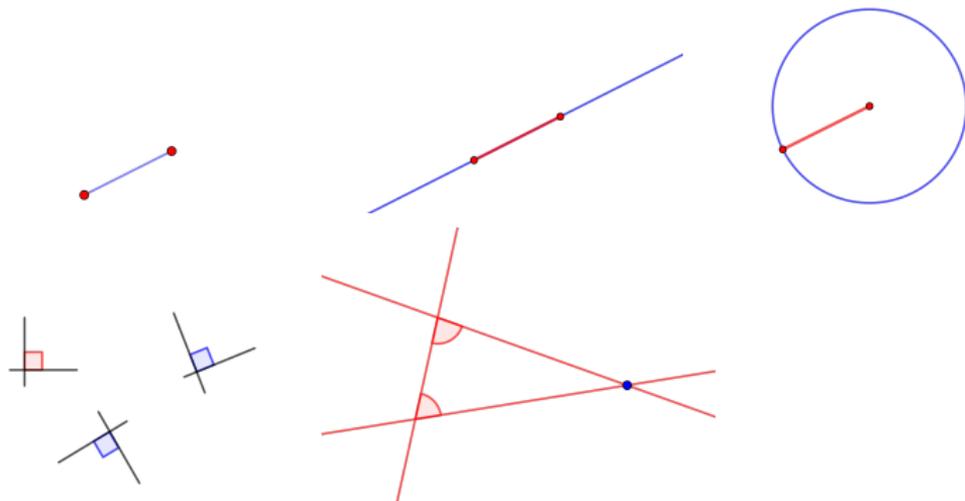
# La géométrie euclidienne

Euclide 300 av J.C.



# La géométrie euclidienne

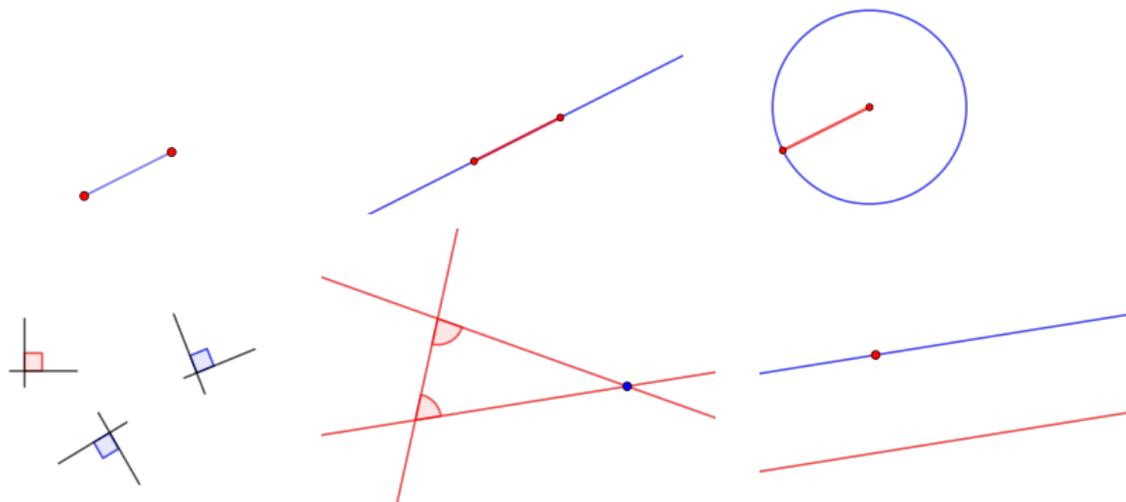
Euclide 300 av J.C. : 5 postulats pour travailler



Droites *parallèles* : qui ne s'intersectent pas.

# La géométrie euclidienne

Euclide 300 av J.C. : 5 postulats pour travailler



Droites *parallèles* : qui ne s'intersectent pas.

# Le cinquième postulat

Remis en cause au XIXe siècle



Gauss



Bolyai



Riemann



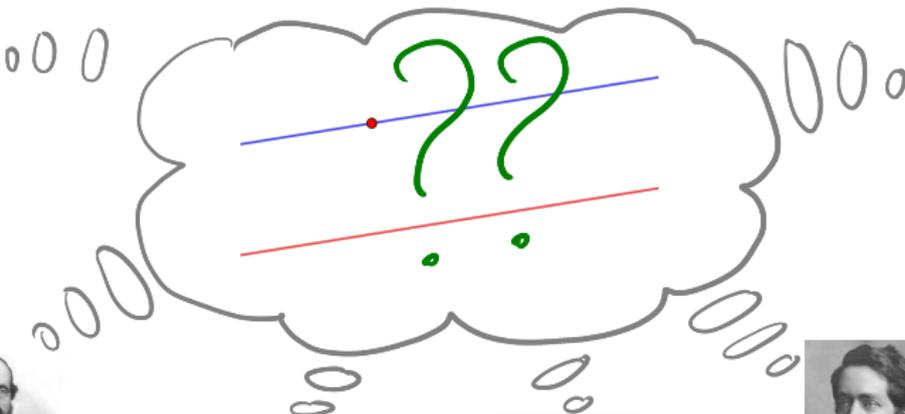
Poincaré



Lobachevski

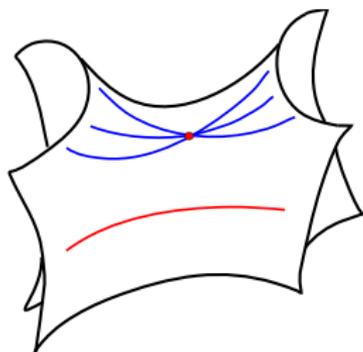


Klein



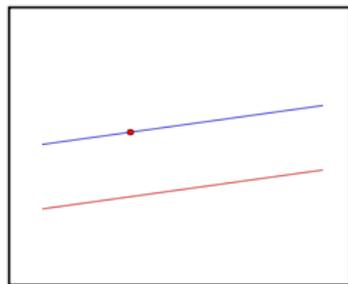
# D'autres modèles de géométrie

Hyperbolique



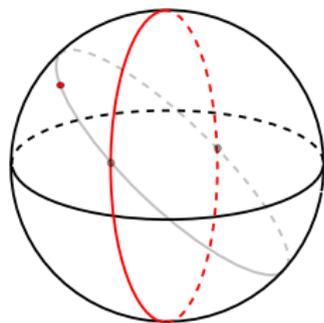
Infinité de parallèles  
Lobatchevski (1829)

Euclidienne



Une parallèle

Sphérique



Aucune parallèle  
Riemann (1867)

# Surfaces, distances et géodésiques

# Les surfaces en mathématiques

En mathématiques, une *surface* est un objet qui de près ressemble à un plan, de la même manière que la Terre semble plate à notre échelle.

# Les surfaces en mathématiques

En mathématiques, une *surface* est un objet qui de près ressemble à un plan, de la même manière que la Terre semble plate à notre échelle.

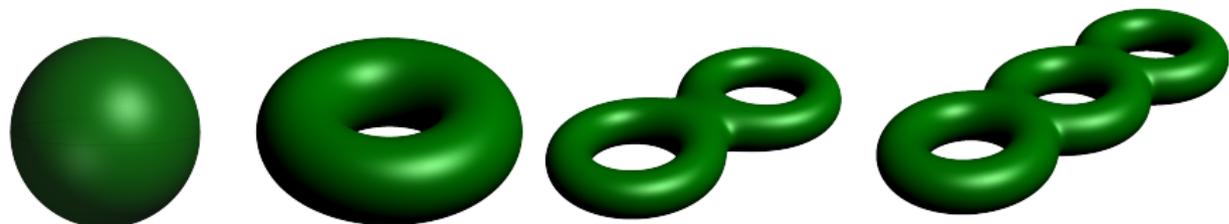


On peut se repérer sur une surface à l'aide de deux coordonnées, comme la latitude et la longitude sur la Terre : c'est un objet de dimension deux.

# Les surfaces en mathématiques

En mathématiques, une *surface* est un objet qui de près ressemble à un plan, de la même manière que la Terre semble plate à notre échelle.

Voici quelques surfaces :



# Notion de plus court chemin : les géodésiques

Quel est le plus court chemin pour aller de Madrid à New York ?



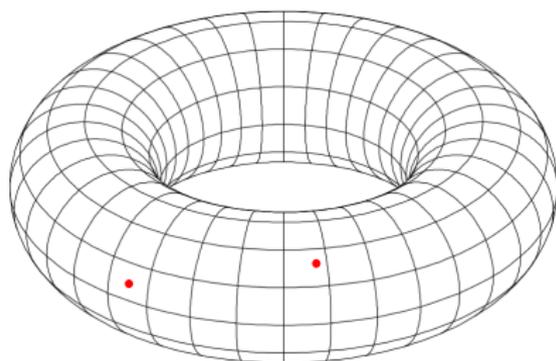
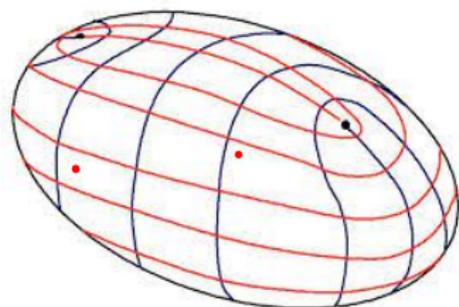
# Notion de plus court chemin : les géodésiques

Quel est le plus court chemin pour aller de Madrid à New York ?



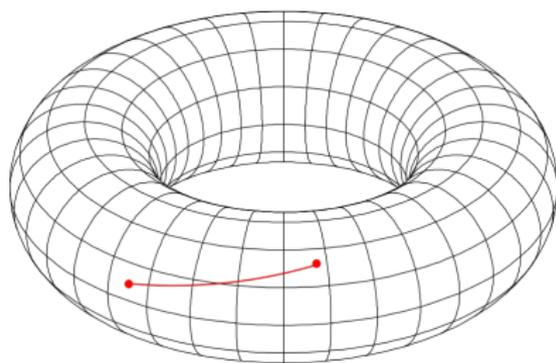
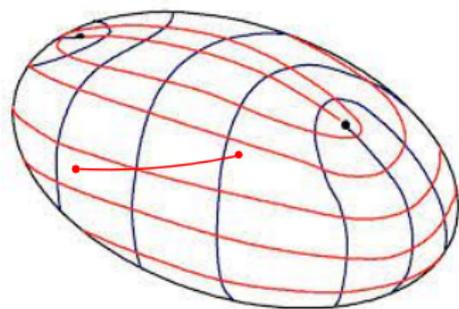
# Notion de plus court chemin : les géodésiques

À la fin du XVII<sup>e</sup> siècle, Bernoulli pose la question pour toute surface sur laquelle on peut mesurer des distances (métrique).



# Notion de plus court chemin : les géodésiques

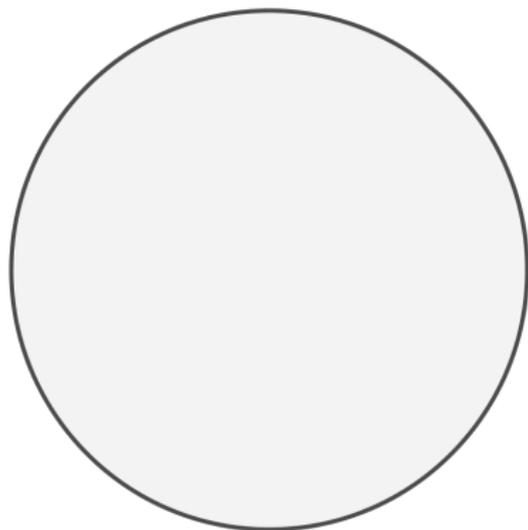
À la fin du XVII<sup>e</sup> siècle, Bernoulli pose la question pour toute surface sur laquelle on peut mesurer des distances (métrique).



*Géodésique* : courbe qui réalise (localement) le plus court chemin.

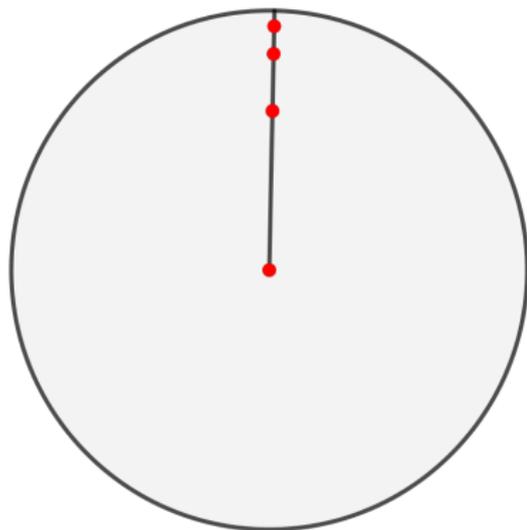
# Le disque de Poincaré

Un modèle pour la géométrie hyperbolique : un disque à la métrique particulière.



# Le disque de Poincaré

Un modèle pour la géométrie hyperbolique : un disque à la métrique particulière.



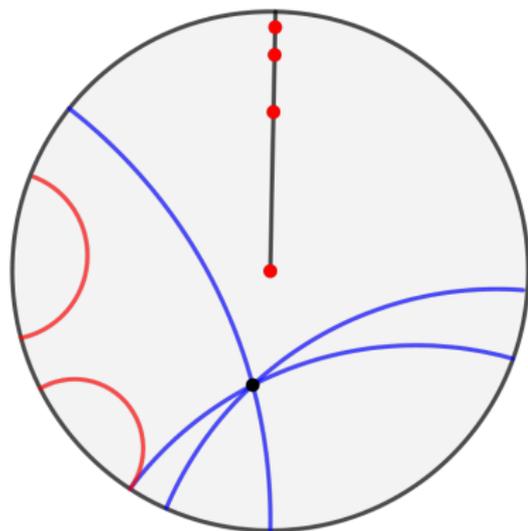
# Le disque de Poincaré

Un modèle pour la géométrie hyperbolique : un disque à la métrique particulière.



# Le disque de Poincaré

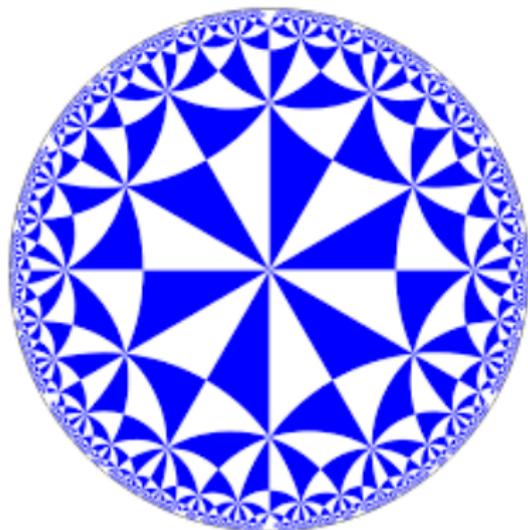
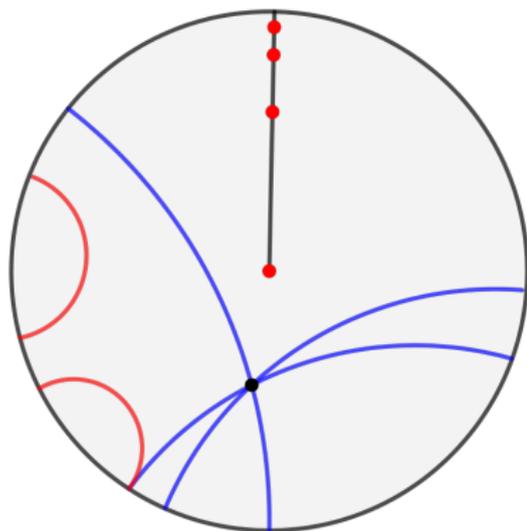
Un modèle pour la géométrie hyperbolique : un disque à la métrique particulière.



Dans ce modèle, les géodésiques sont les arcs de cercle perpendiculaires au bord.

## Le disque de Poincaré

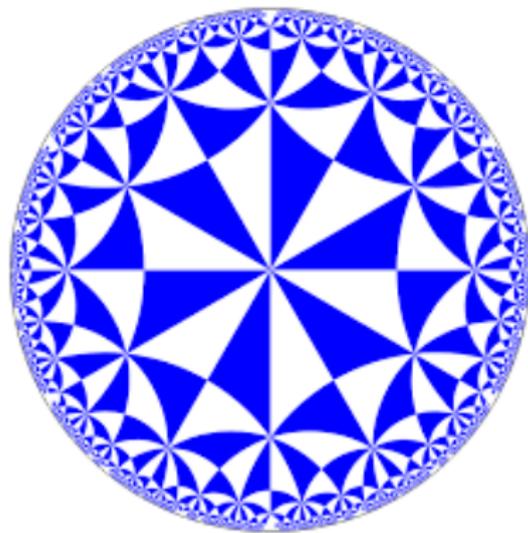
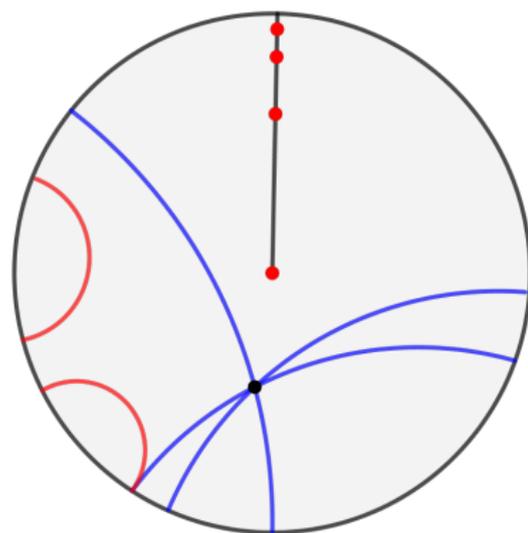
Un modèle pour la géométrie hyperbolique : un disque à la métrique particulière.



Dans ce modèle, les géodésiques sont les arcs de cercle perpendiculaires au bord.

## Le disque de Poincaré

Un modèle pour la géométrie hyperbolique : un disque à la métrique particulière.

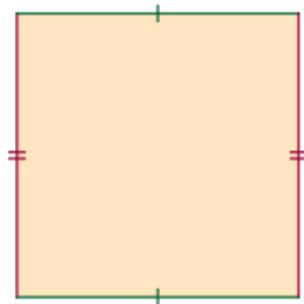
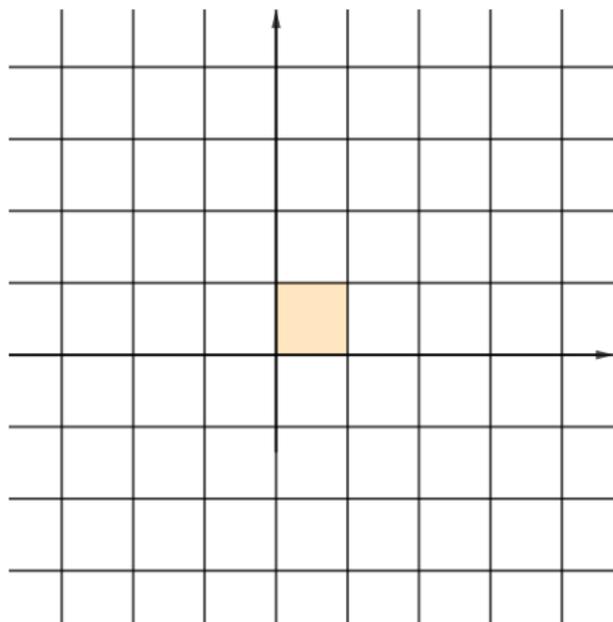


Dans ce modèle, les géodésiques sont les arcs de cercle perpendiculaires au bord.

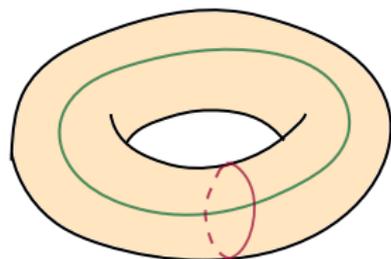
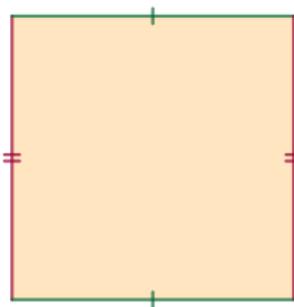
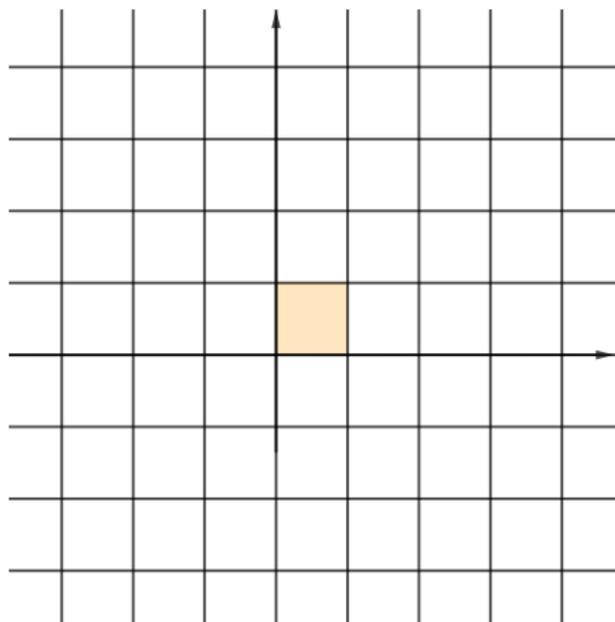


# Surfaces hyperboliques

# Une méthode pour construire des surfaces

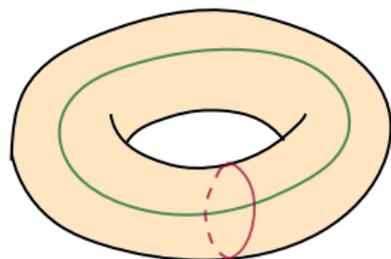
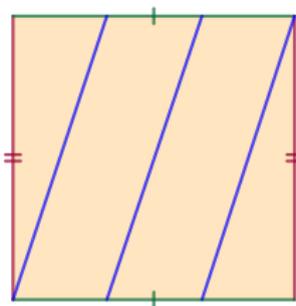
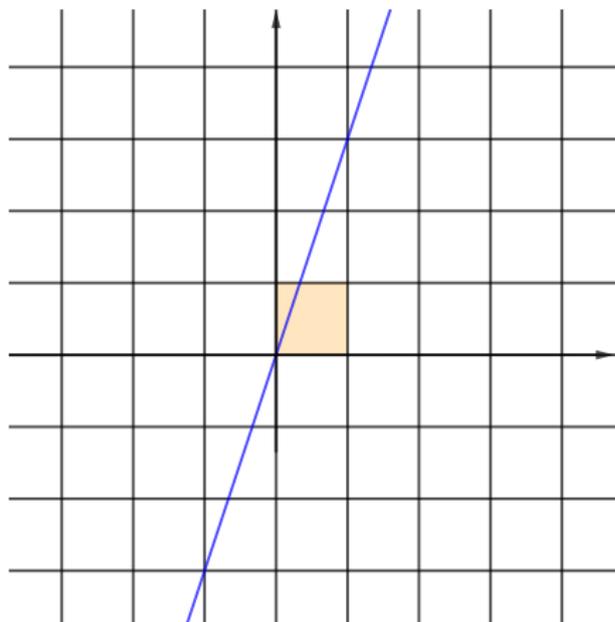


# Une méthode pour construire des surfaces



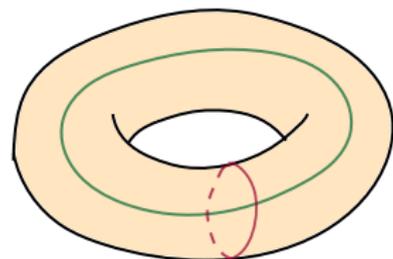
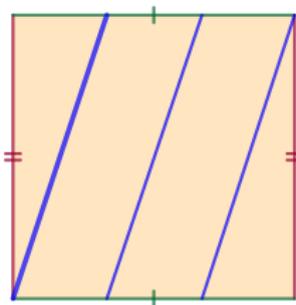
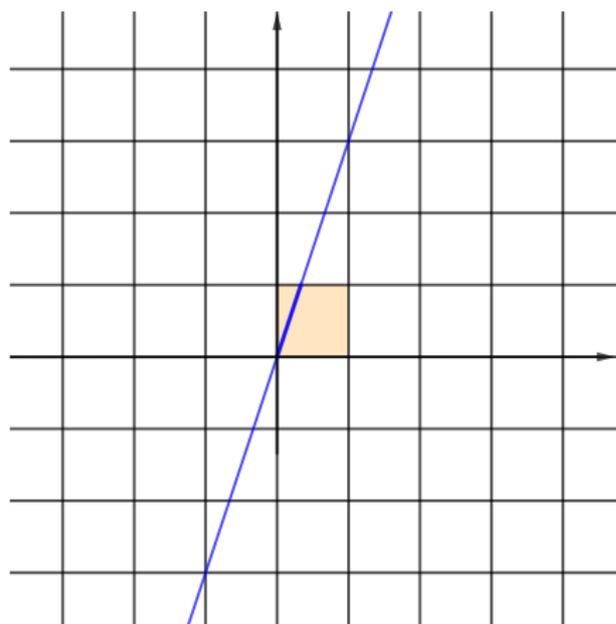
Tore euclidien

# Une méthode pour construire des surfaces



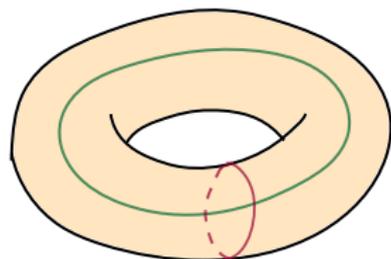
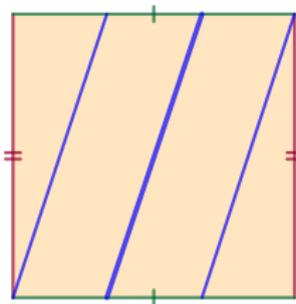
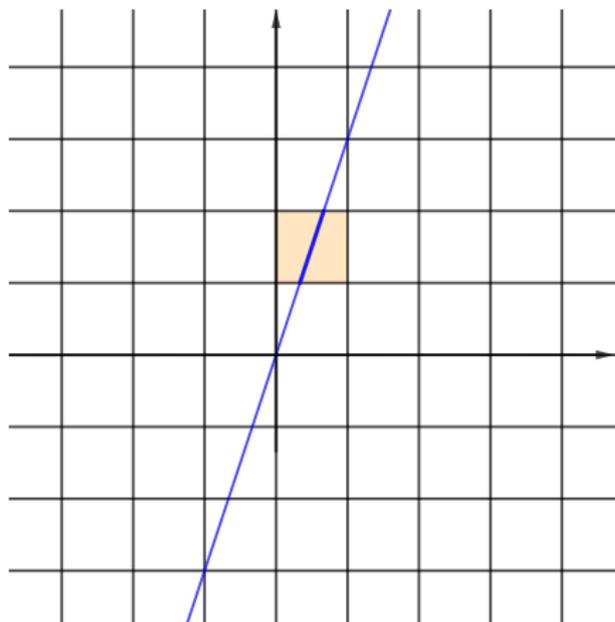
Tore euclidien

# Une méthode pour construire des surfaces



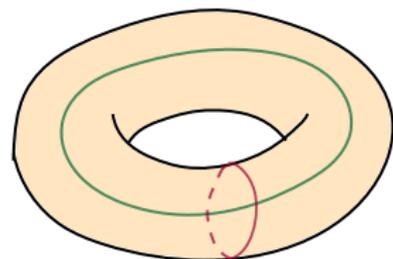
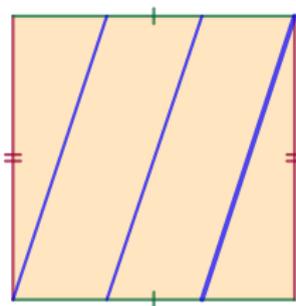
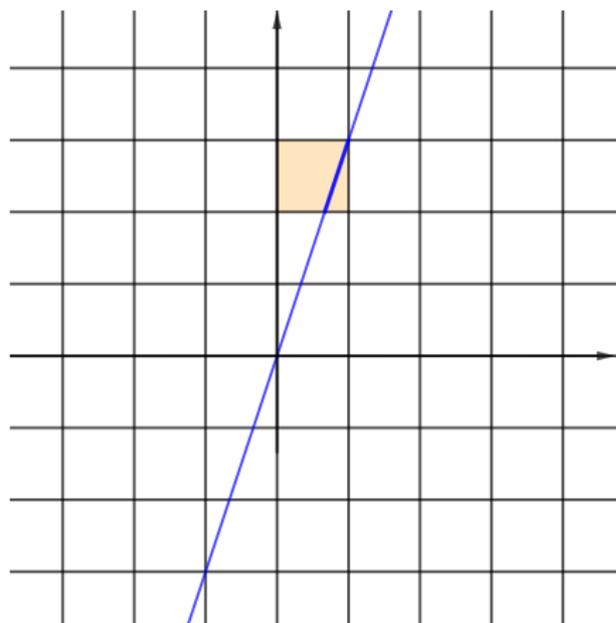
Tore euclidien

# Une méthode pour construire des surfaces



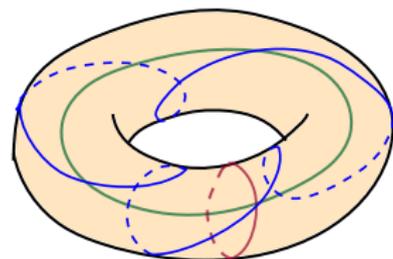
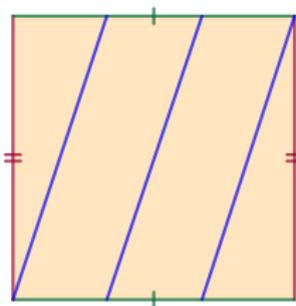
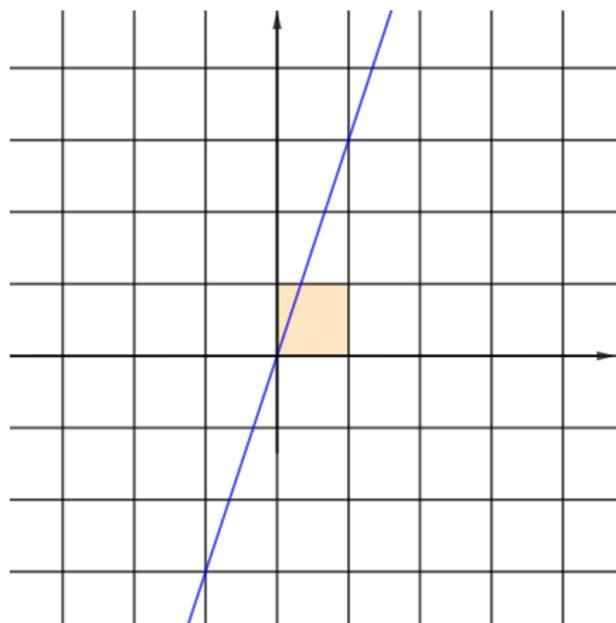
Tore euclidien

# Une méthode pour construire des surfaces



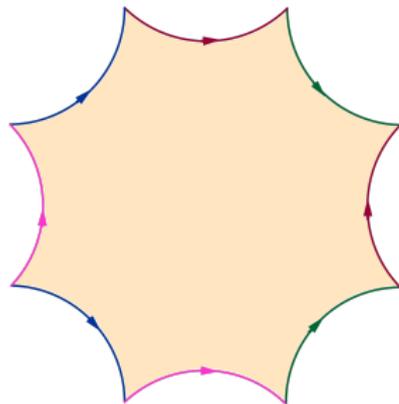
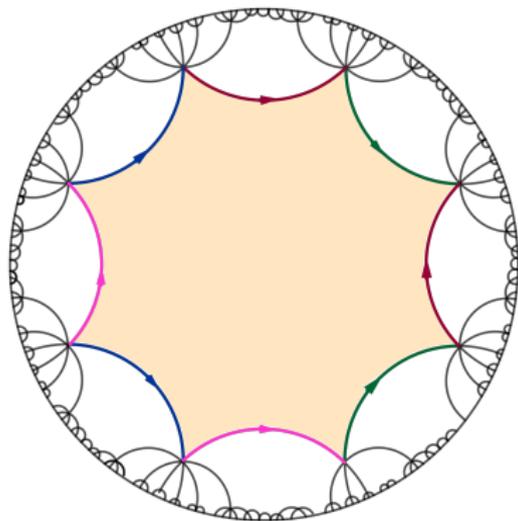
Tore euclidien

# Une méthode pour construire des surfaces

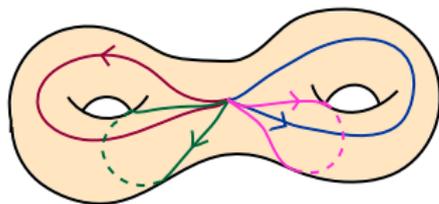
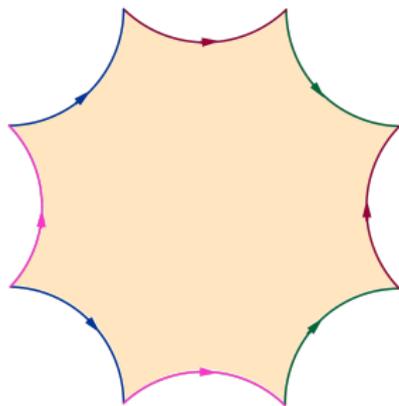
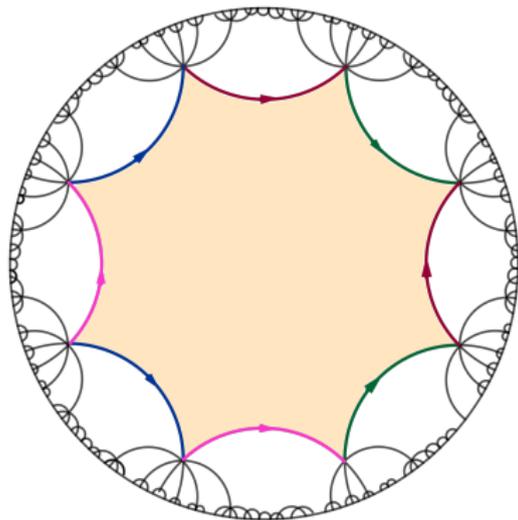


Tore euclidien

# Une méthode pour construire des surfaces

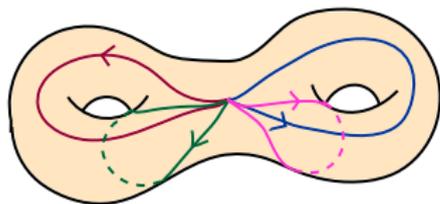
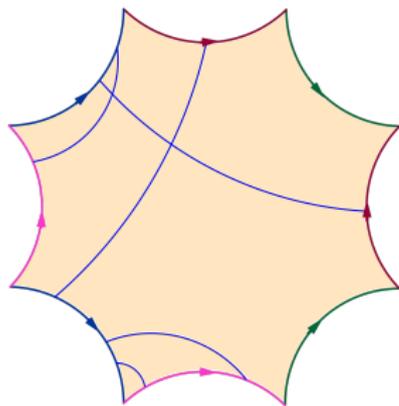
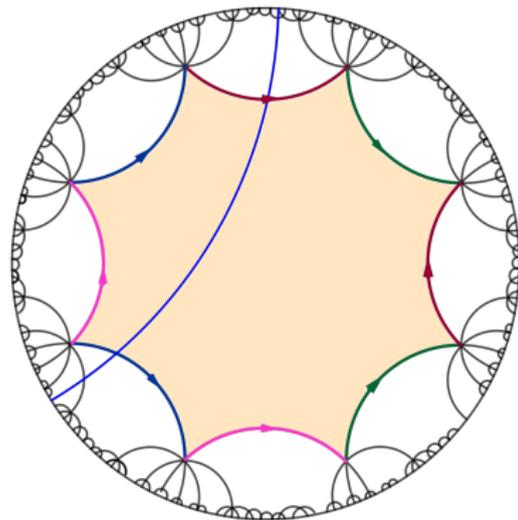


# Une méthode pour construire des surfaces



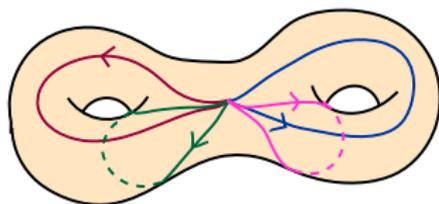
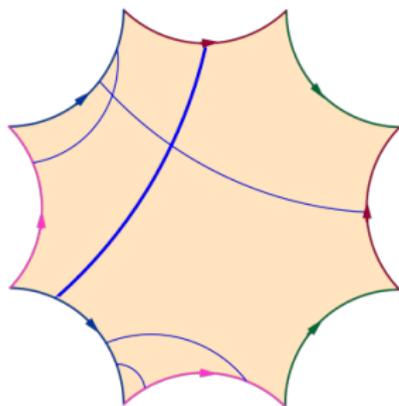
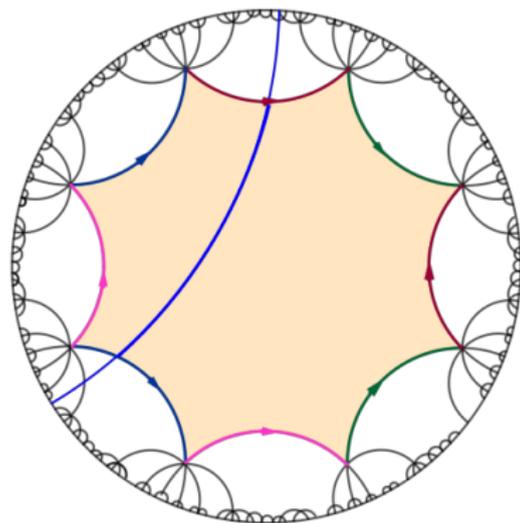
Surface hyperbolique

# Une méthode pour construire des surfaces



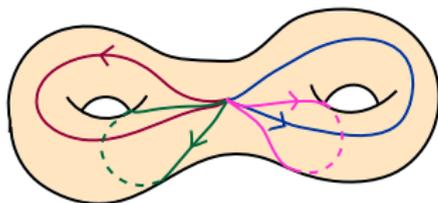
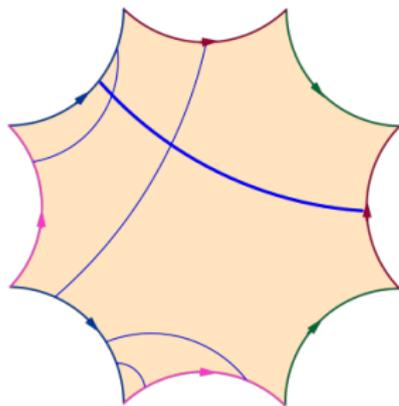
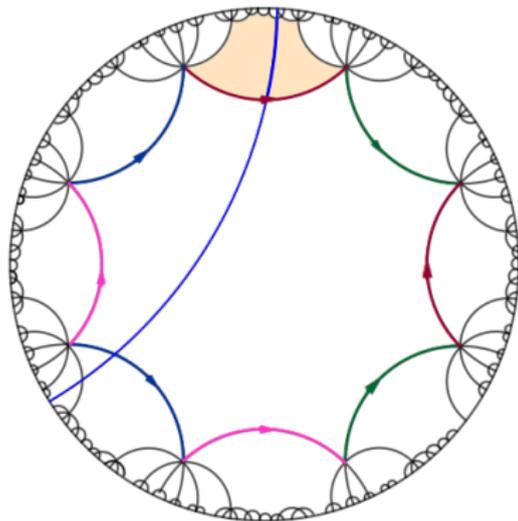
Surface hyperbolique

# Une méthode pour construire des surfaces



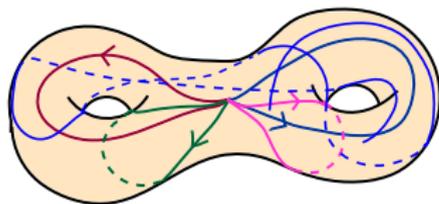
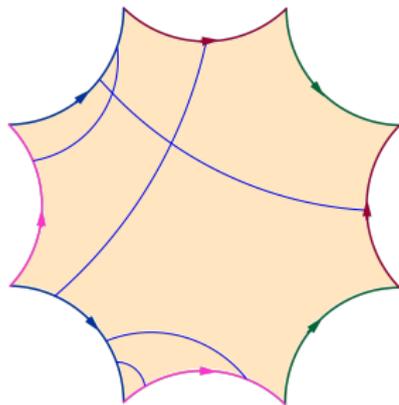
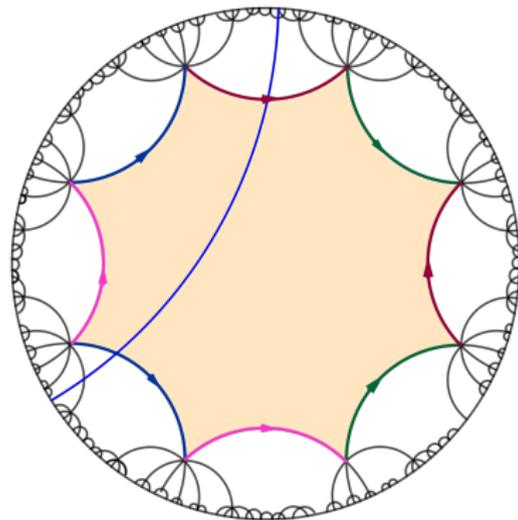
Surface hyperbolique

# Une méthode pour construire des surfaces



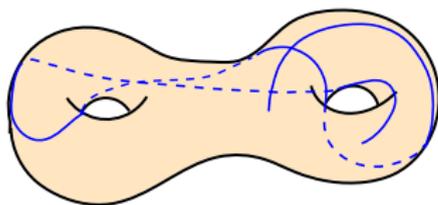
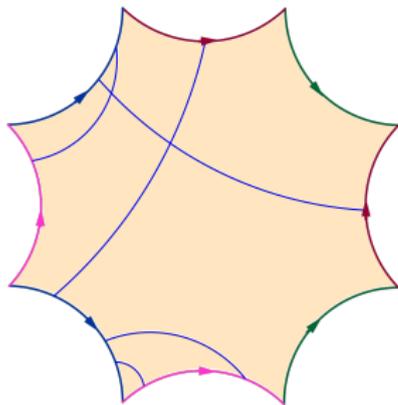
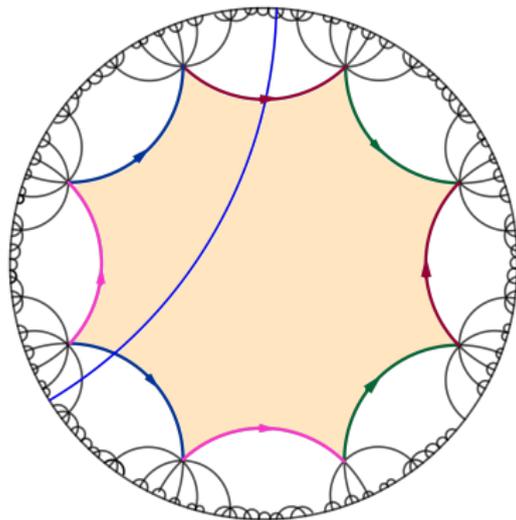
Surface hyperbolique

# Une méthode pour construire des surfaces



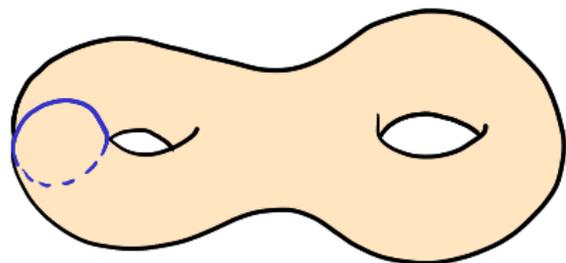
Surface hyperbolique

# Une méthode pour construire des surfaces

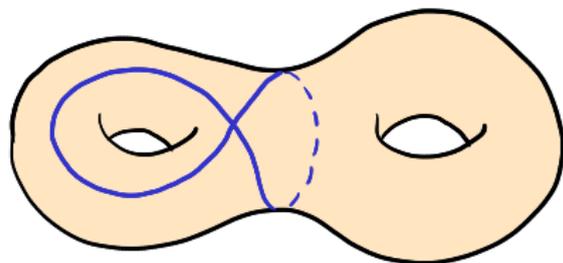


Surface hyperbolique

# Géodésiques fermées

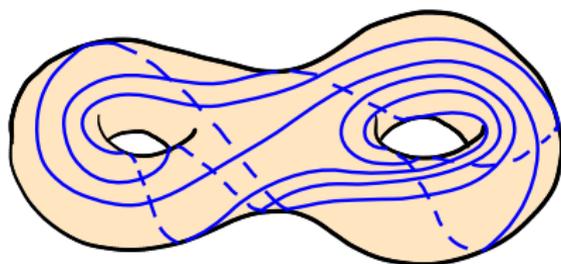


géodésique simple



géodésique qui s'intersecte

On peut en trouver de très longues :



# Résultats

# Comptage des géodésiques fermées

Théorème (Théorème des nombres premiers, Hadamard, La Vallée Poussin, 1896)

*Le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à  $e^L$  est*

$$\pi(e^L) \sim \frac{e^L}{L} \text{ quand } L \rightarrow +\infty.$$

Théorème (Delsarte, Huber, Selberg, 1955)

*Le nombre de géodésiques fermées  $\gamma$  de longueur inférieure à  $L$  sur une surface hyperbolique  $X$  est*

$$N(X, L) \sim \frac{e^L}{L} \text{ quand } L \rightarrow +\infty.$$

## Un premier résultat

Théorème (Delsarte, Huber, Selberg, 1955)

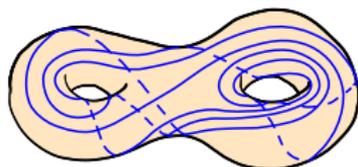
Le nombre de géodésiques fermées  $\gamma$  de longueur inférieure à  $L$  sur une surface hyperbolique  $X$  est

$$N(X, L) \sim \frac{e^L}{L} \text{ quand } L \rightarrow +\infty.$$

Théorème (Mirzakhani, 2004)

Le nombre de géodésiques fermées **simples**  $\gamma$  de longueur inférieure à  $L$  sur une surface hyperbolique  $X$  à  $g$  anses est

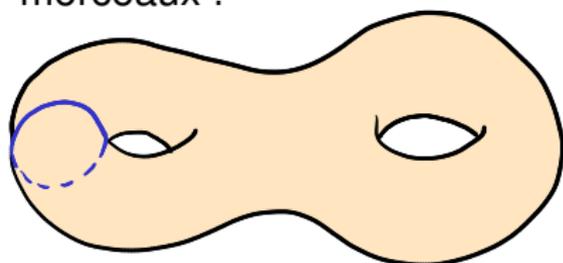
$$N_s(X, L) \sim C_X L^{6g-6} \text{ quand } L \rightarrow +\infty.$$



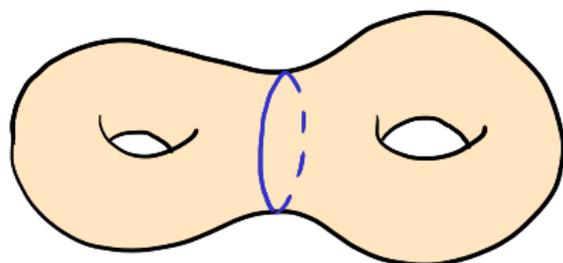
## Une question

Soit une surface hyperbolique à deux anses et une géodésique fermée simple sur cette surface.

Quelle est la probabilité que la géodésique sépare la surface en deux morceaux ?



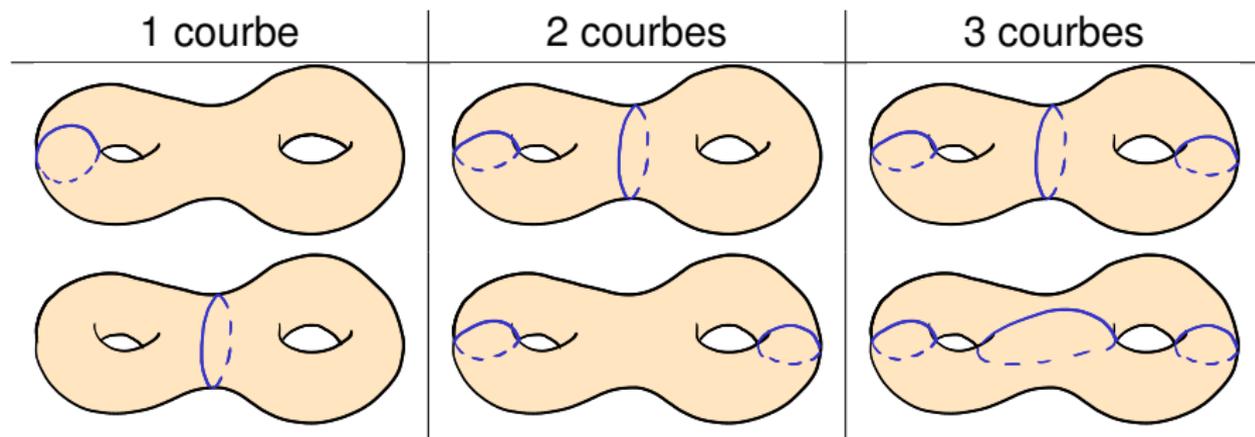
Une géodésique non séparante



Une géodésique séparante

## Les multicourbes et leurs types topologiques

Il est possible de considérer également des réunions de géodésiques disjointes (on parle de multicourbe géodésique). On peut les distinguer selon la façon dont elles découpent la surface en morceaux.



Liste complète des types topologiques sur une surface à 2 anses.

## Le résultat principal

On définit la longueur d'une multicourbe comme la somme des longueurs des courbes.

### Théorème (Mirzakhani, 2008)

*Pour toute multicourbe  $\gamma$  et toute surface hyperbolique  $X$  (à  $g$  anses), le nombre de multicourbes géodésiques simples fermées sur  $X$ , de longueur  $\leq L$ , et de type topologique correspondant à  $\gamma$  est :*

$$N_s(X, L, \gamma) \sim B(X) \cdot c(\gamma) \cdot L^{6g-6} \quad \text{quand } L \rightarrow \infty$$

## Le résultat principal

On définit la longueur d'une multicourbe comme la somme des longueurs des courbes.

### Théorème (Mirzakhani, 2008)

*Pour toute multicourbe  $\gamma$  et toute surface hyperbolique  $X$  (à  $g$  anses), le nombre de multicourbes géodésiques simples fermées sur  $X$ , de longueur  $\leq L$ , et de type topologique correspondant à  $\gamma$  est :*

$$N_s(X, L, \gamma) \sim B(X) \cdot c(\gamma) \cdot L^{6g-6} \quad \text{quand } L \rightarrow \infty$$

$$\frac{N_s(X, L, \gamma_1)}{N_s(X, L, \gamma_2)} \sim \frac{c(\gamma_1)}{c(\gamma_2)} \quad \text{ne dépend plus de } X!$$

## Le résultat principal

On définit la longueur d'une multicourbe comme la somme des longueurs des courbes.

### Théorème (Mirzakhani, 2008)

*Pour toute multicourbe  $\gamma$  et toute surface hyperbolique  $X$  (à  $g$  anses), le nombre de multicourbes géodésiques simples fermées sur  $X$ , de longueur  $\leq L$ , et de type topologique correspondant à  $\gamma$  est :*

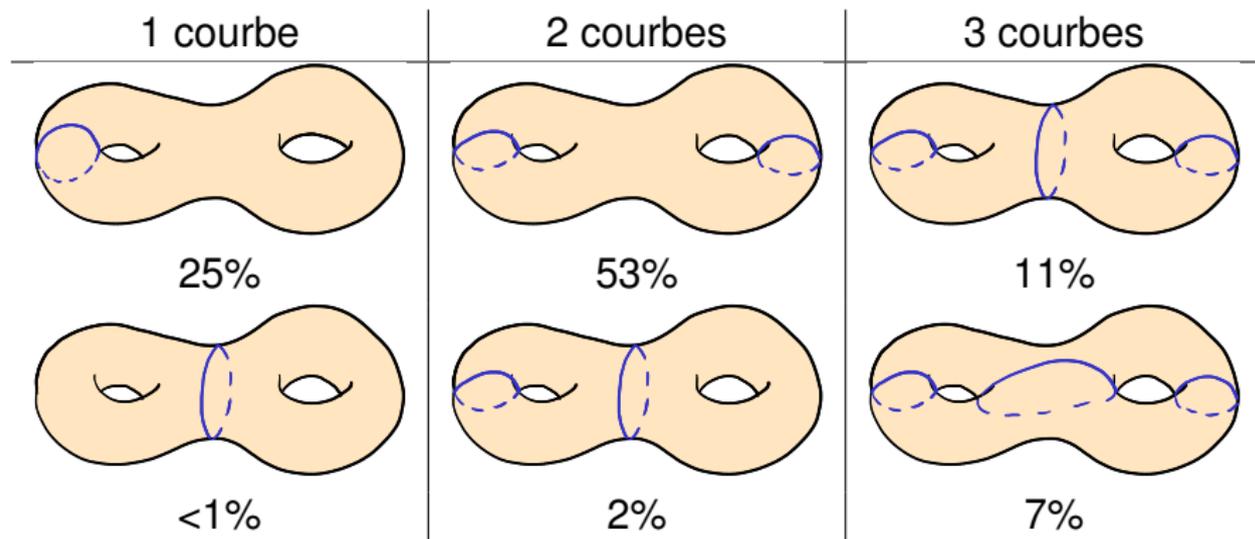
$$N_s(X, L, \gamma) \sim B(X) \cdot c(\gamma) \cdot L^{6g-6} \quad \text{quand } L \rightarrow \infty$$

$$\frac{N_s(X, L, \gamma_1)}{N_s(X, L, \gamma_2)} \sim \frac{c(\gamma_1)}{c(\gamma_2)} \text{ ne dépend plus de } X!$$

Sur une surface à deux anses, il y a asymptotiquement 48 fois plus de géodésiques simples non séparantes que de séparantes.

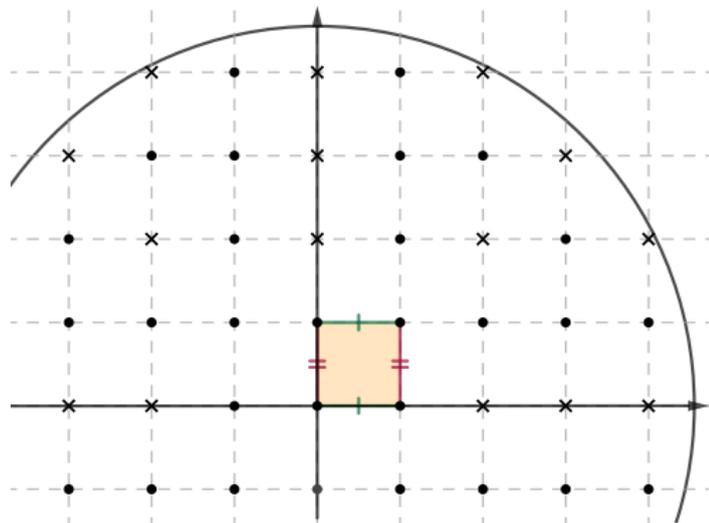
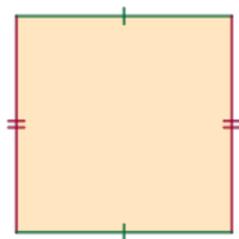
# Fréquences

Fréquence (en %) de chaque type topologique de multicourbe sur une surface à 2 anses.

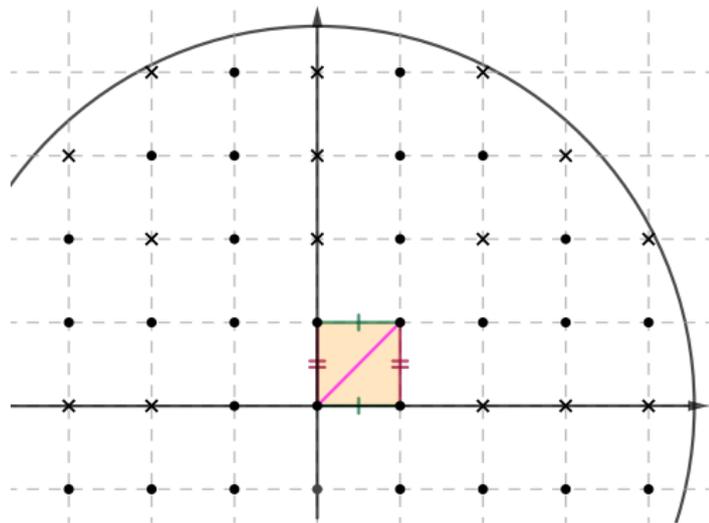
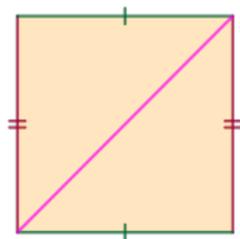


# Quelques ingrédients de la preuve

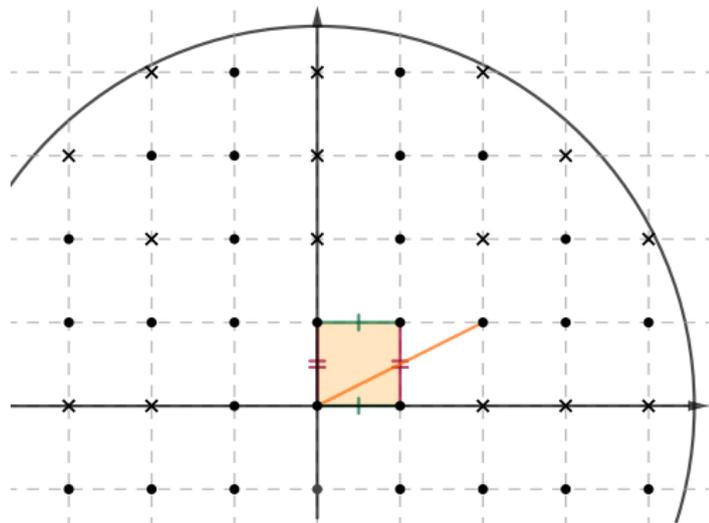
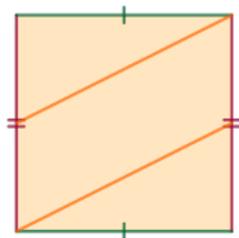
# Le comptage dans le cas du tore



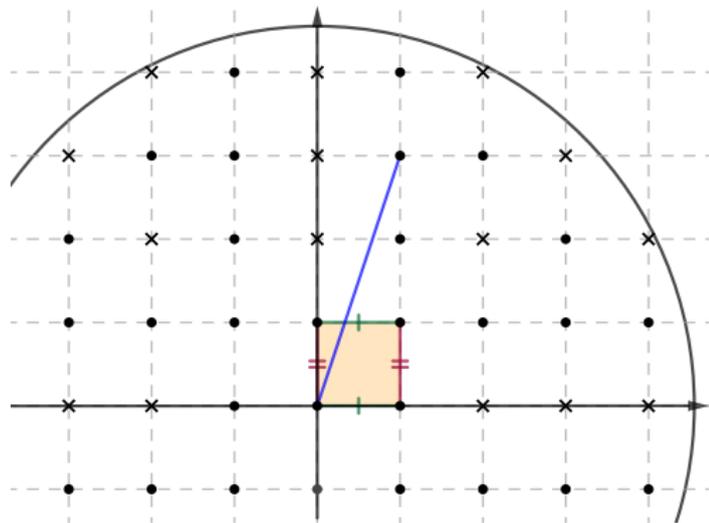
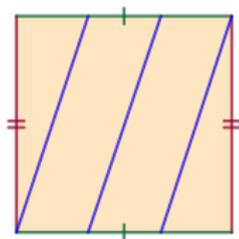
# Le comptage dans le cas du tore



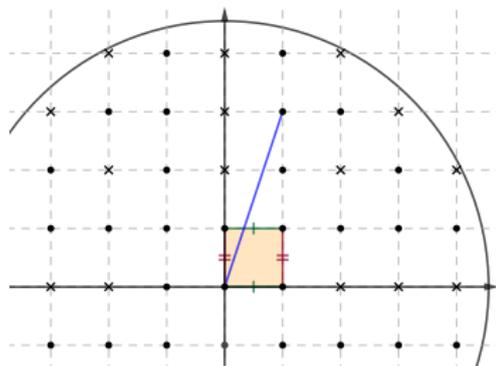
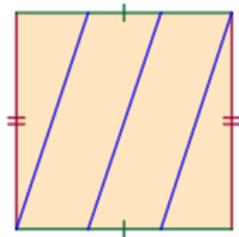
# Le comptage dans le cas du tore



# Le comptage dans le cas du tore

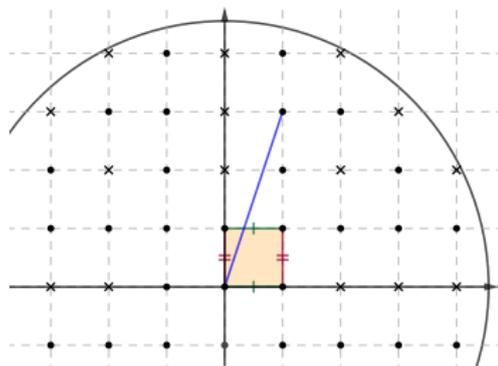
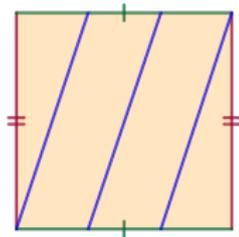


# Le comptage dans le cas du tore



Le nombre  $N(\mathbb{T}, L)$  de géodésiques fermées sur le tore  $\mathbb{T}$  de longueur inférieure à  $L$  est le nombre de couples d'entiers premiers entre eux dans le disque de rayon  $L$ .

# Le comptage dans le cas du tore

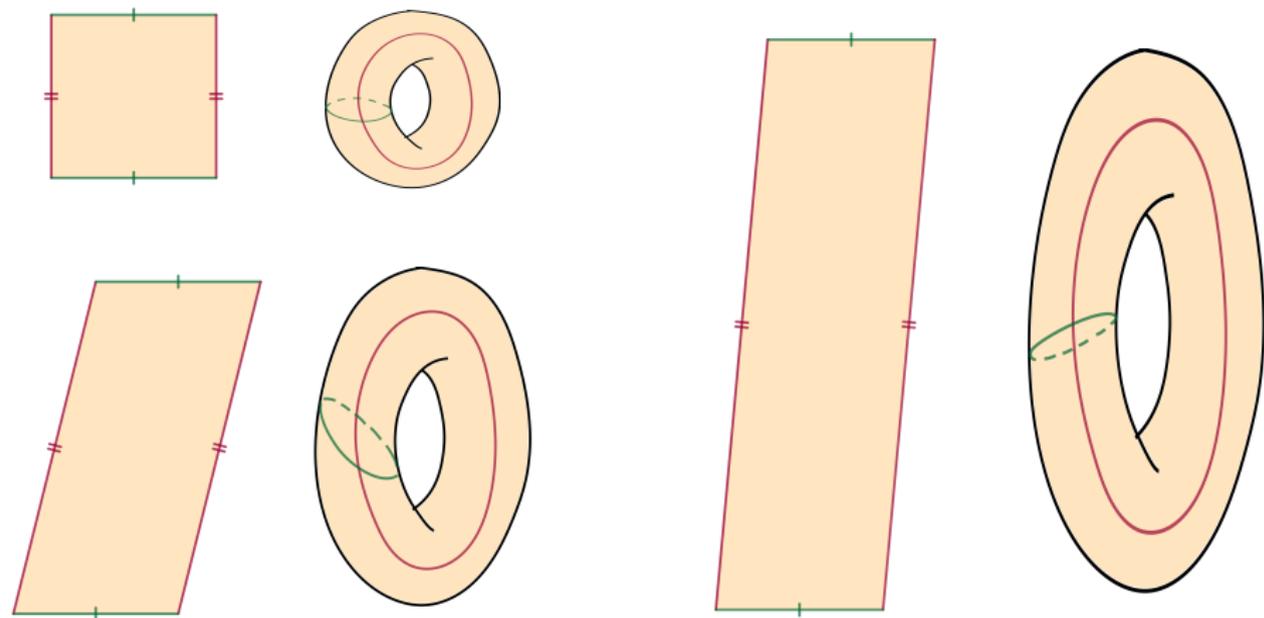


Le nombre  $N(\mathbb{T}, L)$  de géodésiques fermées sur le tore  $\mathbb{T}$  de longueur inférieure à  $L$  est le nombre de couples d'entiers premiers entre eux dans le disque de rayon  $L$ .

$$N(\mathbb{T}, L) \sim \frac{6}{\pi^2} \cdot \pi L^2 \text{ quand } L \rightarrow \infty$$

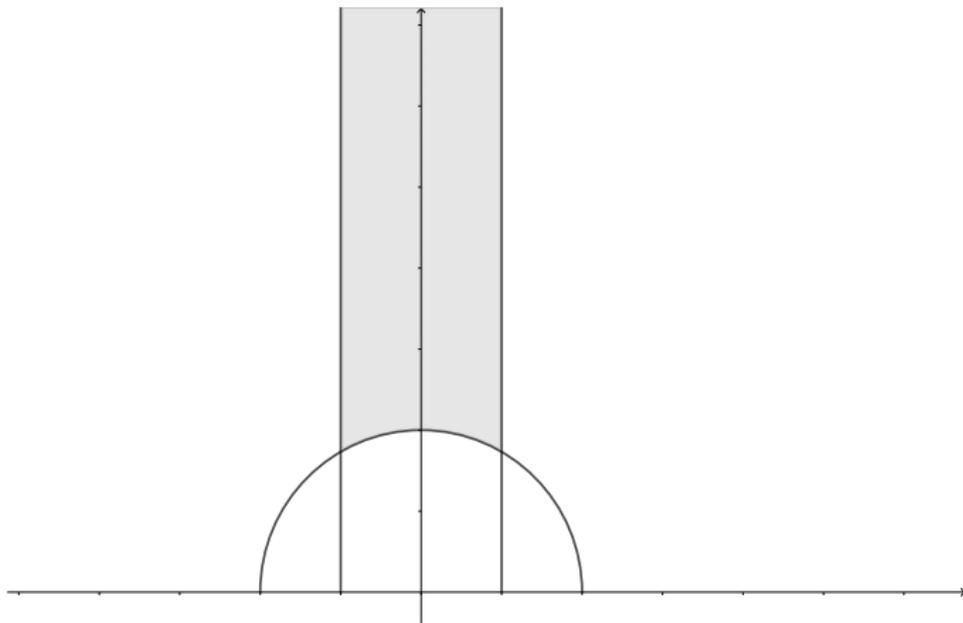
# Des espaces de modules

Des tores de formes différentes



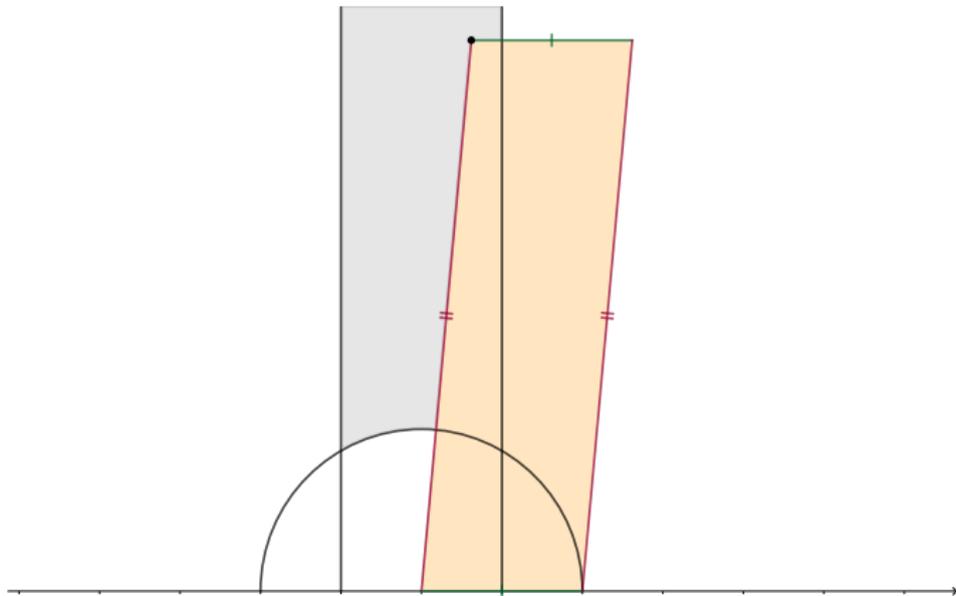
# Des espaces de modules

Des tores de formes différentes paramétrés par un "espace de modules".



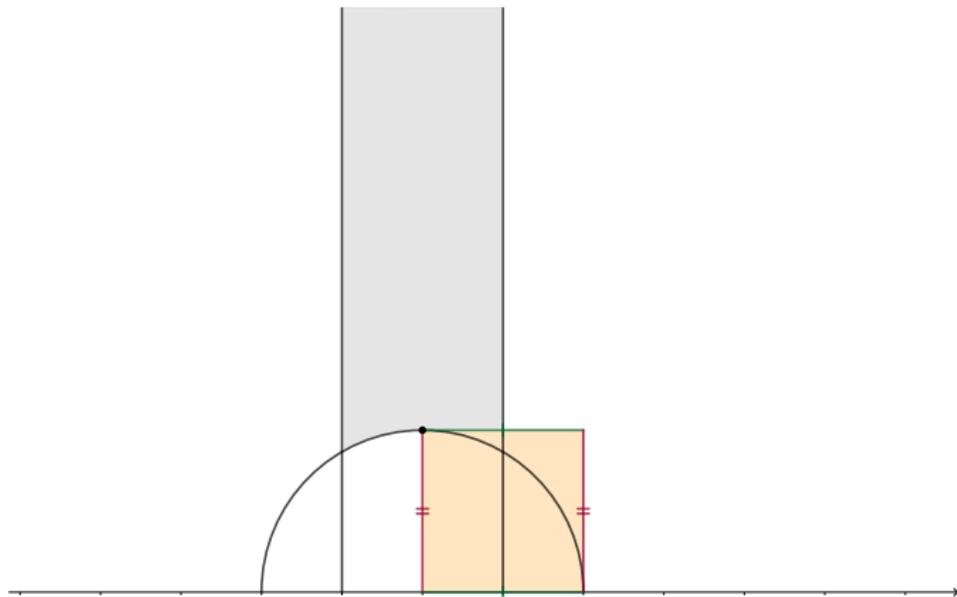
# Des espaces de modules

Des tores de formes différentes paramétrés par un "espace de modules".



# Des espaces de modules

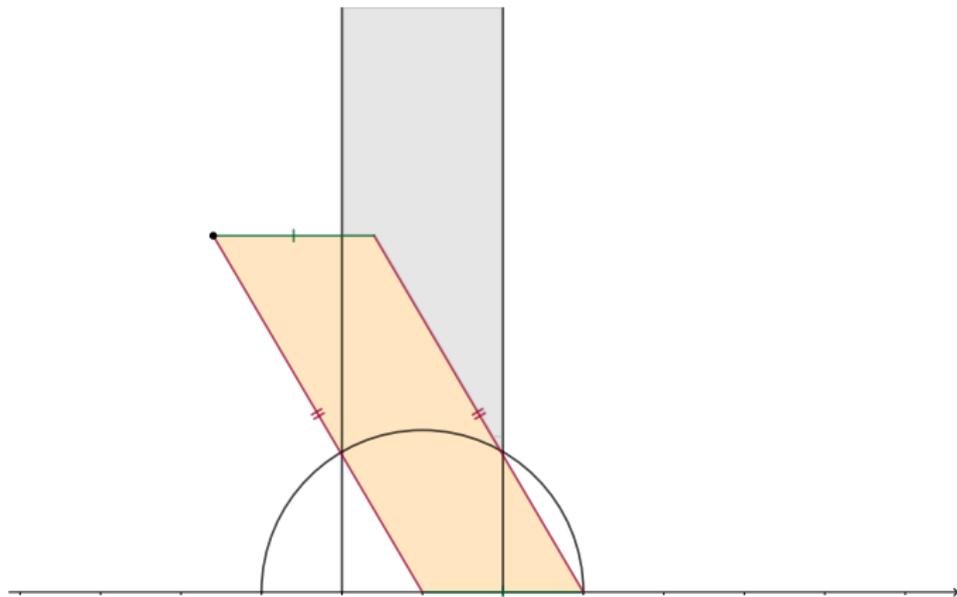
Des tores de formes différentes paramétrés par un "espace de modules".





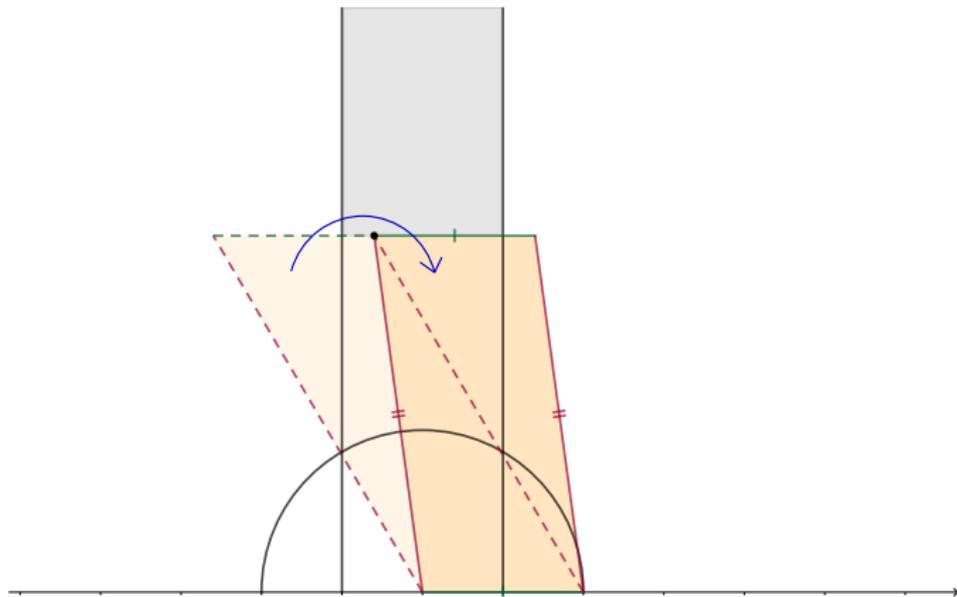
# Des espaces de modules

Des tores de formes différentes paramétrés par un "espace de modules".



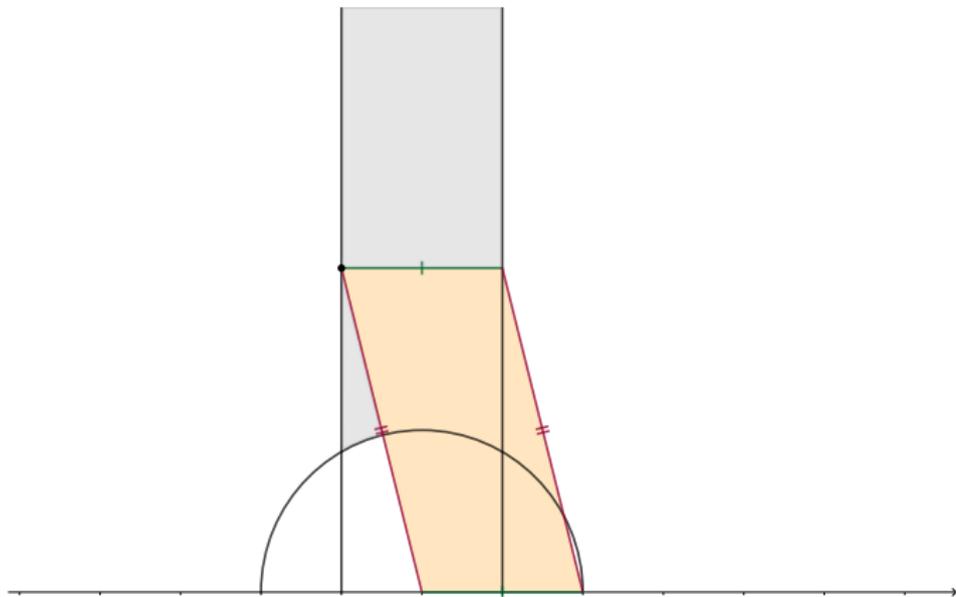
# Des espaces de modules

Des tores de formes différentes paramétrés par un "espace de modules".



# Des espaces de modules

Des tores de formes différentes paramétrés par un "espace de modules".





# Des espaces de modules

Des tores de formes différentes paramétrés par un "espace de modules".

