

Tutorat 1

Niveau *

Exercice 1

Décomposer les permutations suivantes en produit de cycles à supports disjoints, puis en produits de transpositions.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 1425376 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 3261547 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 7146253 \end{pmatrix}$$

Calculer la signature et l'ordre des permutations ci-dessus. Calculer le produit $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3$, sa signature et son ordre.

Exercice 2

Déterminer le sous-groupe de \mathbb{Z} engendré par les entiers 24, 36 et -54 .

Exercice 3

Quelle est la décomposition de $X^3 + 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$? Dans $\mathbb{R}[X]$?

Niveau **

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes.

1. Si σ est une transposition, que peut-on dire de $f(\sigma)$?
2. On dit que deux permutations σ_1 et σ_2 sont conjuguées si $\exists \rho \in \mathcal{S}_n, \sigma_1 = \rho\sigma_2\rho^{-1}$. Montrer que deux permutations conjuguées ont même image par f .
3. Calculer pour $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ deux à deux distincts, $\rho \circ (i, j) \circ \rho^{-1}$ où $\rho = (i, k)(j, l)$ et $(j, k)(i, j)(j, k)$.
4. En déduire que f est la fonction constante 1, ou bien f est la signature.

Exercice 5

Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est-il monogène ?

Exercice 6

Pour quelles valeurs de a le polynôme $(X + 1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?

Niveau ***

Exercice 7

Soit G un sous-groupe de \mathcal{S}_n . Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant : dans un groupe, l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe.

1. Montrer que si G est d'ordre impair alors G ne contient aucune permutation impaire.

2. Montrer que si G contient au moins une permutation impaire, alors G contient autant de permutations paires que de permutations impaires.

Exercice 8

Déterminer tous les sous-groupes finis de (\mathbb{C}^*, \times) .

Exercice 9

Factoriser $P = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$ sachant qu'il admet une racine triple.