

Apuntes de Cálculo y métodos numéricos, Parte 1

Edoardo Provenzi

Prólogo

Estos apuntes quieren ser una guía al curso de cálculo del primer trimestre y un soporte a las clases magistrales.

En escribir las notas he intentado poner el énfasis sobre las motivaciones y los problemas prácticos que llevan a la exigencia de construir cada modelo matemático que examinaremos. De hecho, históricamente, es el reconocimiento de los límites de los instrumentos matemáticos a nuestra disposición que ha permitido el desarrollo de la ciencia hasta llegar al nivel de evolución de nuestra época.

Espero que esta forma de presentar los conceptos matemáticos resulte más comprensible y que los estudiantes puedan apreciar ya a partir de este primer curso de cálculo la fundamental importancia de las matemáticas en la ciencia, tanto teórica como aplicada.

Para reforzar esta idea de conexión entre diferentes disciplinas científicas, he introducido en los apuntes aplicaciones a la física, a la mecánica y a la teoría de los señales.

Además, de acuerdo con la importancia cada vez mayor del ordenador en la ciencia, examinaremos un algoritmo numérico extremadamente útil en las aplicaciones: el método de Newton para aproximar los ceros de funciones de una variable real, que extenderemos a funciones de más variables en el segundo trimestre.

Quiero agradecer, en orden alfabético, a Xènia Alba, Pablo Arias, Felipe Calderero, Juan Calvo y Gloria Haro, cuyas sugerencias y correcciones han contribuido a mejorar sensiblemente estos apuntes.

El autor.

Índice general

1. Conjuntos numéricos y funciones elementales del cálculo	5
1.1. Introducción	5
1.2. Conjuntos abstractos y conjuntos numéricos	5
1.2.1. Intervalos en $\mathbb{R}$	12
1.3. Funciones	15
1.4. Operaciones algebraicas entre funciones	22
1.5. Composición de funciones	23
1.6. Inversión de funciones	25
1.7. Los ceros de las funciones reales de variable real y sus caracterización abstracta	27
1.8. Los conjuntos funcionales	28
1.9. Las funciones elementales de la matemática y sus gráficos . .	29
2. Introducción al cálculo diferencial: el concepto de límite	36
2.1. Motivaciones para la introducción del concepto de límite . . .	36
2.2. Límites de funciones	40
2.3. Límites laterales	47
2.4. Teoremas fundamentales sobre los límites	50
2.5. La extensión de $\mathbb{R}$	53
2.6. Funciones continuas y sus propiedades	53
2.7. Infinitos e infinitésimos de orden inferior, superior y del mismo orden, la relación de ‘ser asintótico a’	58
2.8. Cálculo de límite de polinomios y funciones racionales mediante relaciones asintóticas	62
3. Derivadas	64
3.1. Definición de derivada de una función y su interpretación geométrica y mecánica	64
3.2. Fórmulas para el cálculo de derivadas	68

3.3.	Derivabilidad y continuidad	70
3.4.	Álgebra de las derivadas	71
3.5.	Derivada de la función compuesta (regla de la cadena) y de la función inversa	72
3.6.	Diferenciabilidad y derivabilidad en $\mathbb{R}$: el concepto de linealización local de una función	75
3.6.1.	El diferencial de una función	78
3.7.	La fórmula de Taylor con resto de Peano	80
3.8.	El teorema de l'Hôpital y sus aplicaciones al cálculo de límites en forma indeterminada	86
3.9.	Jerarquía de infinitos e infinitésimos	88
3.10.	Teoremas fundamentales sobre derivadas	91
3.11.	El teorema del valor medio de Lagrange y sus aplicaciones al estudio de la monotonía de una función	93
3.11.1.	La fórmula de Taylor con resto de Lagrange	102
3.12.	La optimización	103
3.13.	El problema del fontanero	103
4.	El método de Newton 1-D	105
4.1.	Construcción del método de Newton 1-D	105
4.2.	Aplicación al cálculo de los valores decimales de las raíces cuadradas	107
4.3.	Criterios de parada del algoritmo de Newton	107
4.4.	Condiciones de convergencia del algoritmo de Newton	108
4.5.	Aplicación al cálculo aproximado de los puntos de intersección entre gráficos de funciones	112
5.	Integrales	116
5.1.	Definición de la integral de Riemann	116
5.2.	Propiedades de la integral	120
5.3.	Valor medio y valor eficaz de una función	121
5.4.	El teorema fundamental del cálculo diferencial	122
5.5.	Integrales y dinámica de las partículas	131
5.6.	Cálculo de la longitud del gráfico de una función	132
5.7.	Integrales generalizadas: integración de funciones no continuas o en intervalos ilimitados	133
5.8.	La función integral	136
5.8.1.	Una aplicación de la función integral: la ecualización de histogramas	138
5.9.	Relaciones de ortogonalidad de las funciones sin y cos	140

5.10. Aproximación numérica de integrales	141
5.10.1. Integración por aproximación rectangular	142
5.10.2. Integración por aproximación trapezoidal	143
5.10.3. Integración por aproximación parabólica (fórmula de Cavalieri-Simpson)	145
5.10.4. Comandos Matlab para aproximar numéricamente in- tegrales	148
6. Sucesiones y series numéricas y de funciones	149
6.1. El principio de inducción	149
6.2. Sucesiones numéricas	151
6.3. Sucesiones de funciones	154
6.3.1. El teorema de aproximación de Stone-Weierstrass . . .	156
6.4. Series numéricas	157
6.5. Series de funciones, de Taylor y de potencias	159
6.6. La formula de la exponencial compleja de Euler	163

Capítulo 1

Conjuntos numéricos y funciones elementales del cálculo

1.1. Introducción

En este capítulo profundizaremos en el conocimiento de los objetos básicos del cálculo: los **conjuntos** y las relaciones entre ellos, que se representan a través de **funciones**.

1.2. Conjuntos abstractos y conjuntos numéricos

La teoría general de los conjuntos constituye un campo muy complejo y abstracto de la matemática. Aquí veremos una versión simplificada y más adapta a un curso de ingeniería.

Def. (intuitiva) de conjunto: un **conjunto** X es una colección de objetos que o *se pueden enumerar explícitamente* o bien tienen una *propiedad característica $\mathcal{P}$ en común*.

Los objetos de los conjuntos se llaman **elementos** o **puntos** y la notación canónica que se usa para representar un conjunto a través de su propiedad que lo define $\mathcal{P}$ es la siguiente:

$$X = \{x \in X : x \text{ satisface la propiedad } \mathcal{P}\}$$

‘ $\in$ ’ se lee como ‘*pertenece a*’ y ‘ $\therefore$ ’ se lee como ‘*tal que*’.

Veamos unas definiciones útiles para el resto del curso:

- Si un conjunto X tiene un número finito de elementos, este número se llama **cardinal** $\text{card}(X)$; si un conjunto no tiene un número finito de elementos, se dice que su cardinal es *infinito*;
- Si un conjunto tiene un solo elemento, o sea $X = \{x\}$, se dice que es un **singleton** y si X no tiene ningún elemento, se dice que es el **conjunto vacío** y se escribe $X = \emptyset$;
- Si todos los elementos de Y pertenecen también a otro conjunto X , se dice que Y es un **subconjunto** de X y se escribe $Y \subseteq X$ diciendo que Y **está incluido** en X . Si X contiene todos los elementos de Y y también otros elementos que no pertenecen a Y se escribe $Y \subset X$ y se dice que Y está **incluido estrictamente** en X . Por convención, *el conjunto vacío $\emptyset$ se considera un subconjunto de cualquier otro conjunto*.
- $X \cap Y$ representa la **intersección** entre los conjuntos X e Y , o sea el conjunto de los elementos comunes a ambos conjuntos. Si X e Y no tienen elementos comunes, o sea $X \cap Y = \emptyset$, se dice que son **disjuntos**;
- $X \cup Y$ representa la **unión** entre los conjuntos X e Y , o sea el conjunto que tiene todos los elementos de X y de Y (sin repetir los elementos comunes);
- La operación de eliminación de un elemento de un conjunto se escribe con el símbolo $\setminus$, por ejemplo: $\{a, b, c\} \setminus \{b\} = \{a, c\}$. $\setminus$ se puede considerar como la operación de diferencia entre conjuntos.

Durante el curso estaremos particularmente interesados en los **conjuntos numéricos**. Comencemos con los tres más elementales:

- Numeros **naturales**: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$;
- Numeros **enteros**: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$;
- Numeros **racionales**: $\mathbb{Q} = \left\{ x : \exists p, q \in \mathbb{Z}, \text{MCD}(p, q) = 1 : x = \frac{p}{q} \right\}$.

La última definición significa que para cada $x \in \mathbb{Q}$ existen $(\exists)^1$ dos números enteros p, q *coprimos*, o sea cuyo máximo común denominador $MCD(p, q)$ es 1, tales que x se puede escribir como el cociente entre p y q . La elección de p y q coprimos sirve para evitar repetir la misma fracción escrita con números que son múltiplos de p e q , por ejemplo $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ definen el mismo número racional, con la diferencia de que 2 y 3 son coprimos mientras que 4 y 6 no. Una fracción entre números coprimos se denomina *fracción irreducible*. Obviamente *dos números pares no pueden ser coprimos*, porque, como mínimo, el MCD entre ellos es 2. Nótese también que si elegimos $q = 1$, obtenemos que todos los números enteros se pueden considerar números racionales con denominador igual a 1. Resultan evidentes las siguientes inclusiones estrictas:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

$\mathbb{N}$ tiene dos subconjuntos notables, que son el conjunto de los números **pares** e **impares**:

$$\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} : \exists n : p = 2n\}, \quad \mathbb{I} = \{i \in \mathbb{N} : \exists n : i = 2n + 1\}.$$

$p = 2n$ y $i = 2n + 1$ son las representaciones genéricas de un número par e impar, respectivamente. Por ejemplo, 8 es par y se puede escribir como $8 = 2 \cdot 4$, y 9 es impar y se puede escribir como $9 = 2 \cdot 4 + 1$. Evidentemente $\mathbb{P} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ y $\mathbb{P} \cup \mathbb{I} = \mathbb{N}$.

Observamos que si sumamos, multiplicamos y elevamos a una potencia $n \in \mathbb{N}$ dos números de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$, el resultado sigue siendo un número de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$. Se dice que los tres conjuntos numéricos son *cerrados* con respecto a la operación de suma, producto y potencia natural. La propiedad de un conjunto de ser o no ser cerrado con respecto a una operación tiene una consecuencia inmediata sobre las ecuaciones que se pueden o no pueden resolver en un conjunto: si definimos las ecuaciones $x = a + b$, $x = a \cdot b$, $x = a^n$, con $a, b \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$, siempre podemos encontrar un número $x \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$, respectivamente, que satisface esas ecuaciones.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ son cerrados también con respecto a la operación de diferencia, pero $\mathbb{N}$ no. En matemática, cuando se dice que un conjunto no tiene una propiedad, para demostrarlo es suficiente enseñar un **contraejemplo** en el cual se ve la falta de validez de la propiedad. En nuestro caso, es muy fácil

¹ $\exists$ se llama **cuantificador existencial** y expresa la existencia de (por lo menos) un elemento de un conjunto con una cierta propiedad. Si se escribe $\exists!$ eso quiere decir que existe *un solo elemento* con esa propiedad. Otro cuantificador muy usado en matemáticas es $\forall$ llamado **cuantificador universal**, que se lee ‘para cada’ y expresa todos los elementos de un conjunto que satisfacen una determinada propiedad.

ver que cualquier número natural n restado por un número natural m mayor que n devuelve un número entero negativo que, por definición, no pertenece a $\mathbb{N}$. Por ejemplo, $n = 4$, $m = 7$, $n - m = -3 \notin \mathbb{N}$. De aquí sigue que $\mathbb{N}$ no es un conjunto apto para resolver las ecuaciones del tipo $x = a - b$, con $a, b \in \mathbb{N}$, porque el resultado x de la resta entre a y b podría no ser un número natural.

Hemos visto que para demostrar que un conjunto no tiene una propiedad es suficiente enseñar un contraejemplo. Viceversa, es decir,

¿como se demuestra que un conjunto tiene una determinada propiedad?

X tiene la propiedad $\mathcal{P}$ cuando todos los elementos de X la satisfacen. Sin embargo, si el conjunto es infinito, es imposible llevar al cabo la tarea de demostrar directamente que cada elemento de X satisface $\mathcal{P}$. Para superar este problema los matemáticos desarrollan *pruebas abstractas* sobre el **elemento genérico** del conjunto: si una propiedad vale para un elemento abstracto que se puede considerar como cualquier elemento de un conjunto, entonces vale para todos los elementos del conjunto y no hace falta repetir la prueba para los otros elementos de X . Este tipo de razonamiento lógico² tiene una importancia fundamental en matemática y veremos un ejemplo de demostraciones como ésta en breve.

Dado que estamos hablando de lógica, tomamos la ocasión para introducir el importante concepto de **implicación**: cuando de una propiedad $\mathcal{P}_1$ sigue otra propiedad $\mathcal{P}_2$, se dice que $\mathcal{P}_1$ **implica** $\mathcal{P}_2$ y se escribe $\mathcal{P}_1 \implies \mathcal{P}_2$. Se dice que la propiedad $\mathcal{P}_1$ es **condición suficiente** para que valga la propiedad $\mathcal{P}_2$ o también que $\mathcal{P}_1$ es una propiedad *más fuerte* que $\mathcal{P}_2$. Viceversa, se dice que $\mathcal{P}_2$ es una **condición necesaria** para que valga $\mathcal{P}_1$ o que es una propiedad *más débil*.

Un ejemplo geométrico puede ayudar a la comprensión de estos conceptos: sabemos que la proposición ‘T triángulo equilátero’ $\implies$ ‘T triángulo isósceles’ es verdadera, y, de hecho, para un triángulo, ser equilátero es una condición más fuerte, que implica, ser isósceles porque si T tiene 3 lados iguales, con más razón, tendrá dos lados iguales. Viceversa, si T es equilátero, necesariamente tiene que ser isósceles, ¡porque si no tiene dos lados iguales, tampoco podrá tener 3 lados iguales!

Si se escribe la flecha en el sentido opuesto, o sea $\impliedby$, eso significa que la propiedad que aparece a la izquierda de la flecha está implicada por la propiedad que aparece a su derecha. Cuando se puede escribir la flecha en los

²Nota histórica: los primeros en desarrollar esta lógica para demostrar proposiciones fueron los griegos antiguos.

dos lados, o sea $\Longleftrightarrow$, eso significa que las dos propiedades son **equivalentes**, porque se implican mutuamente. $\Longleftrightarrow$ se lee: **si y solo si**.

Veamos ahora la prueba de una proposición en la cual se usa tanto el concepto de elemento genérico de un conjunto, como el de doble implicación y que, además, nos servirá después para demostrar un teorema importante sobre los números racionales.

Proposición: $p \in \mathbb{P} \Longleftrightarrow p^2 \in \mathbb{P}$ y $i \in \mathbb{I} \Longleftrightarrow i^2 \in \mathbb{I}$.

Prueba. Para demostrar una doble implicación hay que demostrar, generalmente por separado, que vale la implicación hacia la derecha y también la implicación hacia la izquierda. Comencemos con las implicaciones hacia la derecha.

$(p \in \mathbb{P} \implies p^2 \in \mathbb{P})$: escribimos el elemento genérico del conjunto $\mathbb{P}$ y demostramos que esta propiedad vale para ese elemento. La demostración se extenderá automáticamente a todos los otros números pares. Sea entonces $p = 2n$, con $n \in \mathbb{N}$, elevamos p al cuadrado: $p^2 = (2n)^2 = 2(2n^2)$, entonces también p^2 se puede escribir como el producto de 2 por un número natural, $2n^2$, eso prueba que p^2 es par.

$(i \in \mathbb{I} \implies i^2 \in \mathbb{I})$: análogamente a lo que hicimos antes, escribimos el elemento genérico del conjunto $\mathbb{I}$ y demostramos que esta propiedad vale para ese elemento, la demostración se extenderá automáticamente a todos los otros números impares. Sea entonces $i = 2n + 1$, con $n \in \mathbb{N}$, elevamos i al cuadrado: $i^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$, entonces también i^2 se puede escribir como el producto de 2 por un número natural, $2n^2 + 2n$, más 1, eso prueba que i^2 es impar.

$(p \in \mathbb{P} \Longleftarrow p^2 \in \mathbb{P})$: sea p^2 un número par obtenido elevando al cuadrado un número natural p . Dado que $\mathbb{N}$ es la unión disjunta del conjunto de los números pares e impares, sólo quedan dos posibilidades p es par o impar. Si p fuera impar, por lo que acabamos de demostrar, p^2 sería impar! Entonces sólo queda la posibilidad que también p sea par.

$(i \in \mathbb{I} \Longleftarrow i^2 \in \mathbb{P})$: se usa el mismo razonamiento del punto anterior. $\square$

Volviendo a las operaciones entre números: $\mathbb{Z}$ no es cerrado con respecto a la operación de división, por ejemplo -4 y 9 pertenecen a $\mathbb{Z}$ pero la división $\frac{-4}{9}$ no es un número entero. En cambio $\mathbb{Q}$ es cerrado con respecto a la operación de división, o sea, la ecuación $x = \frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbb{Q}$ tiene solución en $\mathbb{Q}$. Sin embargo, $\mathbb{Q}$ no es cerrado con respecto a la operación de extracción de la raíz, como vamos a demostrar enseñando que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Para hacer eso, necesitamos introducir una técnica de demostración muy potente que se llama

Técnica de demostración por reducción al absurdo.

- Queremos demostrar que se cumple la propiedad $\mathcal{P}$;
- Si $\mathcal{P}$ es una propiedad *verdadera*, entonces la afirmación opuesta a $\mathcal{P}$, que escribimos como $\overline{\mathcal{P}}$, es *falsa*;
- Una afirmación falsa lleva a contradicciones lógicas, llamadas ‘*absurdos*’;
- Entonces, si se logra demostrar que $\overline{\mathcal{P}}$ lleva a un absurdo, eso muestra que $\overline{\mathcal{P}}$ es falsa;
- Habiendo demostrado que $\overline{\mathcal{P}}$ es falsa, queda demostrado que $\mathcal{P}$ es verdadera.

Euclides hizo un uso extenso de esta técnica en su famoso libro ‘*Elementos*’ y a él se debe la siguiente demostración, una de las más elegantes de toda la matemática, de un resultado obtenido por primera vez por *Hippasos de Metaponto*.

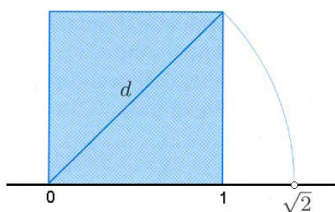
Proposición: $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Prueba. Usamos la técnica de demostración por absurdo. Negamos la afirmación, o sea declaramos que $\sqrt{2}$ es un número racional, y demostramos que eso lleva a una contradicción. Eso demostrará que la afirmación ‘ $\sqrt{2}$ es un número racional’ es falsa, entonces quedará demostrado que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Si $\sqrt{2}$ es un número racional, por definición, existen dos números enteros $p, q \in \mathbb{Z}$, p y q coprimos y tales que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Si elevamos esta expresión al cuadrado obtenemos $2 = \frac{p^2}{q^2}$, o sea $p^2 = 2q^2$, lo cual dice que p^2 es par, pero hemos visto antes que p^2 es par si y sólo si p es par. Entonces p se puede escribir como $p = 2n$, por un adecuado $n \in \mathbb{N}$, con lo cual la relación $p^2 = 2q^2$ se vuelve $4n^2 = 2q^2$, o sea $q^2 = 2n^2$, por lo tanto también q^2 es par y entonces también q es par.

Hemos llegado al absurdo, o sea a la contradicción, porque hemos supuesto que p y q eran coprimos, pero siguiendo la hipótesis de absurdo hemos llegado a mostrar que p y q son pares y, por tanto, no coprimos. $\square$

Este resultado es muy sorprendente y *contraintuitivo* porque, siendo $\mathbb{Q}$ cerrado con respecto a la división, dados dos números racionales, siempre podemos construir otro número racional que esté entre ellos, por ejemplo su media aritmética: $\frac{p+q}{2}$. Intuitivamente, podríamos pensar que podemos seguir tomando promedios de números racionales llegando a identificar cualquier número como un número racional, pero el teorema que acabamos de demostrar enseña que nuestra intuición no es correcta: no podemos representar gráficamente los números racionales como una recta ‘continua’ porque en $\mathbb{Q}$ existen ‘lagunas’, como por ejemplo $\sqrt{2}$. Para dibujar la laguna dada por $\sqrt{2}$ se suele construir (véase la figura siguiente) un cuadrado de lado 1 con el vértice de suroeste en el punto 0 de una recta horizontal: por el teorema de Pitágoras, la diagonal del cuadrado tiene longitud $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, si rotamos la diagonal sobre la recta encontramos un punto que tiene una distancia de $\sqrt{2}$ de 0 (porque la rotación mantiene constante la longitud de la diagonal del cuadrado). Como acabamos de ver, ese punto no puede ser representado como un número racional. Existen infinitos puntos como $\sqrt{2}$, por ejemplo π . Esos puntos se llaman **irracionales** y se puede demostrar que son ‘muchos más’ que los números racionales, pero eso va más allá del fin de este curso.



En la proposición que sigue damos una caracterización útil de los números racionales e irracionales en términos de números decimales.

Proposición: los números racionales coinciden con los números decimales finitos o periódicos (con periodo diferente de 9) y los números irracionales coinciden con los números decimales infinitos no periódicos.

Ejemplos: $1/4 = 0,25$ y $1/3 = 0.\bar{3}$ son racionales y tienen una expresión decimal finita e infinita periódica, respectivamente, pero $\sqrt{2} = 1,4142135\dots$ es un número infinito no periodico.

Se define el conjunto de los **números reales** como la unión de $\mathbb{Q}$ con los números irracionales:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{Irracionales}\}.$$

Se puede demostrar **que cada punto sobre la recta se puede identificar con un número real**, entonces $\mathbb{R}$ no tiene las lagunas de los racionales. Por esta razón, a partir de ahora, llamaremos $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales o la **recta real** o el **eje real**. A pesar de tener lagunas, $\mathbb{Q}$ es ‘denso’ en $\mathbb{R}$, una afirmación que se puede formalizar en el siguiente teorema.

Teorema de densidad de los racionales: $\forall$ pareja de números reales r_1, r_2
 $\exists$ un número racional q tal que $r_1 < q < r_2$.

El teorema de densidad nos dice que *cada número real puede ser aproximado con precisión arbitraria por un número racional*, ya que, si queremos aproximar por ejemplo r_1 , podemos elegir r_2 muy cercano a r_1 , y por el teorema anterior, ¡existirá un número racional q aún más cercano a r_1 que r_2 ! Este hecho se usa cada día en los ordenadores.

Otra propiedad de $\mathbb{R}$ que resultará útil en el curso es que $\mathbb{R}$ es un conjunto *totalmente ordenado*, es decir, para cada $x, y \in \mathbb{R}$ se puede definir una relación binaria $<$ entre ellos con este significado: $x < y \Leftrightarrow x - y < 0$.

1.2.1. Intervalos en $\mathbb{R}$

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, definimos estos subconjuntos notables de $\mathbb{R}$:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, intervalo **cerrado** y **limitado**;
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, intervalo semiabierto inferiormente y limitado;
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, intervalo semiabierto superiormente y limitado;
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, intervalo **abierto** y limitado, a y b se llaman **puntos de frontera**;
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$, intervalo semiabierto e **ilimitado** superiormente;
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$, intervalo abierto e ilimitado superiormente;

- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$, intervalo semiabierto e ilimitado inferiormente;
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$, intervalo abierto e ilimitado inferiormente;

En particular, identificamos

- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$;
- $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$;
- $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$;
- $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$;
- $\mathbb{R}_0^- = (-\infty, 0]$.

$+\infty$ y $-\infty$ **no son números reales**, sino que definen un ‘*comportamiento tendencial*’ que formalizaremos con la teoría de los límites.

a y b se llaman **extremos** o **puntos de frontera** del intervalo (cuando un intervalo es limitado o lo es inferiormente o superiormente).

Terminamos el recorrido de los conjuntos numéricos con los números complejos. Hemos visto que $\mathbb{Q}$ no es cerrado con respecto a la operación de extracción de la raíz, porque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

En $\mathbb{R}$ podemos resolver todas las ecuaciones algebraicas que se pueden resolver en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y además ecuaciones del tipo $x = a^2$ porque $\mathbb{R}$ es cerrado con respecto a operaciones de extracción de raíz.

Sin embargo, existen ecuaciones algebraicas que no se pueden resolver en $\mathbb{R}$, por ejemplo: $x^2 = -1$, porque ningún número real, elevado al cuadrado (o a otra potencia par), devuelve un número negativo.

Lo números complejos fueron utilizados por primera vez en la historia por los algebristas italianos Scipione del Ferro (1465-1526), Niccolò Tartaglia (1499-1557), Girolamo Cardano (1501-1576) y Raffaele Bombelli (1526-1572) con el preciso intento de arreglar esta falta. La solución se demostró ser la siguiente: se define la **unidad imaginaria**³ como $i = \sqrt{-1}$ y se definen los números complejos como la suma de dos números reales, uno de los cuales multiplicado por i :

³El nombre ‘imaginario’ se debe al grande matemático francés René Descartes (1596-1650) que pensaba (incorrectamente) que los números complejos fuesen sólo artificios matemáticos para resolver ecuaciones algebraicas de grado superior al primero y que no existieran en la ‘realidad’, sino sólo en la imaginación matemática.

$$\mathbb{C} = \{z : \exists x, y \in \mathbb{R} : z = x + iy\}.$$

$\mathbb{C}$ se llama conjunto de los números complejos, x se llama **parte real** e y se llama **parte imaginaria** de z . La teoría de los números complejos se desarrolla en el curso de Álgebra, al cual hacemos referencia. Aquí decimos simplemente que $\mathbb{C}$ *no es un conjunto ordenado* y que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ porque cada $z \in \mathbb{C}$ con parte imaginaria nula se puede identificar con el número real que da su parte real. La cadena de inclusiones entre conjuntos numéricos es:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

1.3. Funciones

El concepto de función es central en matemática y, sorprendentemente, sólo en una fecha relativamente reciente (1829) ha sido formalizado.

La idea básica que está detrás del concepto de función es la *conexión entre input y output de un sistema*:



f es el ‘conector’ que asocia a cada dato de input x un único dato de output $f(x)$. Es la **unicidad** de la correspondencia la que caracteriza el concepto de función. Para tener un ejemplo práctico, podemos pensar en una ‘caja negra’ que calcule el área de los círculos a partir del radio r , área que sabemos ser πr^2 . En este sistema cada dato de input es un valor r del radio del círculo, al cual corresponde un único dato de output πr^2 y la caja negra es la función Área que asocia r a πr^2 :

$$r \longrightarrow \boxed{\text{Área}} \longrightarrow \pi r^2.$$

Resulta muy útil abstraer la definición y no atarse a un ejemplo concreto y tener una definición general, que debemos a Johann Dirichlet, matemático alemán (1805-1859) y Nikolai Lobachevsky, matemático ruso (1792-1856).

Def. general de función (Dirichlet-Lobachevsky): sean X e Y dos conjuntos cualquiera. Una función f entre X e Y es una *ley que asocia a cada elemento $x \in X$ uno y un solo elemento $y = f(x) \in Y$* . Se suele escribir

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = f(x), \end{aligned}$$

o bien $f: X \longrightarrow Y, x \in X \longmapsto y = f(x) \in Y$.

$y = f(x)$ se llama **imagen de x** a través de f . x se llama **pre-imagen** o **anti-imagen** de y vía f . X se llama **dominio** de f y el conjunto de todas las imágenes de elementos de X a través de f se llama **codominio** o **imagen** de f y se escribe $f(X)$ (o $\text{Im} f$ en algunos libros).

Evaluar una función f en un punto x_0 de su dominio significa calcular cuanto vale su imagen, o sea encontrar $y_0 = f(x_0)$.

El ejemplo más trivial de función está dado por la **función identidad** sobre un conjunto cualquiera X :

$$\begin{aligned} id_X : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto id_X(x) = x, \end{aligned}$$

o sea, la función que deja cualquier punto del conjunto invariado. Veremos la utilidad del concepto de función identidad más adelante cuando hablemos de la relación entre composición e inversión de funciones.

Cuando $X \subseteq \mathbb{R}$ se dice que f es una función de variable real, cuando $Y \subseteq \mathbb{R}$ se dice que f toma valores reales, si tanto X como Y son subconjuntos de $\mathbb{R}$, se dice que f es una **función real de variable real**:

$$\begin{aligned} f : X \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow Y \subseteq \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x), \end{aligned}$$

llamaremos $f(x)$ a la **expresión analítica** o **correspondencia funcional** de f . Como dominio y codominio de una función real de variable real son siempre subconjuntos de $\mathbb{R}$, se suelen denotar estas funciones simplemente a través de la correspondencia funcional, escribiendo $y = f(x)$, expresando a parte el dominio.

Aunque también nosotros muchas veces usaremos esta cómoda convención, invitamos a los estudiantes a practicar la notación completa, porque resultará útil a la hora de analizar la composición de funciones y la teoría de las funciones de más variables.

Remarcamos además que **una función está completamente e unívocamente determinada a través de su dominio, codominio y correspondencia funcional**. Así pues, *dos funciones que tienen la misma correspondencia funcional, pero dos dominios o codominios diferentes, tienen que considerarse dos funciones diferentes*.

Las funciones reales de variable real más sencillas son las **funciones constantes**.

Def.: llamamos función constante (real) cualquier función de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{k} : \mathbb{R} &\longrightarrow \{k\} \subset \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathbf{k}(x) = k. \end{aligned}$$

$\{k\}$ es el subconjunto singleton de $\mathbb{R}$ dado por el solo número real k . Denotaremos por sencillez las funciones constantes como sigue $\mathbf{k}(x) \equiv k$, donde $\equiv$ se lee ‘equivale’, para remarcar que una función constante mapea

todos los números reales en una constante k (que es la constante que define la función). En particular, tenemos la **función idénticamente nula** $\mathbf{0}(x) \equiv 0$ y la **función unidad** $\mathbf{1}(x) \equiv 1$.

El hecho de que la imagen de una función constante no contenga la variable x no tiene que confundir: el dominio y el codominio de una función no tienen porque coincidir, los datos de input y los de output de una función pueden ser muy diferentes entre ellos. Como ejemplo concreto podemos pensar a la función que calcula el área de un rectángulo: los datos de input son dos, la longitud de los dos lados del rectángulo, pero el dato de output es sólo uno, el área del rectángulo.

Otros ejemplos notables de funciones reales de variable real son la *función valor absoluto y signo*, que nos permiten mostrar también que las funciones se pueden definir ‘por trozos’:

- Función **signo**: devuelve el signo de un número real multiplicado por 1. Se puede definir en dos formas, una definida sobre $\mathbb{R}$ quitando el cero y la otra definida sobre todo $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \text{sign} : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \{-1, +1\} \\ x &\mapsto \text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sign}_0 : \mathbb{R} &\longrightarrow \{-1, 0, +1\} \\ x &\mapsto \text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

- Función **valor absoluto**: devuelve la magnitud, con signo siempre positivo, de un número real

$$\begin{aligned} | \cdot | : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto | \cdot |(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Resulta evidente que:

$$\boxed{|x| = x \cdot \text{sign}(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\boxed{\text{sign}(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Aunque las funciones reales de variable real sean funciones de enorme importancia en la ciencia, remarcamos que éstas son sólo una clase particular de funciones y que *es importante recordar la definición general de función*.

A cada función se asocia un gráfico, cuya definición necesita recordar lo que es el **producto cartesiano** entre dos conjuntos X, Y :

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y, \text{ con ese orden}\}$$

el producto cartesiano entre dos conjuntos es **el conjunto cuyos elementos son las parejas ordenadas de elementos de X y de Y** , con ese orden. Iterando el proceso se define el producto cartesiano entre n conjuntos $X_1, \dots, X_n$ como sigue:

$$X_1 \underbrace{\times \dots \times}_{n \text{ veces}} X_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in X_i, i = 1, \dots, n, \text{ con ese orden}\}$$

o sea el conjunto de las n -uplas ordenadas en la cual el elemento de posición i viene del conjunto X_i .

Si, en particular, todos los X_i coinciden con X , entonces tenemos

$$X^n = X \underbrace{\times \dots \times}_{n \text{ veces}} X \quad \text{potencia cartesiana } n\text{-ésima de } X,$$

X^n está dado por n -uplas ordenadas de elementos de un solo conjunto. En particular, si $X = \mathbb{R}$, tenemos:

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, **plano real** dado por las parejas de **abscisas x** y **ordenadas y** ;
- $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$, **espacio real tridimensional** dado por las triplas de **abscisas x** , **ordenadas y** y **alturas z** ;
- $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ veces}} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n\}$, **espacio real n -dimensional**.

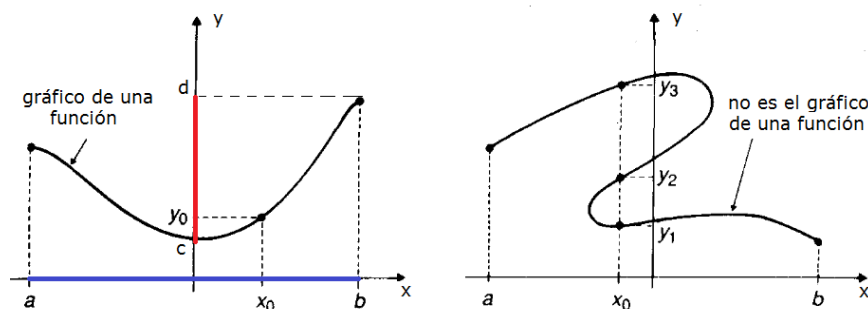
Estamos listos para poder definir el concepto de gráfico de una función.

Def.: dada la función $f : X \rightarrow Y$, $x \mapsto f(x)$, su **gráfico** es el subconjunto de $X \times Y$ definido por

$$\text{gráfico}(f) = \{(x, y) : x \in X, y = f(x)\},$$

o sea, el conjunto de las parejas ordenadas donde el primer elemento es un punto del dominio de f y el segundo es la imagen de ese punto a través de f .

Si f es una función real de variable real, su gráfico es una **curva en el plano real**, como muestra la figura de izquierda de la siguiente imagen.



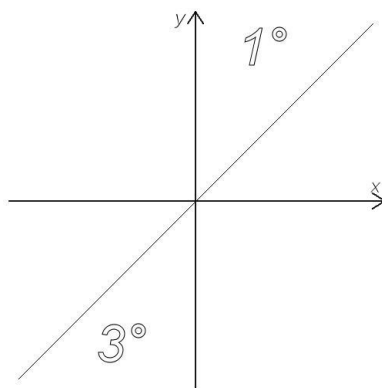
Cada punto de la curva, proyectado sobre el eje horizontal, corresponde a un único elemento x_0 del dominio $[a, b]$ de f (resaltado en azul). En cambio, si proyectamos sobre el eje vertical, encontramos un elemento y_0 del codominio $[c, d]$ de f (resaltado en rojo).

Gráficamente, el dominio de una función real de variable real es un subconjunto del eje horizontal, mientras que el codominio es un subconjunto del eje vertical.

En la figura de derecha de la imagen arriba se ve una curva que *no representa el gráfico de una función*, porque, por ejemplo, la recta vertical que corta el eje horizontal en x_0 intersecta la curva en tres puntos diferentes que se proyectan sobre el eje vertical en los puntos y_1, y_2, y_3 . Si la curva representara el gráfico de una función, x_0 tendría tres imágenes distintas, lo cual es contrario al carácter de unicidad de la correspondencia entre input y output que caracteriza el concepto de función.

Obviamente, **el gráfico de las funciones constantes es una recta horizontal que tiene una altura igual al valor de la constante**. En particular, el gráfico de la función nula coincide con el eje horizontal dado por los puntos $(x, 0)$ del plano real (a cualquier abscisa corresponde ordenada

nula). El gráfico de la función identidad sobre $\mathbb{R}$, o sea $id(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$ es la recta bisectriz al primer y tercer cuadrante:



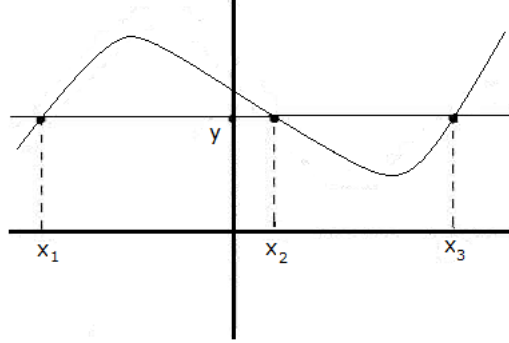
El la página siguiente introducimos unas definiciones sobre propiedades notables de las funciones reales de variable real.

Propiedades de las funciones reales de variable real

Una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ real de variable real se dice:

- **limitada** si su codominio está incluido en un subintervalo finito de $\mathbb{R}$, o sea si su gráfico esta contenido en una cinta horizontal del plano;
- **monótona creciente** sobre un intervalo $I \subseteq D$ si $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \leq f(x_2) \forall x_1, x_2 \in I$ (si vale $<$ se dice que f es estrictamente monótona creciente), o sea, si la ordenada sobre su gráfico crece a medida que la abscisa crece;
- **monótona decreciente** sobre un intervalo $I \subseteq D$ si $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \geq f(x_2) \forall x_1, x_2 \in I$ (si vale $>$ se dice que f es estrictamente monótona decreciente), o sea, si la ordenada sobre su gráfico decrece a medida que la abscisa crece;
- **periódica** con periodo $p \in \mathbb{R}$ si $f(x+p) = f(x) \forall x \in D$, o sea, si cada trozo de gráfico de f de longitud p se repite;
- **par** si $f(-x) = f(x), \forall x \in D$, (su gráfico es simétrico con respecto al eje vertical);
- **impar** si $f(-x) = -f(x) \forall x \in D$, (su gráfico es simétrico con respecto al origen de los ejes);
- **inyectiva** si $x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$, o sea, si f mapea dos elementos diferentes del dominio en dos imagenes diferentes. Por definición, cada pareja de puntos diferentes sobre del gráfico de una función inyectiva se proyecta en dos puntos diferentes sobre el eje vertical. Es evidente que una función estrictamente monótona (creciente o decreciente) es siempre inyectiva;
- **exhaustiva** sobre todo $\mathbb{R}$ si $f(D) = \mathbb{R}$, o sea, si todos los valores de $\mathbb{R}$ coinciden con imágenes de elementos de D a través de f . Obviamente una función limitada no puede ser exhaustiva sobre $\mathbb{R}$;
- **biyectiva** si es simultáneamente inyectiva y exhaustiva, o sea si $\forall y \in \mathbb{R} \exists! x \in D$ tal que $y = f(x)$, se dice que f realiza una correspondencia 1-1 entre D y $\mathbb{R}$.

Durante las clases de prácticas presentaremos ejemplos de funciones elementales y discutiremos sus propiedades de inyectividad, periodicidad, etc. La figura que sigue presenta el gráfico de una función no inyectiva.



existen tres puntos con abscisas diferentes x_1, x_2, x_3 , que tienen la misma ordenada $y = f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$.

1.4. Operaciones algebraicas entre funciones

Las funciones se pueden sumar, restar, multiplicar por un número real o entre ellas (y entonces elevar a potencia) y dividir (siempre que la función que aparece en el denominador sea diferente de 0). Estas operaciones se implementan *puntualmente*, como vamos a ver con las siguientes definiciones.

Def.: dadas $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$,

- $f \pm g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, $\forall x \in D$;
- $f \cdot g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$, $\forall x \in D$;
- $f^n : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^n(x) = (f(x))^n$, $\forall x \in D$, $n \in \mathbb{N}$;
- $c \cdot f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(c \cdot f)(x) = cf(x)$, $\forall x \in D$;
- $\frac{f}{g} : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $\forall x \in D$ tal que $g(x) \neq 0$.

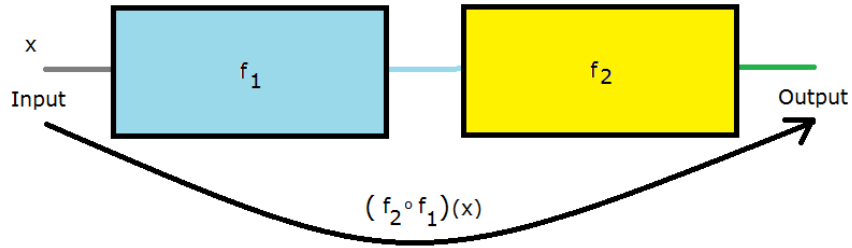
Veamos un ejemplo: $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = x^2$, ambas definidas sobre todo $\mathbb{R}$,

- $(f + g)(x) = \sin(x) + x^2$;
- $(f \cdot g)(x) = x^2 \sin(x)$;
- $f^2(x) = (\sin(x))^2 = \sin^2(x)$, $g^3(x) = (x^2)^3 = x^6$;

- $(3 \cdot f)(x) = 3 \sin(x)$, $(-7 \cdot g)(x) = -7x^2$;
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$, con $x \neq 0$.

1.5. Composición de funciones

Pensemos otra vez en una función como en una ‘caja negra’ que conecta un dato de input con un dato de output (y uno solo) de un cierto sistema. Supongamos que en nuestro sistema existen dos cajas negras representadas por dos funciones puestas en cascada (véase la próxima figura), en este caso la relación entre input y output está dada por la **función compuesta** entre las dos. Obviamente el razonamiento tiene sentido con la condición que la segunda función pueda ‘interpretar’ los datos de output de la primera, es decir, si las imágenes de la primera función pertenecen al dominio de la segunda.



Formalicemos la operación de composición como sigue.

Def.: dadas dos funciones f_1 y f_2 ,

$$\begin{aligned} f_1 : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = f_1(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 : W &\longrightarrow Z \\ w &\longmapsto z = f_2(w) \end{aligned}$$

tales que $Y \subseteq W$, podemos definir la composición entre f_1 y f_2 , en este orden, como la función $f_2 \circ f_1$ definida así

$$\begin{aligned} f_2 \circ f_1 : X &\longrightarrow Z \\ x &\longmapsto (f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)). \end{aligned}$$

Puede resultar útil visualizar los pasos de la composición como sigue:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y \subseteq W & \xrightarrow{f_2} & Z \\ x & \longmapsto & y = f_1(x) & \longmapsto & z = f_2(y), \end{array}$$

entonces $f_2 \circ f_1$ puede ser pensada, en conjunto, como la función que conecta x directamente a z , aunque intrínsecamente lo haga a través de dos pasos: el primero transformando x en y con la función f_1 y el segundo transformando y en z con f_2 .

Observemos que:

- El dominio de $f_2 \circ f_1$ coincide con el dominio de f_1 , la primera función que se aplica;
- La imagen de $f_2 \circ f_1$ coincide con la imagen de f_2 , la segunda función que se aplica;
- El sentido de la composición es fundamental: puede ser posible la composición $f_2 \circ f_1$ pero no $f_1 \circ f_2$, o viceversa. Aunque ambas composiciones fuesen posibles, en general, darían resultados diferentes.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} f_1 = \log : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \log(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 = (\cdot)^3 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto y^3, \end{aligned}$$

la composición $f_2 \circ f_1$ es posible: $f_2 \circ f_1(x) = f_2(\log(x)) = (\log(x))^3$. La composición $f_1 \circ f_2$ no es posible porque el logaritmo está bien definido sólo sobre $\mathbb{R}^+$, mientras que el codominio de f_2 es todo $\mathbb{R}$.

Terminamos esta sección enunciando un resultado que relaciona monotonía y composición:

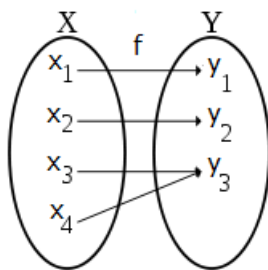
Teorema: son verdaderas las propiedades siguientes

- La suma de dos funciones monotonas crecientes es creciente;
- La suma de dos funciones monotonas decrecientes es decreciente;
- La composición de dos funciones monotonas crecientes es creciente;
- La composición de dos funciones monotonas decrecientes es decreciente;
- La composición de una función monotonamente creciente y una decreciente es decreciente;

1.6. Inversión de funciones

Volviendo a la analogía entre una función y una caja negra que asocia un dato de input a un dato de output, es interesante preguntarse si es posible, una vez que los datos hayan sido transformados, volver atrás y determinar a qué dato de input corresponde cada dato de output.

Es fácil darse cuenta que esto es posible sólo si la función es inyectiva. Consideremos, por ejemplo, la situación que muestra la figura siguiente, en la cual la función f asocia a dos datos de input distintos, x_3 y x_4 , el mismo dato de output y_3 . Si queremos asociar un valor unívoco al dato de input que f ha transformado en y_3 , nos enfrentamos a una ambigüedad: ¿tenemos que elegir x_3 entre x_4 ? Si queremos asociar y_3 a un dato de input a través de una correspondencia funcional no podemos asociar y_3 a ambos porque perderíamos la característica fundamental de una función: ¡la unicidad de la asociación entre input y output! Por otro lado, tanto x_3 como x_4 tienen el mismo derecho de ser elegidos. No hay forma de obviar este problema, de ahí que la falta de inyectividad haga que no sea posible invertir una función.



Si tenemos una función f inyectiva, para invertirla todo lo que tenemos que hacer es asociar a cada imagen de f su *única* pre-imagen:

Def.: sea

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow f(X) \subseteq Y \\ x &\longmapsto y = f(x), \end{aligned}$$

una función *inyectiva*. Definimos la función inversa de f como sigue:

$$\begin{aligned} f^{-1} : f(X) &\longrightarrow X \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = x, \end{aligned}$$

donde x es la única pre-imagen de y , o sea el único elemento de X tal que $f(x) = y$.

Ejemplos:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \sqrt[3]{x},\end{aligned}$$

$\sqrt[3]{}$ es la función que asocia a cada $x \in \mathbb{R}$ su raíz cúbica y es inyectiva. Fijémonos en un valor de output de $\sqrt[3]{}$, por ejemplo 2, y preguntémosnos de que valor de input proviene: eso equivale a preguntarse cuál es el número real cuya raíz cúbica vale 2. Sabemos que ese número es 8, que es el cubo de 2. Eso vale para cualquier número real y obtenido después de la operación de raíz cúbica: el número x que ha sido transformado en y por la raíz cúbica es el cubo de y , porque si elevamos al cubo la expresión $y = \sqrt[3]{x}$ obtenemos $y^3 = (\sqrt[3]{x})^3 = x$, o sea $x = y^3$. Sigue que la función inversa de $\sqrt[3]{}$ es la función que eleva al cubo.

Es interesante observar que si componemos la función raíz cúbica con la función que eleva al cubo obtenemos la función identidad sobre $\mathbb{R}$:

$$x \longmapsto x^3 \longmapsto \sqrt[3]{x^3} = x$$

y lo mismo vale si hacemos la composición al revés:

$$x \longmapsto \sqrt[3]{x} \longmapsto (\sqrt[3]{x})^3 = x,$$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

Este es un hecho general: **la composición entre una función f y su inversa f^{-1} es la función identidad sobre el dominio de f** , mientras que **la composición entre f^{-1} y f es la función identidad sobre el codominio de f** :

$$\boxed{f^{-1} \circ f = id_X}, \quad \boxed{f \circ f^{-1} = id_{f(X)}}.$$

Por ejemplo, sabemos que el logaritmo Neperiano (o natural) $\log$ o $\ln$ es la función inversa de la función exponencial $\exp$ con base dada por el número de Neper⁴ $e \simeq 2,7182$. El dominio de $\log$ es $\mathbb{R}^+$ y su codominio $\mathbb{R}$, análogamente, el dominio de $\exp$ es $\mathbb{R}$ y su codominio es $\mathbb{R}^+$, por lo tanto:

$$\boxed{\exp \circ \log = id_{\mathbb{R}^+}}, \quad \boxed{\log \circ \exp = id_{\mathbb{R}}}.$$

Ejemplo: $e^{-3 \log(x)} = e^{\log x^{-3}} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, $\forall x > 0$. $\log(e^{2x}) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

⁴John Napier of Merchiston, matemático británico (1550-1617).

1.7. Los ceros de las funciones reales de variable real y sus caracterización abstracta

En esta sección definiremos los ceros de las funciones reales de variable real y examinaremos una caracterización que tendrá la doble utilidad de practicar la técnica de demostración por absurdo y de adelantar unos conceptos básicos para desarrollare la teoría de los límites.

Def. Un **cero** de una función real de variable real $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un punto $x_0 \in D$ tal que $f(x_0) = 0$, o sea un punto del dominio de f donde la función se anula.

Una función generica puede tener ningun cero (por ejemplo la función exponencial), un solo cero (por ejemplo el logaritmo, que tiene un cero en $x = 1$), un número finito de ceros (por ejemplo un polinomio) o hasta un número infinitos de ceros (por ejemplo las funciones trigometricas seno, coseno y tangente).

Existe una caracterización abstracta muy interesante de los ceros de una función:

Teorema: x_0 es un cero de $f \iff \forall \varepsilon > 0$ vale que $|f(x_0)| < \varepsilon$.

Prueba: Hay que probar que la dos implicaciones.

$\implies$: si x_0 es un cero de f entonces, por definición, $f(x_0) = 0$ entonces $|0| = 0 < \varepsilon$ para cualquier elección de $\varepsilon > 0$;

$\impliedby$: supongamos que $\forall \varepsilon > 0$ valga que $|f(x_0)| < \varepsilon$. Si, por absurdo, x_0 no es un cero de f , o sea $f(x_0) \neq 0$, entonces $|f(x_0)| > 0$, por lo tanto, si definimos $\bar{\varepsilon} = |f(x_0)|$ tenemos que $|f(x_0)| = \bar{\varepsilon}$, lo cual contradice la hipótesis que $|f(x_0)| < \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$. $\square$

1.8. Los conjuntos funcionales

Existen conjuntos cuyos elementos son funciones. Estos conjuntos se llaman, por razones obvias, *conjuntos funcionales*. Podemos dar unos ejemplos:

$$\mathcal{F} = \{f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{F}_I \subset \mathcal{F} = \{f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ inyectiva}\}$$

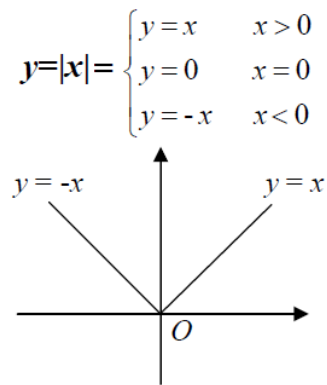
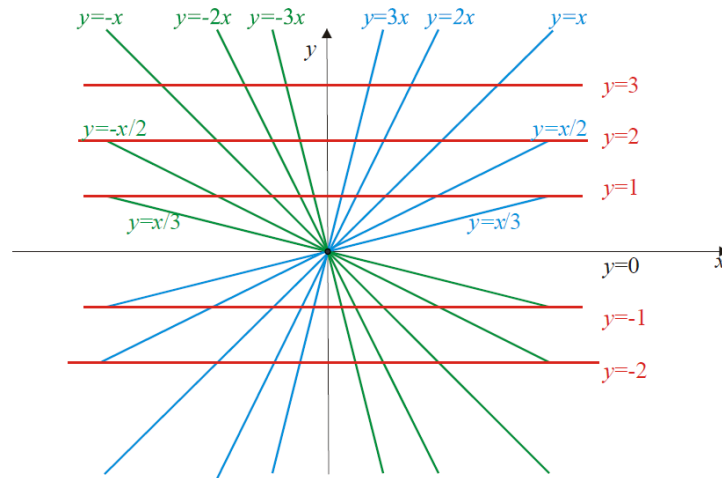
$$\mathcal{F}_E \subset \mathcal{F} = \{f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ exhaustiva}\}$$

etc.

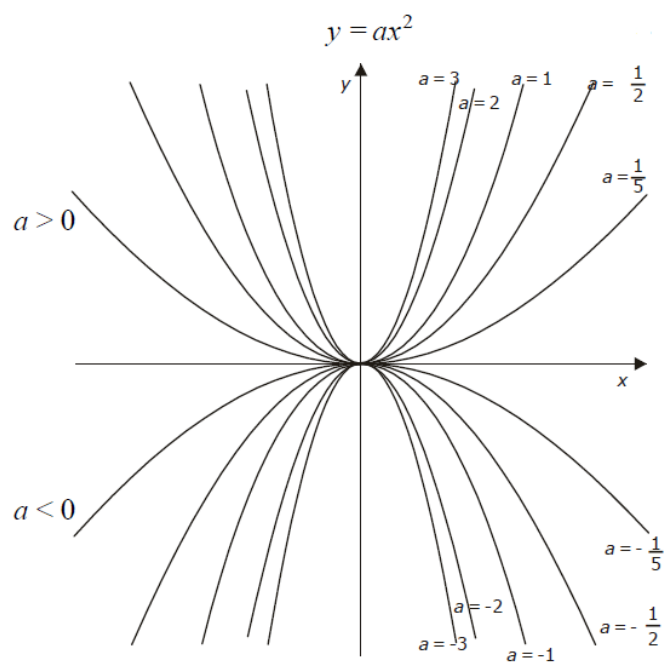
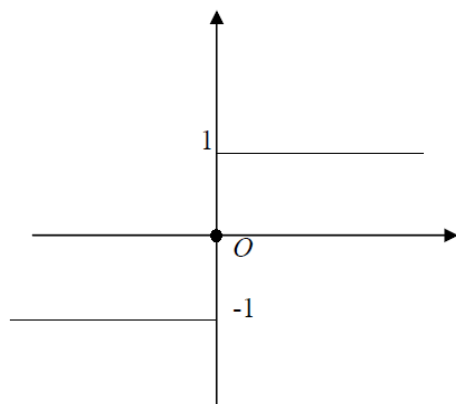
El estudiante podrá comenzar a ver la importancia de los espacios funcionales durante el curso de Ecuaciones Diferenciales del tercer trimestre.

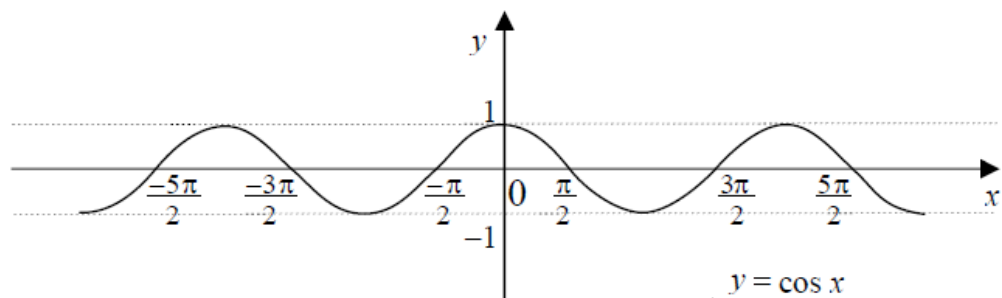
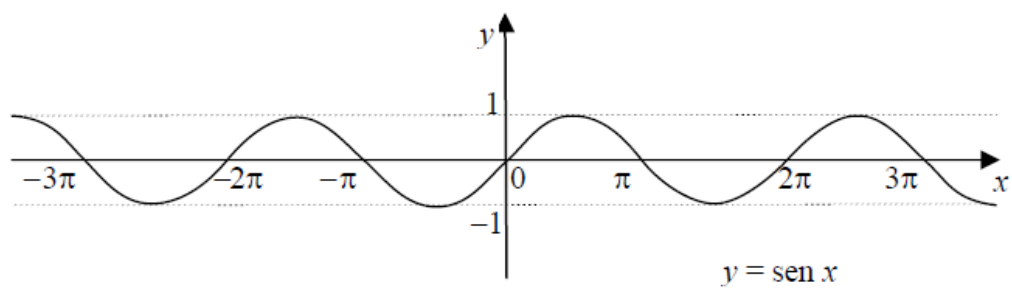
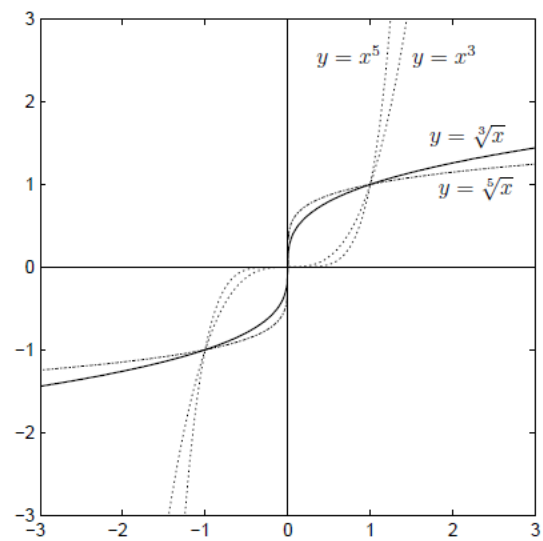
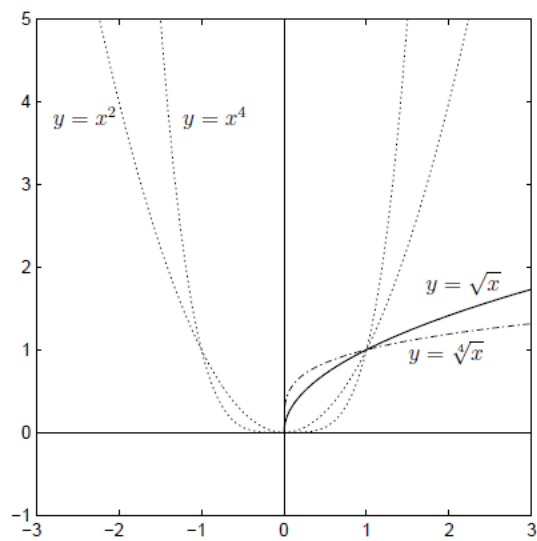
1.9. Las funciones elementales de la matemática y sus gráficos

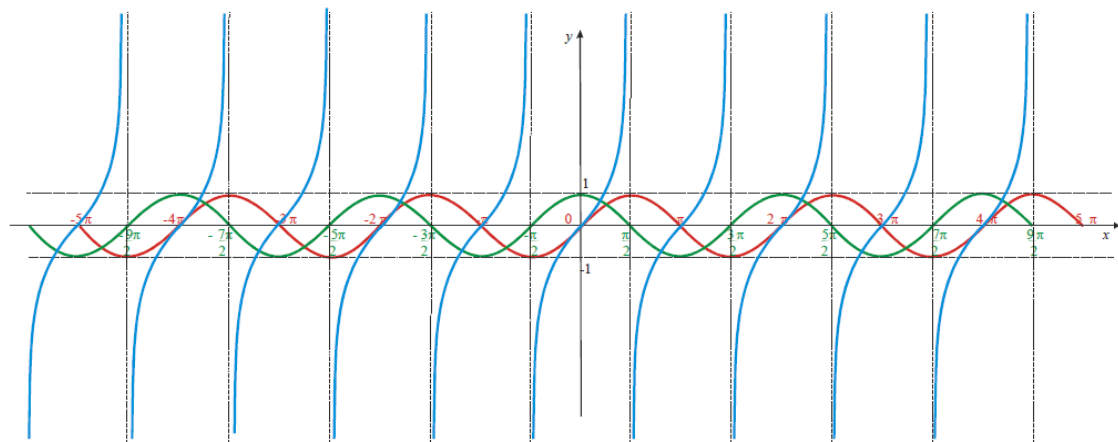
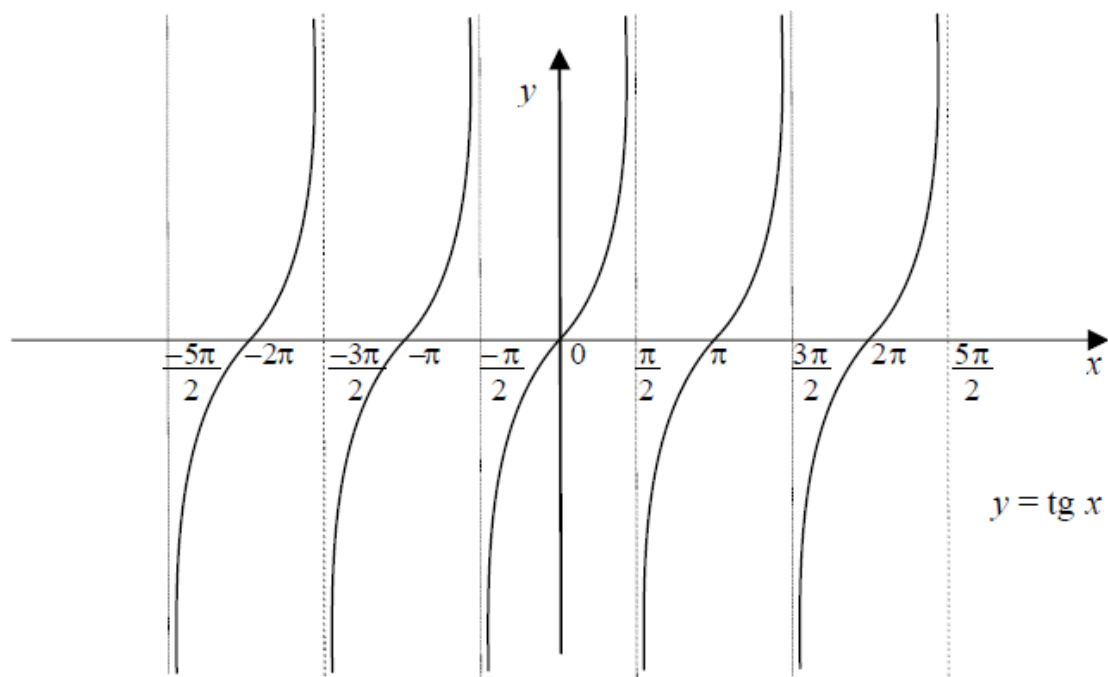
Durante las clases de prácticas se presentarán las funciones elementales del cálculo. En esta sección mostramos sus gráficos.

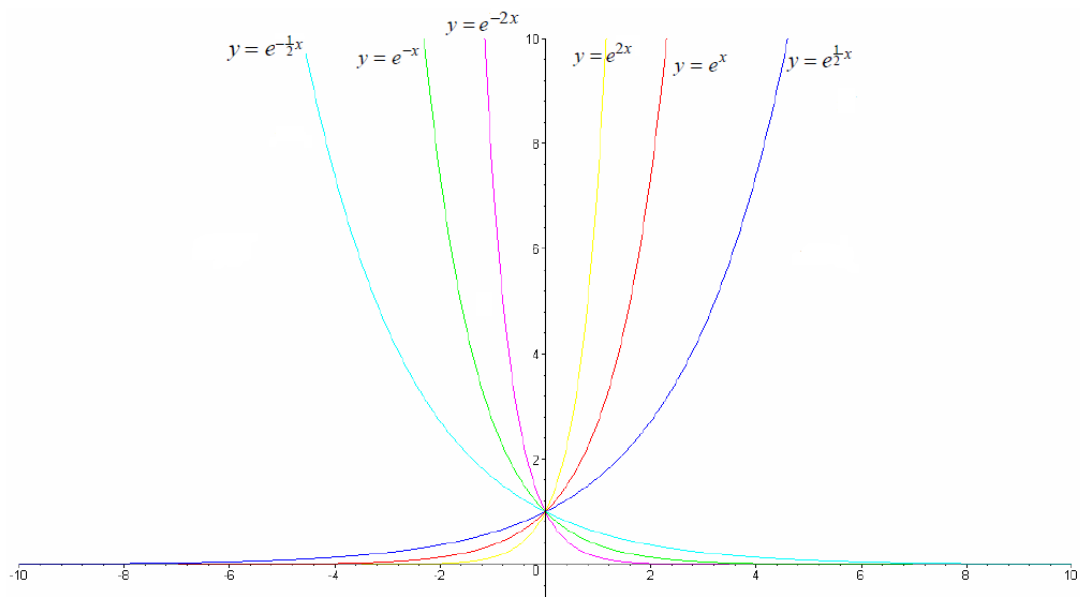
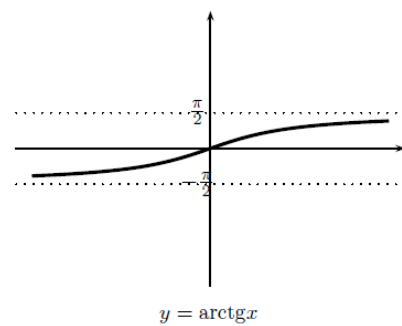
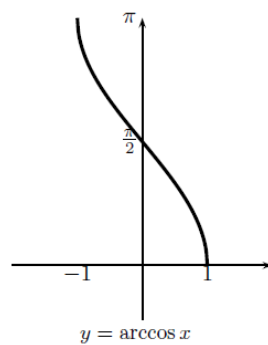
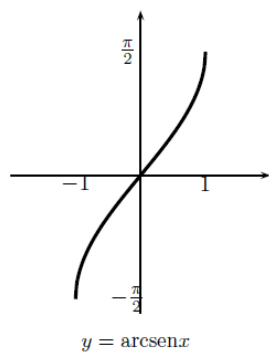


$$y = \underset{0}{\text{sign}}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

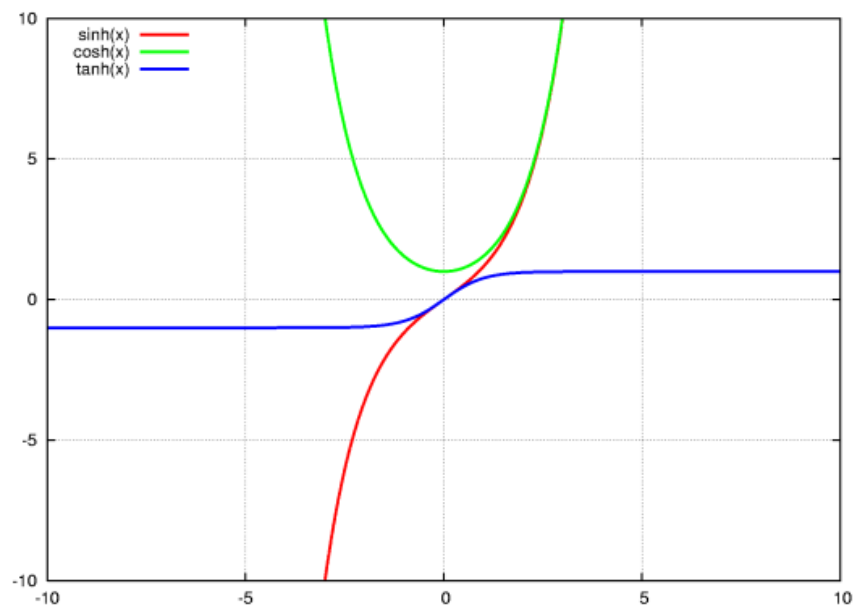
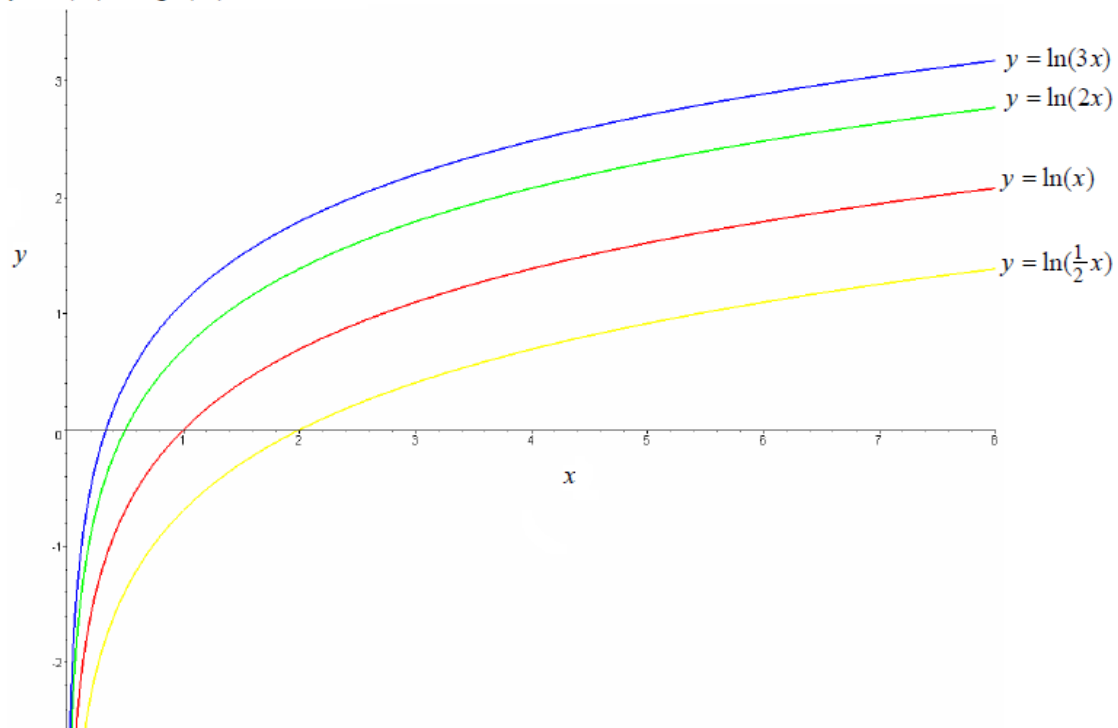


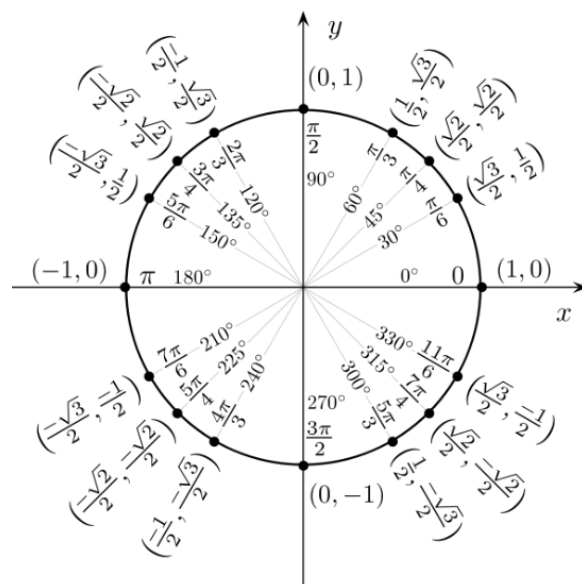






$$y = \ln(ax) = \log_e(ax) \quad \text{con } a > 0$$





Capítulo 2

Introducción al cálculo diferencial: el concepto de límite

El nombre “cálculo diferencial” significa literalmente “cálculo de las diferencias”, pero, ¿cuáles son estas diferencias? Se trata de diferencias, como se suele decir, *infinitesimas*, o sea, pequeñas “hasta cuanto uno quiera”. Obviamente este concepto necesita una definición más rigurosa, que corresponde a la definición de límite. Para justificar la exigencia de la introducción de los límites veamos unos ejemplos que vienen de la geometría y de la vida real, en los cuales aparece el concepto de diferencia *infinitesimal*.

2.1. Motivaciones para la introducción del concepto de límite

Consideremos las siguientes preguntas:

1. **¿Qué es la velocidad instantánea de una partícula en movimiento?** El padre de la ciencia moderna, el físico-matemático italiano Galileo Galilei (1564-1642), había definido, en los primeros años del 1600, la velocidad *media* v_m de una partícula en movimiento como la razón entre el espacio Δs recorrido en un intervalo de tiempo Δt y Δt mismo:

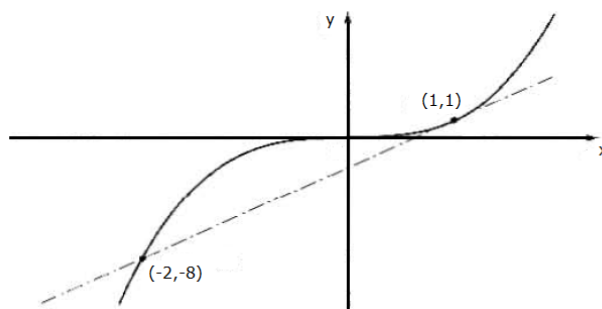
$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Esta definición es suficiente para describir el movimiento rectilíneo uniforme, en el cual la velocidad de la partícula es constante, pero no

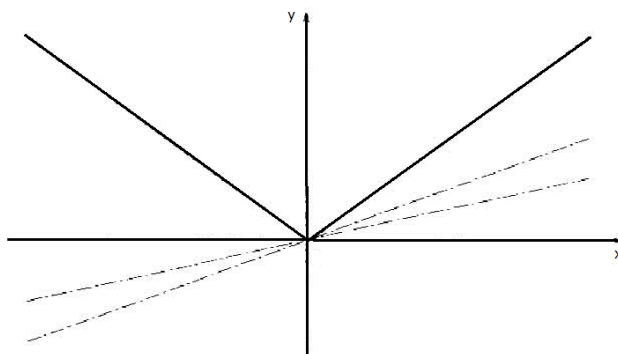
basta para describir movimientos más complejos como, por ejemplo, la caída de un cuerpo bajo la acción de la gravedad, en el cual la velocidad cambia en cada instante. En estos casos tenemos que considerar la velocidad instantánea, o sea la velocidad media en un instante de tiempo *infinitamente breve*. Pero, ¿qué significa eso? Matemáticamente esa frase no tiene sentido, porque es evidente que si hacemos tender Δt a 0, también Δs tendrá a 0, entonces llegaremos a una expresión que, por ahora, no tiene ningún significado: $\frac{0}{0}$. La primera persona que atacó este problema fue uno de los genios más grandes de la historia, el físico-matemático inglés Isaac Newton (1642-1727), ¡nacido en el año en el cual se murió Galileo Galilei! Con su “método de las fluxiones”, Newton dio la primera definición de velocidad instantánea como *derivada* de la función $s(t)$ que asocia a cada instante de tiempo t el punto en el espacio donde se encuentra la partícula que se está desplazando. Como veremos, la derivada de $s(t)$ es el límite, para Δt que tiende a 0, de la razón entre Δs y Δt . Este ejemplo enseña cómo la exigencia de la formalización del concepto de límite y de derivada está íntimamente relacionada con el nacimiento de la ciencia moderna.

2. **¿Qué es la aceleración y qué relación tiene con las fuerzas que actúan sobre un cuerpo?** Galileo Galilei había observado también que, si ninguna fuerza actúa sobre un cuerpo, este se mueve con un movimiento rectilíneo uniforme (o sea, con un *vector velocidad constante*) y describió la situación de estar parado como un caso particular de movimiento rectilíneo uniforme donde la velocidad es cero en cada instante. Galileo observó que, entonces, el efecto de una fuerza que actúa sobre un cuerpo no puede ser la velocidad de desplazamiento del cuerpo mismo y se preguntó, ¿cual es este efecto? Fue de nuevo Newton a contestar a esta pregunta, con la ecuación más importante de la dinámica, en la cual relacionó explícitamente la fuerza que actúa sobre un cuerpo con la aceleración del cuerpo mismo, o sea, con la variación de su velocidad. Pero, ¿cómo se mide la variación de la velocidad? Veremos que este problema se resuelve considerando la *derivada segunda* de la función $s(t)$. De nuevo, la voluntad de profundizar en la comprensión de los fenómenos físicos generó la necesidad de desarrollar instrumentos matemáticos más potentes.
3. **¿Qué es la recta tangente a una curva en un punto?** La respuesta a esta pregunta parece trivial si pensamos en la circunferencia C : en ese caso podemos pensar en la recta tangente en cada punto P

como la única recta que pasa por P y que es perpendicular al radio de C , o bien como aquella recta que pasa por P y que no intersecta C en ningún otro punto. Pero si intentamos extender estas definiciones a curvas más generales podemos ver enseguida que pierden su significado: el radio es una característica de las circunferencias, no existe el radio de parábolas o hipérbolas, etc. La segunda definición parece más fácil de generalizar, y en cierta medida lo es porque sigue válida para las cónicas (circunferencias, elipses, parábolas, hipérbolas), pero si consideramos, por ejemplo, la curva dada por el gráfico de la función $y = x^3$, podemos ver que (aparte de en el origen) la recta tangente al gráfico en un punto intersecta siempre otro punto del gráfico mismo, como se ve en la figura aquí debajo.



Viceversa, existen curvas, por ejemplo el gráfico de la función $y = |x|$, que tienen infinitas rectas que tocan el gráfico en un solo punto, e intuitivamente no sabemos cómo elegir entre una u otra para definir la recta tangente.

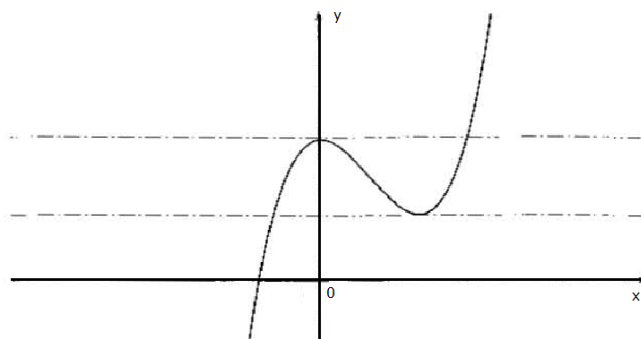


Nos damos cuenta de que, a pesar de que nos parezca obvio e intuitivo

definir la recta tangente a una curva en una cierta forma, no podemos dar una definición rigurosa y general.

Geométricamente, la recta tangente en P se puede aproximar con una recta *secante* en dos puntos al gráfico de f , uno fijo, P , y uno móvil, Q , que puede acercarse o alejarse de P . A medida que Q se acerca a P , sin coincidir con P , la (única) recta que pasa por P y Q se acerca a la recta tangente al gráfico de f en P . Es importante observar que este proceso no termina con Q que viene a coincidir con P , porque en ese caso no tendríamos la posibilidad de definir una sola recta, dado que por un punto pasan infinitas rectas! En cambio, para poder definir la recta tangente, Q tiene que acercarse a P *indefinidamente*. Encontramos de nuevo un problema que necesita la definición rigurosa de un proceso infinito.

Como veremos en breve, la definición de recta tangente a una curva está relacionada con la derivada, y entonces con la velocidad, pero observamos que su utilidad va más allá: considerando esta figura es fácil



darse cuenta de que, en los puntos extremos (máximos y mínimos) del gráfico de f la recta tangente tiene pendiente nula (es paralela al eje horizontal). Resulta por tanto útil conocer la expresión de la recta tangente al gráfico de una función para saber cuando esta es horizontal y seleccionar así los puntos que pueden ser máximos o mínimos (criterio introducido por primera vez por el matemático francés Pierre de *Fermat* (1601-1665) alrededor del 1630, antes de que el cálculo diferencial fuese inventado... Fermat es famoso por sus intuiciones geniales que, muchas veces, no formalizaba, como su célebre “ultimo teorema”);

4. **¿Qué significa calcular la longitud de una curva?** La forma canonica de calcular la longitud de un objeto linear (no curvilíneo) es

computar cuántas veces el perfil de ese objeto contiene una unidad de medida de longitud canónica (un milímetro, centímetro, metro, kilómetro, etc.), pero si un objeto tiene un perfil dado por una curva no rectilínea este método no se puede utilizar. Sin embargo, si consideramos trozos “pequeños” de esa curva, estos serán más semejantes a una recta y podremos aproximar sus longitudes con la técnica de arriba. Obviamente en matemáticas el concepto de “trozos pequeños” de una curva no tiene sentido y, de nuevo, aparece en un problema real la necesidad de definir rigurosamente que quiere decir acercar indefinidamente dos puntos;

5. **¿Como se calcula el área de una figura con un borde curvilíneo?** La idea básica se debe a Arquímedes, que vivió desde el -287 hasta el -212 y se considera universalmente el matemático más importante de la antigüedad. Su idea consiste en aproximar el área a través de figuras geométricas que tienen un área conocida (triángulos, cuadrados, rectángulos, etc.), a medida de que nos acercamos al borde de la figura tendremos que considerar figuras geométricas de área conocida cada vez más pequeñas, para que estas puedan adaptarse lo mejor posible al perfil de la figura curvilínea. La formalización de la idea de Arquímedes, como finalmente debería resultar claro, necesita la definición del concepto de límite, que llegó 1800 años después. Esta cantidad de tiempo significativa debería hacer apreciar aún más el trabajo genial de Newton y Leibnitz, que inventaron el cálculo diferencial, y, entre otros, de Cauchy, que formalizó el concepto básico del cálculo diferencial: el límite.

Como comentario final a estas motivaciones podemos decir que los problemas de la geometría curvilínea, sin el cálculo diferencial, no solo no podrían ser resueltos, ¡sino tampoco definidos!

2.2. Límites de funciones

El fundamento sobre el cuál se basa el cálculo diferencial es el concepto de límite, que se puede considerar con razón uno de los acontecimientos culturales más importantes en la historia de la Ciencia. El problema de la formalización del concepto de límite fue puesto en evidencia por el matemático italo-francés Lagrange (Turín 1736-París 1813): intentando explicar el cálculo diferencial (formulado por Newton y Leibnitz casi un siglo antes) a sus

estudiantes de las universidades politécnicas de Turín y París, se dio cuenta de que no sabía contestar con precisión a las dudas de sus alumnos con respecto a conceptos como “acercarse indefinidamente a un punto” o de “cantidad infinitésima”. Cuando Lagrange puso en evidencia el problema de la formalización del concepto de límite, su fama internacional y el respeto de la comunidad científica hicieron que un número cada vez mayor de científicos prestigiosos se dedicaran a un problema que hasta aquel momento había sido considerado de interés secundario: la formalización del concepto de límite.

Una primera respuesta a la exigencia de rigor formulada por Lagrange fue dada por el matemático francés Jean-Baptiste d’Alembert (1717-1783), pero fue Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), también francés, el que resolvió definitivamente el problema de la definición formal de límite, y lo hizo con instrumentos algebraicos de sorprendente sencillez y que ya estaban a disposición de los matemáticos desde hace siglos: ¡las inecuaciones!

La definición de Cauchy ha pasado a la historia como “la definición ε - δ ” y para ayudar a su comprensión es útil introducir el concepto de entorno de un número real y entorno del infinito:

Def.: sea $x_0 \in \mathbb{R}$,

- un **entorno de radio** $r > 0$ de x_0 es el intervalo abierto

$$\boxed{U_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}},$$

es decir, el conjunto de los puntos que tienen una distancia a x_0 estrictamente menor que r ;

- un **entorno de** $+\infty$ es cualquier conjunto del tipo $(M, +\infty)$, $M \in \mathbb{R}$;
- un **entorno de** $-\infty$ es cualquier conjunto del tipo $(-\infty, m)$, $m \in \mathbb{R}$.

Hemos usado el hecho de que, en general

$$\boxed{|f(x) - g(x)| < \varepsilon \iff g(x) - \varepsilon < f(x) < g(x) + \varepsilon}$$

porque $|f(x)| < \varepsilon$ corresponde a la unión de las soluciones de los dos sistemas

$$\begin{cases} f(x) - g(x) < \varepsilon \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}$$

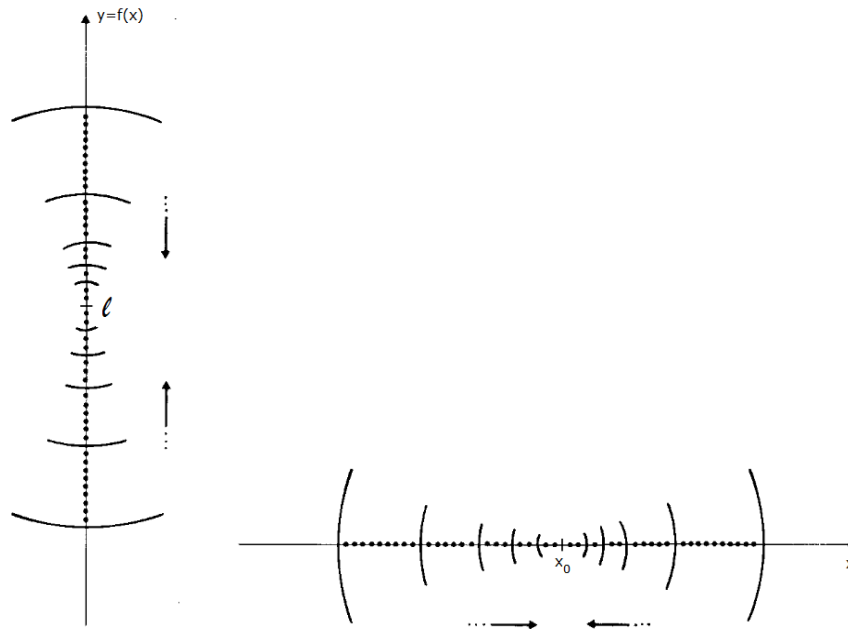
$$\begin{cases} -(f(x) - g(x)) < \varepsilon \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

La solución del primer sistema es $g(x) \leq f(x) < g(x) + \varepsilon$, la solución del segundo sistema es $g(x) - \varepsilon < f(x) < g(x)$, la unión de las dos soluciones es $g(x) - \varepsilon < f(x) < g(x) + \varepsilon$.

En particular,

$$|x - x_0| < \varepsilon \iff x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon.$$

Ahora podemos introducir las definiciones de límites de funciones, comenzando con los límites finitos. La figura siguiente muestra el concepto básico subyacente a la idea de límite (finito):



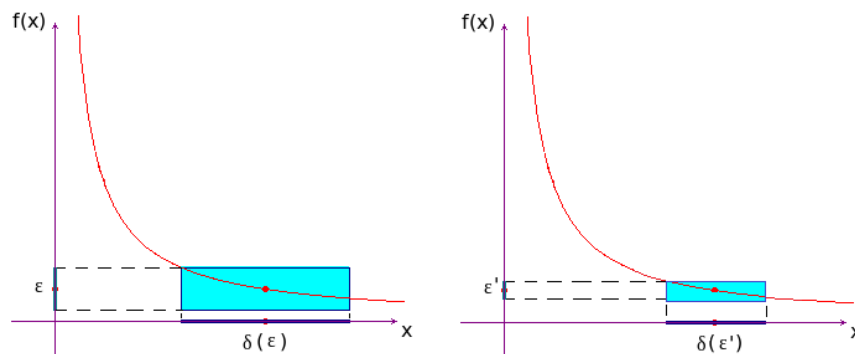
el límite de f para x que tiende a x_0 es l si, considerando valores de x suficientemente cercanos a x_0 , pero no iguales a x_0 , podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ al valor l . La cercanía a x_0 y l se expresa rigurosamente con el lenguaje de los entornos, como vamos a ver en la definición siguiente.

Def. ε - δ de límite de función (Cauchy): sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con D subconjunto *abierto* de $\mathbb{R}$, y sea $x_0 \in D$ o bien sea x_0 un punto de la frontera de D . Se dice que f *converge a ℓ* cuando x tiende a x_0 o que el límite de f para x que tiende a x_0 es ℓ , y se escribe:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell},$$

si para cada entorno $U_\varepsilon(\ell) \subseteq f(D)$, $\varepsilon > 0$, existe un entorno $U_{\delta_\varepsilon}(x_0) \subseteq D$ tal que para $x \in U_{\delta_\varepsilon}(x_0)$, $x \neq x_0$, se tiene que $f(x) \in U_\varepsilon(\ell)$.

La notación δ_ε significa que, en general, δ depende de ε , como muestra la figura aquí debajo.



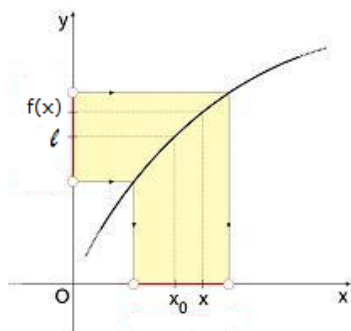
Geométricamente: *podemos restringir nuestra atención a entornos U_ε de ℓ en el eje vertical, con radio ε cada vez más pequeño pero > 0 y siempre encontraremos un entorno de x_0 en el eje horizontal de radio $\delta_\varepsilon > 0$ cuyos puntos se transforman, vía f , en puntos de $U_\varepsilon(\ell)$.*

Si usamos solo las desigualdades y no los entornos, esta definición se escribe como sigue:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon}.$$

Nótese que la definición prescinde de cómo se comporta f en x_0 , punto en el cual f ¡hasta podría no estar definida! Lo que es importante es *el comportamiento o tendencia* de f cuando nos acercamos a x_0 , dado que tanto ε como δ_ε son siempre > 0 .

Gráficamente:



Cauchy ha popularizado su teoría sobre los límites en su *Cours d'Analyse* (1821) para la École Polytechnique de Paris, la elección de las letras griegas ε y δ se motiva con el hecho de que él solía abreviar la palabra *error* con ε y la palabra *distancia* con δ . Como debería resultar claro de su definición, ε y δ representan, respectivamente, el error que se hace considerando el valor de $f(x)$ en vez de ℓ y δ la distancia entre x y x_0 .

Nótese que Cauchy logró dar una definición rigurosa de *distancia infinitésima* (y entonces de límite) a través de una implicación entre desigualdades que tiene que valer para cada elección de un numero real positivo. El hecho de que el eje real no tenga los vacíos que caracterizan los conjuntos discretos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, es fundamental para estar seguros de que el proceso de regresión de ε y δ_ε hacia cero (sin llegar nunca a cero) esté bien definido.

Observación: si f es una función constante $\mathbf{k}(x) \equiv k \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $f(x)$ toma siempre el mismo valor, por lo tanto es evidente que el límite para $x \rightarrow x_0$ de una función constante es igual al valor constante k para cada $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces **la operación de límite aplicada a una función constante es trivial**.

El límite de una función en un punto de la frontera de su dominio puede no ser finito, como vamos a ver en las siguientes definiciones.

Def.: sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con D subconjunto *abierto* de $\mathbb{R}$, y sea x_0 un *punto de la frontera de D* . Se dice que f *diverge al infinito* cuando x tiende a x_0 o que

1. el límite de f es $+\infty$, y se escribe:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty},$$

si para cada entorno $U_M(+\infty)$, existe un entorno $U_{\delta_M}(x_0) \subseteq D$ tal que, para cada $x \in U_{\delta_M}(x_0)$, $x \neq x_0$, entonces $f(x) \in U_M(+\infty)$;

2. el límite de f es $-\infty$, y se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty,$$

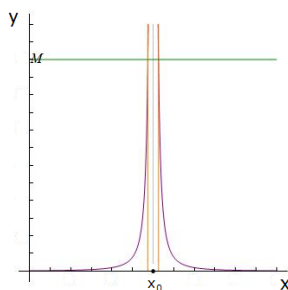
si para cada entorno $U_m(-\infty)$, existe un entorno $U_{\delta_m}(x_0) \subseteq D$ tal que, para cada $x \in U_{\delta_m}(x_0)$, $x \neq x_0$, entonces $f(x) \in U_m(-\infty)$.

La interpretación de las definiciones 2. y 3. es la siguiente: a medida que nos acercamos a x_0 , la función f toma valores cada vez más grandes en valor absoluto (positivos o negativos según el signo del infinito). Se ve que el infinito no es un número real, sino, de nuevo, el comportamiento o tendencia de una función. Con el lenguaje de las desigualdades podemos *codificar* los límites arriba definidos de esta forma:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \exists \delta_M > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_M \Rightarrow f(x) > M;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \iff \forall m > 0 \exists \delta_m > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_m \Rightarrow f(x) < -m.$$

Gráficamente, podemos representar la definición de límite infinito como sigue:



Se suele decir que la recta $x = x_0$ (paralela al eje y) es una **asíntota vertical** para la función f .

Si una función tiene dominio sobre todo $\mathbb{R}$ o bien sobre subconjuntos inferiormente o superiormente ilimitados de $\mathbb{R}$, podemos definir los límites para x que tiende al infinito:

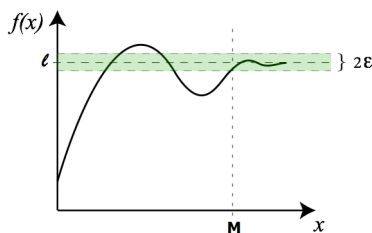
Def.: sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $D = \mathbb{R}$ o $D = (a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$; se dice que

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell,$$

con $\ell \in \mathbb{R}$, si para cada entorno $U_\varepsilon(\ell)$, $\varepsilon > 0$, existe un entorno $U_{M_\varepsilon}(+\infty)$ tal que, para cada $x \in U_{M_\varepsilon}(+\infty)$, se tiene que $f(x) \in U_\varepsilon(\ell)$. En este caso se dice que la recta $y = \ell$ es una **asíntota horizontal** para la función f cuando $x \rightarrow +\infty$. Geométricamente, eso significa que el grafico de f , a medida que x va hacia $+\infty$ se acerca cada vez mas a la ordenada ℓ , sin tomar nunca ese valor.

La siguiente figura representa a nivel gráfico una asíntota horizontal:



2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

si para cada entorno $U_K(+\infty)$, existe un entorno $U_{M_K}(+\infty)$ tal que, para cada $x \in U_{M_K}(+\infty)$, se tiene que $f(x) \in U_K(+\infty)$;

3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

si para cada entorno $U_m(-\infty)$, existe un entorno $U_{M_m}(+\infty)$ tal que, para cada $x \in U_{M_m}(+\infty)$, se tiene que $f(x) \in U_m(-\infty)$.

Dejamos como ejercicio extender las últimas definiciones al caso $x \rightarrow -\infty$.

2.3. Límites laterales

Las definiciones dadas arriba se pueden modificar ligeramente para definir los límites *laterales*. En sustancia, lo único que cambia en estas definiciones es que se permite a x acercarse a x_0 , o a $f(x)$ acercarse a ℓ , sólo desde la izquierda o desde la derecha, respectivamente.

Def. (límites por la derecha y por la izquierda): sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con D abierto y $x_0 \in D$ o bien x_0 punto de la frontera de D . Se dice que

1. f converge a $\ell \in \mathbb{R}$ por la izquierda, o que ℓ es el límite de f cuando x tiende a x_0 por la izquierda, y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$$

si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ tal que $x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$;

2. f converge a $\ell \in \mathbb{R}$ por la derecha, o que ℓ es el límite de f cuando x tiende a x_0 por la derecha, y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$

si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ tal que $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Dejamos como ejercicio escribir las definiciones de cuándo f diverge al infinito al acercarse x a x_0 por la izquierda y por la derecha.

Observación: comparando las definiciones de límite y de límites laterales se ve que el límite de f para x que tiende a x_0 existe si y solo si existen los límites por la izquierda y derecha y esos límites coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \text{ si existe el límite.}$$

Def. (límites derechos e izquierdos) sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con D abierto y $x_0 \in D$ o bien x_0 punto de frontera de D , se dice que

1. f converge a $\ell^- \in \mathbb{R}$, o que ℓ^- es el límite izquierdo de f cuando x tiende a x_0 , y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell^-$$

si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell$;

2. f converge a $\ell^+ \in \mathbb{R}$, o que ℓ^+ es el límite derecho de f cuando x tiende a x_0 , y se escribe

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell^+}$$

si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \ell < f(x) < \ell + \varepsilon$.

Dejamos como ejercicio escribir las definiciones de cuando f converge a $\ell^\pm$ cuando x tiende al infinito.

Ejemplos.

1. Comprobar que $\lim_{x \rightarrow 3} 3x - 2 = 7$ con la definición $\varepsilon - \delta$ de Cauchy y que los límites por la derecha e izquierda coinciden con el límite.

Solución. Sustituyendo $3x - 2$ por $f(x)$ y 3 por x_0 en la definición límite podemos ver que hay que comprobar lo que sigue:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tal que } |x - 3| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |(3x - 2) - 7| < \varepsilon \quad (*).$$

Observemos que $|(3x - 2) - 7| = |3x - 9| = 3|x - 3|$, entonces la condición (*) se puede reescribir como

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tal que } |x - 3| < \delta_\varepsilon \Rightarrow 3|x - 3| < \varepsilon \quad (*).$$

Se ve muy fácilmente que si tomamos $\delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{3}$, entonces la implicación contenida en la (*) es verdadera: $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 3|x - 3| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, lo cual demuestra que $\lim_{x \rightarrow 3} 3x - 2 = 7$ según la definición de Cauchy. Dado que la desigualdad $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{3}$ se escribe explícitamente como $3 - \frac{\varepsilon}{3} < x < 3 + \frac{\varepsilon}{3}$, es fácil ver (lo dejamos como ejercicio) que si $\delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{3}$ entonces valen también las dos condiciones $3 - \frac{\varepsilon}{3} < x < 3 \Rightarrow 3|x - 3| < \varepsilon$ y $3 < x < 3 + \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 3|x - 3| < \varepsilon$, lo cual muestra que se cumplen las definiciones de límite por la izquierda y derecha, respectivamente, y que estos coinciden con el límite precedente.

2. Comprobar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ con la definición $\varepsilon - \delta$ de Cauchy.

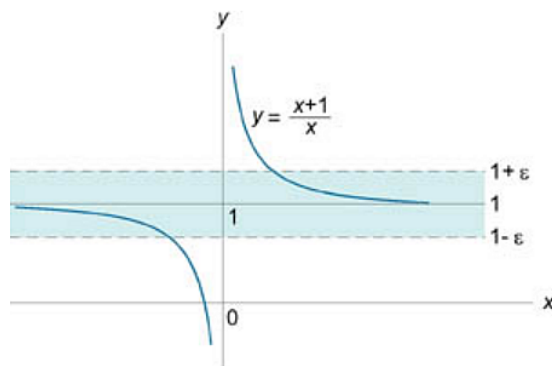
Solución. Sustituyendo $\frac{x+1}{x}$ por $f(x)$ y $+\infty$ por x_0 en la definición límite podemos ver que hay que comprobar lo que sigue:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon > 0 \text{ tal que } x > M_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x+1}{x} - 1 \right| < \varepsilon \quad (*).$$

Dado que $|\frac{x+1}{x} - 1| = |\frac{1}{x}|$, (*) se puede reescribir como

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon > 0 \text{ tal que } x > M_\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon \quad (*)$$

donde hemos quitado el valor absoluto porque estamos considerando $x > M_\varepsilon > 0$, entonces también $\frac{1}{x} > 0$. Se ve muy fácilmente que si tomamos $M_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$, entonces la implicación contenida en la (*) es verdadera, porque si invertimos la desigualdad $x > M_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$ obtenemos $\frac{1}{x} < \varepsilon$, lo cual demuestra que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ según la definición de Cauchy. Dejamos como ejercicio mostrar que también $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x} = 1$. Entonces, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal para la función $f(x) = \frac{x+1}{x}$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, como se ve en la figura aquí debajo. Un útil ejercicio es probar que $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x+1}{x} = \pm\infty$, así que la recta $x = 0$ resulta una asíntota vertical para $f(x) = \frac{x+1}{x}$.



En <http://www.math24.net/definition-of-limit-of-function.html> se pueden encontrar más ejemplos de límites calculados a través de la definición $\varepsilon - \delta$. Se puede observar que la definición de Cauchy, a pesar de haber dado rigor a un concepto extremadamente difícil como el de una cantidad indefinidamente cercana a otra (y con herramientas muy sencillas como desigualdades e implicaciones lógicas), no es un instrumento muy “comodo” para el cálculo efectivo de los límites. La dificultad de la técnica de la definición de Cauchy crece al aumentar la complejidad de la expresión analítica de f , hasta llegar a ser prácticamente inútil si f es una función compuesta muy complicada. En las secciones siguientes desarrollaremos unas técnicas más eficientes para calcular límites. A través de estas técnicas, el cálculo de límites como los dos presentados arriba será inmediato.

Ejemplos de funciones que no tienen límite son las funciones trigonométricas cuando $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin(x), \nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos(x), \nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tan(x)$$

porque *oscilan periódicamente* y nunca llegamos a poder satisfacer la definición de límite.

2.4. Teoremas fundamentales sobre los límites

Es posible demostrar que los límites poseen estas propiedades: dada la función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, dado $x_0 \in D$ y supuesto que $f(x) \rightarrow \ell$ para $x \rightarrow x_0$,

- **Teorema de unicidad del límite:** el límite ℓ es único: una función no puede converger a dos límites diferentes a la vez.
- **Teorema de conservación del signo:** si existe un entorno $U(x_0)$ el cual $f(x) \leq 0$ (resp. $f(x) \geq 0$) $\forall x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$, entonces $\ell \leq 0$ (resp. $\ell \geq 0$). O sea, si f mantiene un cierto signo en un entorno de x_0 , entonces el límite tiene ese mismo signo.
- **Teorema de la comparación** (o del “sandwich”): dadas las funciones $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $f(x) \rightarrow \ell$ y $g(x) \rightarrow \ell$ para $x \rightarrow x_0$, si existe un entorno $U(x_0)$ en el cual se tiene que

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad \forall x \in U(x_0) \setminus \{x_0\},$$

entonces también $h(x) \rightarrow \ell$ para $x \rightarrow x_0$.

En otras palabras: si h , en un entorno suficientemente pequeño de x_0 , está limitada superiormente e inferiormente por dos funciones que convergen al mismo límite, entonces también h converge a ese límite.

Una forma típica en la cual se usa este teorema es la siguiente:

$$\boxed{|h(x)| \leq g(x) \text{ y } g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \implies h(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0}$$

o sea, si el valor absoluto de $h(x)$ está limitado por una función que tiende a 0, entonces también h tiende a 0 (porque $|h(x)| \leq g(x)$ equivale a $-g(x) \leq h(x) \leq g(x)$, y, si $g(x) \rightarrow 0$, también $-g(x) \rightarrow 0$, entonces, por el teorema citado arriba, también $h(x) \rightarrow 0$). Veremos aplicaciones de este resultado en las clases de prácticas.

- **Cambio de variable en los límites:** Si $f \circ g$ está bien definida en un entorno de x_0 y $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} t_0$, entonces, poniendo $t = g(x)$, vale que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t).$$

Ejemplo: si queremos calcular $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$, podemos poner $t = \frac{1}{x}$, que tiende a $-\infty$ cuando $x \rightarrow 0^-$, por tanto: $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$;

- **Álgebra de los límites finitos:** dadas las funciones $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, tales que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell_1$, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell_2$, con $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, entonces, para $x \rightarrow x_0$:

1. $\boxed{f(x) \pm g(x) \rightarrow \ell_1 \pm \ell_2};$
2. $\boxed{cf(x) \rightarrow c\ell_1, \forall c \in \mathbb{R}};$
3. $\boxed{f(x) \cdot g(x) \rightarrow \ell_1 \cdot \ell_2};$
4. $\boxed{\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2}}$, siempre y cuando $g(x), \ell_2 \neq 0$ para que la fracción tenga sentido;
5. $\boxed{f(x)^{g(x)} \rightarrow \ell_1^{\ell_2}}$, siempre y cuando $f(x), \ell_1 > 0$ para que la operación de exponencial tenga sentido.

En particular, observamos que las propiedades 1. y 2. dicen que la operación de **límite ¡es lineal!**

- **Aritmetización parcial de ∞ :** consideremos ahora operaciones algebraicas que involucran funciones que pueden diverger, por sencillez escribimos ∞ para denotar una función divergente en un punto x_0 . Valen los siguientes resultados:

1.

$$\boxed{\ell \pm \infty = \pm \infty},$$

o sea, la suma de los límites de una función convergente a $\ell \in \mathbb{R}$ y una función divergente es una función con límite divergente;

2.

$$\boxed{+\infty + \infty = +\infty};$$

3.

$$\boxed{-\infty - \infty = -\infty};$$

4.

$$\boxed{\ell \cdot \infty = \infty}, \quad \ell \neq 0;$$

donde ℓ es el límite de una función, y es diferente de cero. El signo de ∞ depende del valor de ℓ y del ∞ en el lado de izquierda;

5.

$$\boxed{\frac{\ell}{0} = \infty},$$

donde 0 es el límite de una función que tiende a *cero*, ¡**no** el número *cero*!

6.

$$\boxed{\frac{\ell}{\infty} = 0}.$$

Obsérvese que en las propiedades de arriba no aparecen situaciones como éstas:

- $+\infty - \infty$;
- $0 \cdot \infty$;
- $\frac{0}{0}$;
- $\frac{\infty}{\infty}$;
- 1^∞ ;
- 0^0 ;
- $(+\infty)^0$.

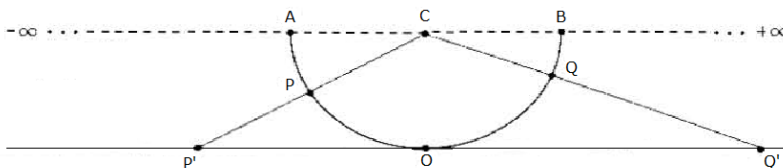
Estas situaciones se llaman **formas de indeterminación** y serán discutidas más adelante. De nuevo, remarcamos que en estas expresiones hay que interpretar 0 y 1 como funciones que tienden a 0 y 1, respectivamente, y **no** como los números 0 y 1.

2.5. La extensión de $\mathbb{R}$

Ya hemos dicho que $-\infty$ y $+\infty$ no son números reales, sino el *comportamiento o tendencia* de funciones divergentes. Sin embargo, teniendo en consideración la representación de $\mathbb{R}$ como una recta, podemos pensar $-\infty$ como aquel “punto” que está siempre a la izquierda de cada número real y $+\infty$ como aquel ‘punto’ que está siempre a la derecha de cada número real. El conjunto dado por la unión de $\mathbb{R}$ y de los dos “puntos” $-\infty$ y $+\infty$ se llama extensión de $\mathbb{R}$ (o *recta extendida/ampliada*) y se suele escribir como sigue:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

La interpretación gráfica canónica de $\mathbb{R}^*$ se obtiene considerando la figura debajo: se ve que podemos poner en correspondencia biyectiva cada punto del eje real con los puntos de la semicircunferencia simplemente conectando el centro C con la recta horizontal. Solo los puntos A y B no tienen correspondencia con puntos de la recta, sin embargo, resulta natural pensar que el punto A está en correspondencia con $-\infty$ y que B está en correspondencia con $+\infty$.



2.6. Funciones continuas y sus propiedades

Volvemos a examinar este límite: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$. Podemos preguntarnos si puede pasar que el valor del límite ℓ coincida con el valor que la función toma cuando $x = x_0$, o sea $f(x_0)$. Si este es el caso, se dice que f es continua en x_0 :

Def. (función continua): sea $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con D abierto y $x_0 \in D$. Se dice que f es continua en x_0 si:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0);$$

f se dice continua en todo el dominio D si es continua en cada punto de D .

Si escribimos explícitamente la definición de límite para una función continua, es decir:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

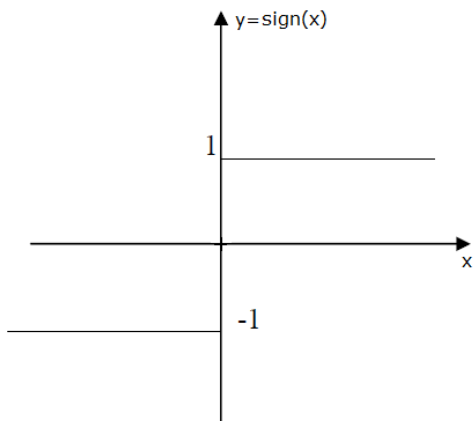
nos damos cuenta de que, para una función continua, **variaciones pequeñas de x alrededor de x_0 corresponden a variaciones pequeñas de $f(x)$ alrededor de $f(x_0)$** .

Si escribimos $x = x_0 + h$, para un cierto $h \in \mathbb{R}$ oportuno, tenemos que $x \rightarrow x_0$ si y solo si $h \rightarrow 0$, entonces, gracias al teorema de cambio de variable en los límites, podemos decir también que f es continua en x_0 si

$$\boxed{\exists \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)}.$$

Observación importante: para subrayar la importancia de la continuidad de una función, supóngase que queremos calcular el valor de una función f en un numero irracional x_0 con una calculadora. La calculadora aproximará el numero irracional con un numero racional x_1 cercano a x_0 , con $x_1 - x_0 = \Delta x$. Después la calculadora evaluará la función en $x_0 + \Delta x$ y devolverá el valor de $f(x_0 + \Delta x)$. Si f es continua en x_0 , $f(x_0 + \Delta x)$ será muy cercano al valor de $f(x_0)$, pero si f no es continua el valor que la calculadora devuelve ¡podría ser muy lejano al valor verdadero de $f(x_0)$!

Si f no es continua en x_0 , se dice que es *discontinua* en x_0 . Un típico caso de discontinuidad se ve en el gráfico de la función *signo* en $x = 0$:



el límite por la derecha y por la izquierda en $x = 0$ difieren, así que no puede existir el límite de la función signo en $x = 0$. Cuando existen los límites

por la derecha e izquierda, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_2$, pero $\ell_1 \neq \ell_2$, se dice que f tiene una *discontinuidad de salto*; el salto es $|\ell_2 - \ell_1|$ y puede ser finito o infinito. Las funciones que tienen discontinuidades de salto como el *signo* resultan muy utiles para modelar un *cambio abrupto de una cantidad*.

Hay casos en los que una función f no está definida en un punto x_0 , pero existe su límite para $x \rightarrow x_0$. En ese caso es posible **prolongar por continuidad** la función f como sigue:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & \text{si } x = x_0, \end{cases}$$

la función $\tilde{f}$ resulta bien definida y, por definición, continua en $D \cup \{x_0\}$.

Ejemplo: la función $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ está definida en cada x real, menos en $x = 0$, sin embargo, como veremos en las clases de prácticas, existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, por lo tanto podemos extender f a una función $\tilde{f}$ definida y continua sobre todo el eje real poniendo:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Vamos ahora a enunciar un teorema que tiene una importancia básica en el calculo diferencial.

Teorema (continuidad de las funciones elementales y sus composiciones): todas las funciones elementales¹ del cálculo, sus inversas, sus composiciones y las operaciones algebraicas entre ellas son continuas en sus dominios.

La consecuencia inmediata (e importante) de este teorema es que, **si x_0 pertenece al dominio de una función f continua, ¡el límite para x que tiende a x_0 de f se calcula simplemente sustituyendo x_0 por x en la expresión de f !**

Ejemplo: calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 2} \log(x^3)$. El dominio de la función $x \mapsto \log(x^3)$ es $(0, +\infty)$ y $2 \in (0, +\infty)$, entonces $x \mapsto \log(x^3)$ es continua en 2 y el límite vale $\log(2^3) = \log 8 \simeq 2,08$.

¹Las funciones elementales del cálculo son: funciones constantes, potencias y raíces, polinomios (en particular, funciones lineales), exponenciales, logaritmos y funciones trigonométricas.

Entonces **el cálculo de límites de funciones continuas en los puntos de sus dominio es trivial**. Los problemas surgen a la hora de calcular el límite en los puntos de la frontera del dominio o cuando aparecen formas de indeterminación, como veremos.

Examinamos ahora unas propiedades importantes de las funciones continuas sobre **intervalos compactos**, o sea *cerrados y acotados* $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, comenzando con un famoso teorema que establece unas condiciones para la existencia de un **cero de una función**, o sea, de un punto donde la función se anula.

*Teorema de **Bolzano***²: Si la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

1. es continua en todo punto de $[a, b]$;
2. f toma valores con signo opuestos en los extremos de $[a, b]$, o sea, $f(a) \cdot f(b) < 0$,

entonces existe por lo menos un cero $x_0 \in (a, b)$ de f : $f(x_0) = 0$. Si, además, f es estrictamente monótona, entonces x_0 es el único cero de f en $[a, b]$.

Por falta de tiempo no podemos analizar la prueba del teorema de Bolzano, nos limitamos en decir que es una prueba constructiva, en la cual se muestra como se puede converger al cero de f con el *método de bisección*. En el capítulo 4 examinaremos un método para la búsqueda de ceros de funciones mucho más eficiente que el método de bisección: el método de Newton.

*Teorema de **Weierstrass***³: Si la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en todo $[a, b]$ entonces f tiene máximo y mínimo absolutos en $[a, b]$, es decir, existen dos puntos $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que

$$f(x_1) \leq f(x), \quad f(x_2) \geq f(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

x_1 : mínimo absoluto para f , x_2 : máximo absoluto para f :

$$m = \min_{x \in [a, b]} \{f(x)\} = f(x_1), \quad M = \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\} = f(x_2).$$

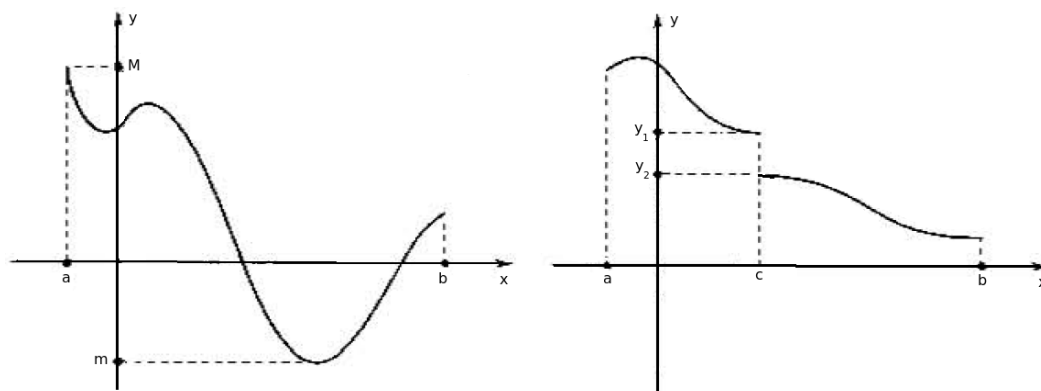
²Bernard Bolzano, matemático céco (1781-1848).

³Karl Weierstrass, importantísimo matemático alemán (1815-1897).

Teorema de los valores intermedios (Darboux⁴): con las mismas notaciones del teorema de Weierstrass, entonces, $\forall \lambda \in [m, M] \exists x \in [a, b]$ tal que $f(x) = \lambda$.

Los dos últimos teoremas se pueden resumir diciendo que **una función f continua sobre un intervalo compacto toma todos los valores entre el mínimo y el máximo**, con notación matemática: $f([a, b]) = [m, M]$.

La figura debajo muestra que la hipótesis de continuidad es fundamental para la validez del teorema: en la imagen de la derecha todos los valores contenidos entre y_1 e y_2 no corresponden a ningún valor de x en $[a, b]$ porque la función dibujada tiene una discontinuidad de salto en $x = c$.



Terminamos esta sección con una observación que nos ayudará entender mejor la importancia de la “continuidad” de los números reales. Consideremos la función $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $x \mapsto x^2$, o sea, la función que aplica un número racional cualquiera en su cuadrado (bien definida porque sabemos que $\mathbb{Q}$ es cerrado con respecto a esa operación). Se puede demostrar muy fácilmente que f no posee la propiedad de los valores intermedios con un contraejemplo: $f(1) = 1$ y $f(2) = 4$, el número 2 está entre 1 y 4, sin embargo no existe ningún número racional que elevado al cuadrado devuelva 2, porque solo $\sqrt{2}$ elevado al cuadrado genera 2 y sabemos que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$! Este ejemplo muestra claramente cómo las propiedades de los números reales y el cálculo diferencial están íntimamente relacionados y cuán útil es el conjunto de los números reales como ambiente de trabajo para desarrollar el cálculo diferencial.

⁴Jean Gaston Darboux (1842-1917), matemático frances.

2.7. Infinitos e infinitésimos de orden inferior, superior y del mismo orden, la relación de ‘ser asintótico a’

En esta sección vamos a examinar la rapidez relativa de convergencia a cero y de divergencia al infinito. Ya hemos observado que la operación de límite define el *comportamiento o tendencia* de una función cuando su variable se acerca a un determinado valor. Esta tendencia puede ser más o menos marcada según la función y según el punto donde se evalúa el límite. Saber comparar la rapidez de convergencia o divergencia de funciones es extremadamente importante en muchas aplicaciones del cálculo, como veremos durante el curso y como el estudiante podrá apreciar durante el desarrollo de sus estudios.

Comenzamos con una definición preliminar.

Def. Sea dada $f : D \subseteq \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$ (nótese que x_0 puede ser también ∞). Se dice que:

- f es **infinitésima** (o un infinitésimo) en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$;
- f es **infinita** (o un infinito) en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Comencemos comparando infinitos. Sean $f, g : D \subset \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ funciones infinitas en $x_0 \in D$. Para conocer la rapidez relativa de divergencia al infinito hay que evaluar el límite: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Si este límite no existe, se dice que f y g son **infinitos no comparables** en x_0 . Si el límite existe, distinguimos los casos siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & (1); \\ k \in \mathbb{R} & (2); \\ \infty & (3). \end{cases}$$

- En el caso (1) se dice que f es un **infinito de orden inferior** a g en x_0 , o bien que f diverge *más lentamente* que g (intuitivamente, el denominador llega a tener valores muy grandes antes que el numerador, entonces g “domina” a f y el límite va a cero);
- En el caso (2) se dice que f y g son **infinitos del mismo orden** en x_0 , o bien que f y g divergen con la misma rapidez;

- En el caso (3) se dice que f es un **infinito de orden superior** a g en x_0 , o bien que f diverge más rápidamente que g (de nuevo, intuitivamente, el límite puede ser infinito sólo si f llega a tomar valores “grandes” antes que g).

Ejemplo: queremos comparar la rapidez de divergencia al infinito de $f(x) = 2000x^2$ y $g(x) = 5x^3$ cuando $x \rightarrow +\infty$. Calculamos el límite de la razón entre f y g :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2000x^2}{5x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{400}{x} = 0,$$

habiendo usado la regla de aritmetización parcial del ∞ dada por: $\frac{\ell}{\infty} = 0$ $\forall \ell \in \mathbb{R}$.

Por tanto, podemos decir que $f(x) = 2000x^2$ es un infinito de orden inferior a $g(x) = 5x^3$ para $x \rightarrow +\infty$ o bien que $g(x) = 5x^3$ es un infinito de orden superior a $f(x) = 2000x^2$ para $x \rightarrow +\infty$.

Sean ahora $f, g : D \subset \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ funciones infinitésimas en $x_0 \in D$. Ahora la cuestión es saber si podemos “medir” la rapidez relativa de convergencia a 0 entre f y g . Como antes, vamos a evaluar el límite: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Si este límite no existe, se dice que f y g son **infinitesimos no comparables** en x_0 . Si el límite existe, distinguimos los casos siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & (1); \\ k \in \mathbb{R} & (2); \\ \infty & (3). \end{cases}$$

- En el caso (1) se dice que f es un **infinitesimo de orden superior** a g en x_0 , o bien que f converge a cero más rápidamente que g (intuitivamente, llegamos a cero antes en el numerador, por lo tanto el efecto de bajada del denominador, que intenta aumentar el resultado de la fracción, viene compensado por el hecho de que el valor en el numerador ya ha llegado a valores mucho más bajos!);
- En el caso (2) se dice que f y g son **infinitesimos del mismo orden** en x_0 , o bien que f y g van a 0 con la misma rapidez;
- En el caso (3) se dice que f es un **infinitesimo de orden inferior** a g en x_0 , o bien que f converge a 0 *más lentamente* que g (de nuevo, intuitivamente, f toma valores cada vez más bajos, pero g ya ha llegado a valores aún mas bajos, así que el resultado de la división sigue creciendo);

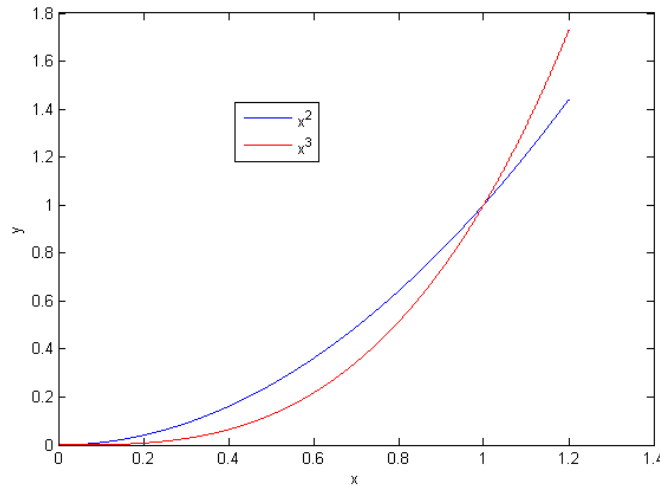
Ejemplo: consideremos otra vez $f(x) = 2000x^2$ y $g(x) = 5x^3$ pero examinemos sus comportamiento cuando $x \rightarrow 0$ y ambas funciones convergen a 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2000x^2}{5x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{400}{x} = +\infty,$$

habiendo usado la regla de aritmetización parcial del ∞ dada por: $\frac{\ell}{0} = +\infty$ $\forall \ell \in \mathbb{R}^+$.

Por tanto, podemos decir que $f(x) = 2000x^2$ es un infinitésimo de orden inferior a $g(x) = 5x^3$ para $x \rightarrow 0$ o bien que $g(x) = 5x^3$ es un infinitésimo de orden superior a $f(x) = 2000x^2$ para $x \rightarrow +\infty$.

Entonces, para cada pareja de coeficientes $a, b \neq 0$, ax^3 es tanto un infinito de orden superior a bx^2 cuando $x \rightarrow +\infty$ como un infinitésimo de orden superior a bx^3 cuando $x \rightarrow 0$, como confirma la figura de aquí debajo.



Particularmente interesante es el caso en el cual dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son infinitos o infinitésimos del mismo orden tales que el límite de su razón devuelve 1. Este caso merece una definición por sí mismo.

Def.: Sean dadas $f, g : D \subset \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$. Se dice que f y g son **asintóticas** para $x \rightarrow x_0$, y se escribe $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ si:

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

La relación de ‘ser asintótico a’ es extremadamente útil a la hora de calcular límites, por eso es importante destacar sus propiedades:

1. $\sim$ es una relación de **equivalencia**, o sea, son ciertas las siguientes propiedades:

- Reflexiva: $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f(x)$;
- Simétrica: $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \Leftrightarrow g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f(x)$;
- Transitiva: $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ y $g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} h(x) \Rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} h(x)$.

2. Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$, entonces f y g tienen el mismo comportamiento para $x \rightarrow x_0$: ambas divergen, o convergen al mismo límite o bien no tienen límite. El hecho de que dos funciones asintóticas f y g tengan el mismo límite si convergen para $x \rightarrow x_0$ es muy fácil de averiguar gracias a las propiedades de los límites:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)},$$

entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ si y solo si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

3. Un método típico para mostrar que $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ es llegar a escribir $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, con $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$.

4. Si $\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \tilde{f}(x)}$ y $\boxed{g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \tilde{g}(x)}$ entonces

$$\boxed{f(x)g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)} \quad \text{y} \quad \boxed{\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}}$$

5. **Cuidado:** en general las propiedades del punto 4. **no** valen para sumas, diferencias y exponenciales, como vamos a ver con dos contraejemplos: $f(x) = 3x^2 - x$, $g(x) = -3x^2 - x$, $f(x) + g(x) = -2x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$, pero $f(x) = x^2(3 - \frac{1}{x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 3x^2$ y $g(x) = x^2(-3 - \frac{1}{x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -3x^2$, entonces $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 3x^2 = \tilde{f}(x)$ y $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -3x^2 = \tilde{g}(x)$. Además: $\tilde{f}(x) + \tilde{g}(x) = 3x^2 - 3x^2 = 0 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Dado que $f(x) + g(x)$ y $\tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)$ tienen dos límites diferentes para $x \rightarrow +\infty$, no pueden ser asintóticas.

Para mostrar un contraejemplo sobre la función exponencial vamos a comprobar si $e^{f(x)} = e^{3x^2-x}$ es asintótica a $e^{\tilde{f}(x)} = e^{3x^2}$ para $x \rightarrow +\infty$ con la definición:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x^2-x}}{e^{3x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0,$$

entonces $e^{f(x)} \not\sim e^{\tilde{f}(x)}$, en general.

El **límite de la función exponencial** se estudia como sigue: sea $x_0 \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} e^{f(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty \\ e^k & \text{si } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} k \in \mathbb{R} \\ +\infty & \text{si } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty. \end{cases}$$

2.8. Cálculo de límite de polinomios y funciones racionales mediante relaciones asintóticas

Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$. Un polinomio es una función continua en todo $\mathbb{R}$, entonces los límites en puntos finitos se calculan de forma trivial. Los únicos límites no triviales que pueden interesar de un polinomio son los límites para $x \rightarrow \infty$ porque se puede presentar la forma de indeterminación $+\infty - \infty$. Por ejemplo: $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ presenta la forma de indeterminación $+2 \cdot \infty - 3 \cdot \infty + 1 = +\infty - \infty$, gracias a las formulas de aritmetización parcial del ∞ .

Para entender cómo analizar esos límites, vamos a reescribir $f(x)$ utilizando x^n como factor común:

$$f(x) = x^n \left(a_n + a_{n-1} \frac{x^{n-1}}{x^n} + \dots + a_1 \frac{x}{x^n} + \frac{a_0}{x^n} \right)$$

o sea

$$f(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right).$$

Así, $f(x)$ se expresa como un producto; sabemos que si tomamos el límite para $x \rightarrow \infty$ de $f(x)$, éste será el producto de los límites de los dos factores. El límite del factor contenido entre paréntesis es evidentemente a_n porque el límite de la suma es la suma de los límites, y todos los límites de los términos sucesivos a a_n son nulos. Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n$$

entonces $\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n} = 1$, pero de $\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{a_n x^n}$ se sigue que

$$\boxed{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} a_n x^n},$$

es decir: un polinomio es asintótico, para $x \rightarrow \infty$, a su término de grado máximo, o sea, $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ diverge al infinito con la misma rapidez que $a_n x^n$, independientemente de cuán grandes sean los coeficientes de las potencias de x de grado inferior a n .

Una consecuencia inmediata es la siguiente:

$$\boxed{\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}}.$$

Ejemplo: calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{30x^4 + 2000x^2 + 80}{-7x^8 - \sqrt{2}x}$. Tenemos que

$$\frac{30x^4 + 2000x^2 + 80}{-7x^8 - \sqrt{2}x} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} -\frac{30}{7}x^{-4} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\rightarrow} 0,$$

entonces $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{30x^4 + 2000x^2 + 80}{-7x^8 - \sqrt{2}x} = 0$.

Ejemplo: calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^5 + x^3 + 8x}{3x^5 - 19x^2}$. Tenemos que

$$\frac{-x^5 + x^3 + 8x}{3x^5 - 19x^2} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} -\frac{1}{3}x^0 = -\frac{1}{3} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\rightarrow} -\frac{1}{3}.$$

Con la misma técnica utilizada para determinar los resultados arriba, se demuestra que:

- la suma de infinitos es asintótica al infinito de orden superior;
- la suma de infinitésimos es asintótica al infinitésimo de orden inferior.

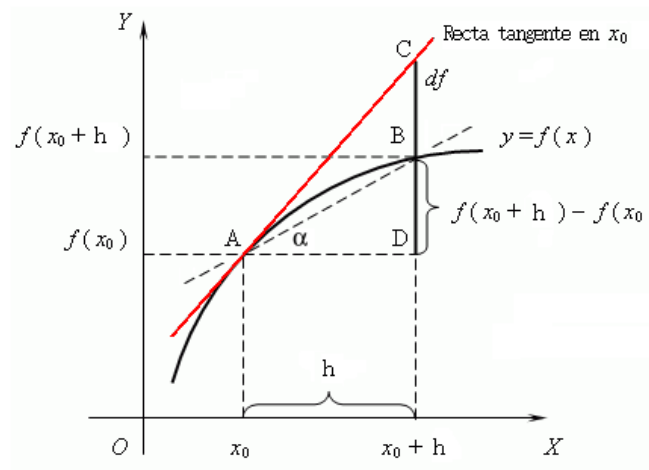
Para saber cómo determinar el orden de infinito e infinitésimo entre funciones más complejas que los polinomios, necesitamos introducir y analizar el concepto de derivada, que además nos proporcionará los dos resultados más importantes para la resolución de límites que se presentan en forma indeterminada: el desarrollo de Taylor y el teorema de l'Hôpital.

Capítulo 3

Derivadas

3.1. Definición de derivada de una función y su interpretación geométrica y mecánica

Como ya dijimos, el concepto de derivada está relacionado con el problema de encontrar la recta tangente al gráfico de una función o, de forma más general, a una curva en un cierto punto. Para entender mejor este problema, consideremos la figura aquí debajo.



Llamamos A el punto sobre el gráfico de la función real de variable real $y = f(x)$ de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ y B el punto que tiene coordenadas $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, siendo $h > 0$ el incremento horizontal y $f(x_0 + h) - f(x_0)$ el incremento vertical. Podemos medir la *pendiente media* mientras pasamos

de A a B con la razón incremental definida por

$$\frac{\text{Variación vertical}}{\text{Variación horizontal}} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \tan(\alpha),$$

dado que el triángulo ABD es rectángulo, la razón incremental coincide con $\tan(\alpha)$, es decir, con la pendiente de la recta secante al gráfico de f que pasa por A y B.

Mirando la figura se ve claramente que la pendiente media no es una medida precisa, porque mientras pasamos de A a B el gráfico cambia su pendiente en cada punto, el error entre la pendiente media y la pendiente verdadera es tanto más grande cuánto más se aleja la función f de la linealidad.

Para obviar a este problema, podemos intentar acercar B a A de forma tal que la medida de pendiente del gráfico de f dada por el coeficiente angular de la recta que conecta A y B sea cada vez más precisa. El error se minimiza cuando hacemos tender B a A, o sea, cuando consideramos el límite para $h \rightarrow 0$ de la razón incremental. Como se ve en la figura, ese caso corresponde a la situación en la cual la recta que pasa por A y B, cercanos pero no coincidentes, toma la posición límite dada por la recta tangente al gráfico de f en $(x_0, f(x_0))$. Podemos formalizar estas consideraciones con la siguiente definición.

Def.: Dada la función $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que f es **derivable** en $x_0 \in (a, b)$ si existe y es finito el límite de la razón incremental

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

que llamamos **derivada de f en x_0** e indicamos con estos símbolos:

- $\boxed{f'(x_0)}$, (**notación de Lagrange**), usado sobre todo por los matemáticos;
- $\boxed{\dot{f}(x_0)}$, (**notación de Newton**), usado sobre todo por los físicos, cuando f depende del tiempo;
- $\boxed{\frac{df}{dx}(x_0)}$, (**notación de Leibnitz**), que resulta muy útil a la hora de hacer operaciones formales con las derivadas, como veremos más adelante;

- $\boxed{Df(x_0)}$, (**notación de Arbogast**¹), que resulta útil cuando se extiende la derivación a funciones de más variables o a operadores diferenciales en espacios funcionales.

Resulta evidente que $f'(x_0)$ expresa la **rapidez de variación** de la función f en un entorno infinitésimo de x_0 .

Por construcción, $f'(x_0)$ es la **pendiente de la recta tangente al gráfico** de f en $(x_0, f(x_0))$. Para determinar la ecuación de esta recta es suficiente utilizar la fórmula que nos proporciona la recta que pasa por un punto con una pendiente conocida. En nuestro caso se obtiene:

Recta tangente al gráfico de f en $(x_0, f(x_0))$:

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}.$$

Si f es derivable en cada punto de (a, b) , queda bien definida la **función derivada**, que es la función que asocia a cada $x \in (a, b)$ la derivada de f en x mismo:

$$\begin{aligned} f' : (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x), \end{aligned}$$

otros símbolos para la función derivada son $\dot{f}$, $\frac{df}{dx}$.

Si f' también es derivable, podemos calcular la derivada de la función derivada de f , que llamaremos **derivada segunda** y escribiremos f'' o $\ddot{f}$ o $\frac{d^2f}{dx^2}$ o D^2f :

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h},$$

nótese que ahora en la razón incremental aparece f' y no f como antes. Veremos más adelante el significado geométrico de la derivada segunda en relación a la *curvatura del gráfico* de una función.

Podemos iterar este razonamiento, obteniendo la **derivada de orden** $n \geq 1$ en x_0 , que denotamos con los símbolos $f^{(n)}(x_0)$, $\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$ o $D^n f$.

La derivada (que se suele llamar también ‘derivada primera’) y la derivada segunda tienen **significados físicos** importantes: dado un cuerpo en movimiento a lo largo de un eje espacial, podemos definir la función s que asocia a cada instante temporal t el lugar $s(t)$ donde se encuentra el cuerpo en el eje:

$$\begin{aligned} s : [0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto s(t) \end{aligned}$$

¹Antoine Arbogast (1759-1803), matemático francés.

s : **función posición espacial**.

- $v(t) = \dot{s}(t)$: **velocidad instantánea** del cuerpo en movimiento en el instante t (rapidez de variación de la función posición);
- $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$: **aceleración instantánea** del cuerpo en movimiento en el instante t (rapidez de variación de la función velocidad);
- Si sobre el cuerpo actúa una fuerza F , que puede depender del instante temporal t , de la posición espacial $s(t)$ y de la velocidad $\dot{s}(t)$ y que, por tanto, indicamos con $F(t, s(t), \dot{s}(t))$, la **segunda ley de Newton** dice que se cumple la siguiente relación entre fuerza y aceleración:

$$F(t, s(t), \dot{s}(t)) = m \ddot{s}(t), \quad \forall t,$$

donde m es la masa del cuerpo, que Newton identificó como aquel atributo de un cuerpo que se opone a variaciones de velocidades provocadas por una fuerza externa (inercia).

3.2. Fórmulas para el cálculo de derivadas

Utilizando el límite que define las derivadas se pueden calcular las derivadas de las funciones elementales, que son los ladrillos fundamentales para calcular todas las otras derivadas. Veamos un ejemplo, calculemos la derivada de la función $y = x^2$ con la fórmula de la definición:

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2x$$

en resumen, hemos demostrado que $(x^2)' = 2x$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

Calculando los límites de las razones incrementales de las otras funciones elementales (que son menos fáciles que lo que acabamos de ver y necesitan los ‘límites notables’, que no tenemos tiempo de examinar), se llega a poder redactar la **tabla de las derivadas de las funciones elementales**:

$f(x)$	$f'(x)$
k constante real	0
x	1
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \log a$, $a > 0$, $a \neq 1$
$\log x$	$1/x$
$\log_a x$	$1/(x \log a)$, $a > 0$, $a \neq 1$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\arctan x$	$1/(1+x^2)$

En particular, si consideramos x^α con $\alpha = -1$ y $\alpha = 1/2$ obtenemos estas fórmulas de derivación:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{y} \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

El hecho de que la derivada de una función constante sea nula no sorprende: su gráfico es una recta horizontal, así que su pendiente es nula en cada punto!

Nótese además que e^x es la **única función que coincide con su derivada** y que $(\sin x)'' = -\sin x$ y $(\cos x)'' = -\cos x$, estas dos observaciones serán importantes para el curso de Ecuaciones Diferenciales.

Vamos ahora a examinar la derivada de la función valor absoluto:

$$(|x|)' = \begin{cases} (x)' = 1 & \text{si } x > 0 \\ (-x)' = -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

0 es un punto donde $|x|$ cambia definición, entonces hay que examinarlo con cuidado con el límite que define la derivada en $x = 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \text{sign}(h),$$

este límite no existe, dado que los límites por la izquierda y por la derecha valen -1 y +1, respectivamente.

Entonces la función $x \mapsto |x|$ no es derivable en 0 y su derivada para valores $x \neq 0$ coincide con el signo de x :

$$|x|' = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La función $|x|$ es el ejemplo canónico de función con un punto anguloso:

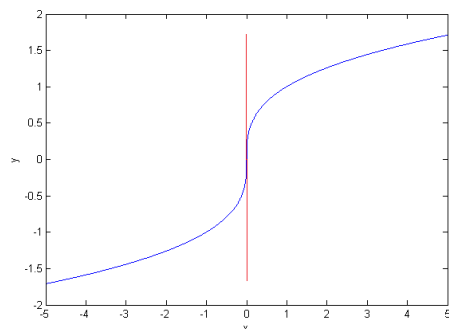
Def.: una función f tiene un **punto anguloso** en x_0 si es continua en x_0 , no derivable en x_0 , pero existen los límites de las razones incrementales por la izquierda y por la derecha para $x \rightarrow x_0$ (llamadas **derivada izquierda y derecha**, respectivamente).

Más allá de los puntos angulosos existen otras dos ‘*singularidades*’ de las funciones con respecto a las derivadas: los puntos de inflexión con tangente vertical y las cúspides.

Def.: una función f tiene un **punto de inflexión con tangente vertical** en x_0 si es continua en x_0 , no derivable en x_0 pero

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = +\infty, \text{ o bien, } \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = -\infty.$$

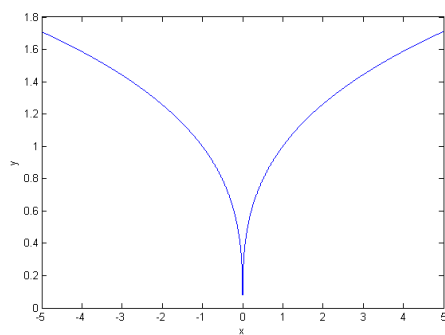
Un ejemplo de función con un punto de inflexión con tangente vertical en $x = 0$ es $f(x) = \sqrt[3]{x}$, como muestra la siguiente figura.



Def.: una función f tiene una **cúspide** en x_0 si es continua en x_0 , no derivable en x_0 pero existen los límites de las razones incrementales por la izquierda y derecha de f en x_0 y son infinitos con signos opuestos.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty, \text{ o bien, } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \mp\infty.$$

Un ejemplo de función con una cúspide en $x = 0$ es $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$:



3.3. Derivabilidad y continuidad

La derivada de la función valor absoluto es importante también porque muestra que una función continua en todo $\mathbb{R}$ puede no ser derivable en algún punto de su dominio. Podemos preguntarnos si también se cumple la propiedad opuesta, es decir si una función derivable puede ser discontinua en algún punto. La respuesta es no, como dice la proposición siguiente.

Proposición.: $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $x_0 \in (a, b) \implies f$ continua en x_0 .

Prueba: consideramos la diferencia $f(x_0 + h) - f(x_0)$ y multiplicamos y dividimos por h :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h.$$

Ahora operamos los límites para $h \rightarrow 0$ a ambos lados:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h. \quad (3.1)$$

Gracias a la hipótesis de derivabilidad de f y a las propiedades de los límites, el lado de la derecha se puede reescribir como:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = f'(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = 0.$$

De la ecuación (3.1) sigue que $\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$, pero este límite equivale a $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, que es la definición de continuidad de f en x_0 . $\square$

Entonces **la derivabilidad es una condición suficiente para la continuidad** y **la continuidad es una condición necesaria para la derivabilidad**. Si una función no es continua en un punto, tampoco podrá ser derivable en ese punto!

3.4. Álgebra de las derivadas

Utilizando la fórmula definitoria, se puede demostrar que la derivada de la suma o resta, del producto y de la división entre funciones se calculan como dice la proposición siguiente.

Proposición: sean $f, g : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivables en (a, b) , entonces $f \pm g$, $f \cdot g$ y f/g , $g \neq 0$, son derivables en (a, b) y valen estas fórmulas:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(k \cdot f)' = k \cdot f' \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'} \quad \text{Regla de Leibnitz}^2$$

$$\boxed{(f/g)' = (f' \cdot g - f \cdot g')/g^2}$$

en particular, de la última propiedad y del hecho de que la derivada de una función constante es nula, sigue que

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}}$$

3.5. Derivada de la función compuesta (regla de la cadena) y de la función inversa

Tiene sentido preguntarse si la función compuesta entre dos funciones derivables es derivable y cuánto vale la derivada. El teorema siguiente contesta a esa pregunta.

Teorema: Sea $g \circ f$ la función compuesta de dos funciones f y g . Si f es derivable en x_0 y g es derivable en $y = f(x_0)$ entonces $g \circ f$ es derivable en x_0 y vale la fórmula siguiente:

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)} \quad \text{Regla de la cadena.}$$

Es interesante analizar la regla de la cadena con la notación de Leibnitz: si denotamos $y = f(x)$ y $z = g(y)$, la regla de la cadena se escribe

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}},$$

como si dy se simplificara! Escrita con la notación de Leibnitz, la regla de la cadena muestra que **la rapidez de variación de z con respecto a x es el producto de las variaciones intermedias de z con respecto a y y de y con respecto a x .**

Como sugiere el nombre, la regla de la cadena se puede generalizar a la composición de un número cualquiera de funciones, por ejemplo, en el caso de tres funciones la regla de la cadena se escribe

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

²Gottfried Wilhelm von Leibnitz, genial matemático alemán, (1646-1716) ha desarrollado los conceptos de infinitésimo, derivada e integral contemporáneamente a Newton.

Para usar esta regla hay que aprender a interpretar una función complicada como composición sucesiva de funciones elementales. Para ello es útil pensar cómo se calcula una función compuesta a través de una calculadora.

Ejemplo: derivamos $x \mapsto (\sin x)^3$ pensando esta función como la función compuesta por $y = \sin x$ y $z = y^3$:

$$x \xrightarrow{\sin} y = \sin x \xrightarrow{(\cdot)^3} z = (\sin x)^3.$$

Por la regla de la cadena:

$$z'(x) = z'(y) \cdot y'(x) = 3y^2 \cdot \cos x = 3y^2 \cos x = 3 \sin^2 x \cos x.$$

Usando la regla de la cadena es inmediato ver que

$$|f(x)|' = \text{sign}(f(x)) \cdot f'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{si } f(x) > 0 \\ -f'(x) & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

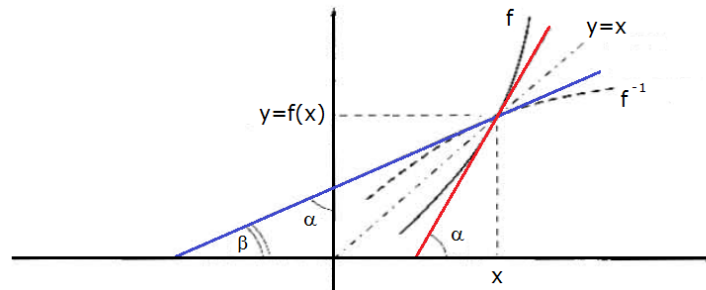
Vamos a ver ahora como se deriva la función inversa, recordando que, si $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ es una función biyectiva y $f^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$ es su inversa, f y f^{-1} están relacionadas como sigue: $f^{-1}(f(x)) = x$, $\forall x \in (a, b)$ y $f(f^{-1}(y)) = y$, $\forall y \in (c, d)$.

Entonces, si f^{-1} es derivable, derivando ambos lados de la identidad $f^{-1}(f(x)) = x$ (el de la izquierda con la regla de la cadena!) obtenemos $(f^{-1})'(y) \cdot f'(x) = 1$, o sea $(f^{-1})'(y) = 1/f'(x)$, puesto que $f'(x)$ es diferente de cero. Fomalizamos todo esto en el siguiente resultado.

Teorema: Si f es derivable en $x \in (a, b)$ y $f'(x) \neq 0$, entonces también f^{-1} es derivable en $y = f(x)$ y vale la fórmula siguiente:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \textbf{Fórmula de derivación de la función inversa.}$$

Es a través de esta fórmula que se pueden calcular las derivadas de las funciones trigonométricas inversas. Newton descubrió esta fórmula geoméricamente: como se recuerda en la figura siguiente, el gráfico de f y de su inversa son simétricos con respecto a la bisectriz $y = x$, sigue que los ángulos α y β son complementarios, o sea $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.



Sigue que $f'(x) = \tan(\alpha) = \tan(\frac{\pi}{2} - \beta) = \frac{1}{\tan(\beta)} = \frac{1}{f^{-1}(y)}$, habiendo usado la identidad de la tangente: $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{\tan(\theta)} \forall \theta$ y el hecho de que $(f^{-1})'(y) = \tan(\beta)$.

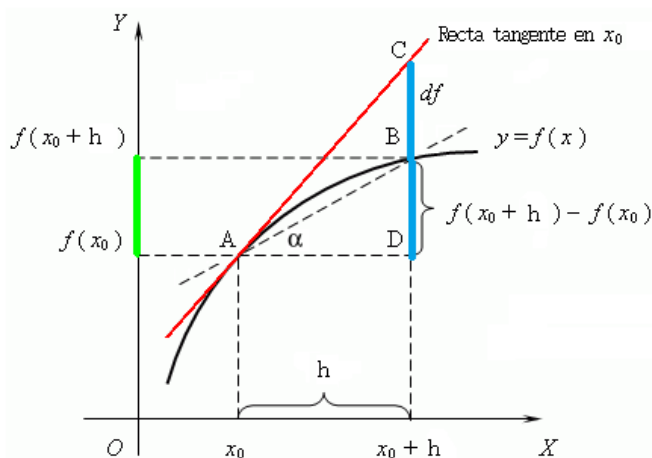
Con la notación de Leibnitz podemos escribir la regla de derivación de la función inversa con una expresión casi tautológica:

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}}.$$

En la sección siguiente vamos a analizar el origen de la notación de Leibnitz examinando el concepto de diferencial.

3.6. Diferenciabilidad y derivabilidad en $\mathbb{R}$: el concepto de linealización local de una función

El cálculo diferencial fue inventado contemporáneamente por Newton y Leibnitz durante la segunda mitad del 1600. Mientras Newton estaba más interesado en las aplicaciones del concepto de derivada a la física, obteniendo resultados excepcionales como la ley de gravitación universal o la demostración matemática de que los planetas del sistema solar siguen orbitas elípticas, Leibnitz estaba más interesado en la componente ‘algebraica’ del cálculo diferencial a través del estudio del ‘diferencial’, que ahora vamos a introducir volviendo a examinar la figura:



Una operación muy común tanto en matemática pura como en las aplicaciones es la **linealización**, o sea la sustitución de una función que depende no linealmente de sus variables con una función lineal. Como en cada aproximación, también en el caso de la linealización hay que proporcionar una estimación cuantitativa o cualitativa del error que se cumple aproximando.

Si una función f es derivable en un punto x_0 , la función lineal que podemos asociar de forma más natural a f es la recta tangente al gráfico de f en x_0 : $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

En la figura, la variación de la ordenada del punto sobre el gráfico de f cuando x varía de x_0 a $x_0 + h$ está dibujada en verde, mientras que la variación de la ordenada del punto sobre la recta tangente cuando x varía de x_0 a $x_0 + h$ está dibujada en azul.

Es razonable considerar el error ‘aceptable’ si la diferencia entre las ordenadas del punto sobre el gráfico de f y sobre la recta tangente (o sea la

diferencia de longitud del segmento verde y azul, respectivamente) tiende a 0 más rápidamente que el desplazamiento h . La diferencia entre la ordenada de f en $x_0 + h$ y la ordenada del punto sobre la recta tangente $y(x)$ en $x = x_0 + h$ se suele escribir como $o(h)$ ‘**o-pequeña**’ y vale:

$$\begin{aligned} o(h) &= f(x_0 + h) - y(x_0 + h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)((x_0 + h) - x_0) \\ &= f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h. \end{aligned}$$

La condición de aceptabilidad del error, o sea que $o(h)$ tienda a 0 más rápidamente que $h \rightarrow 0$ tiene un nombre particular:

Def.: Dada la función $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que f es **diferenciable** en $x_0 \in (a, b)$ si la función $h \mapsto o(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h$ es un infinitésimo de orden superior con respecto a h para $h \rightarrow 0$, es decir si vale que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$

Si consideramos un punto genérico x en un entorno suficientemente pequeño de x_0 y llamamos el incremento $h = x - x_0$, podemos explicitar el **significado geométrico del concepto de diferenciabilidad** como sigue:

“Una función real de una variable real f es diferenciable en un punto x_0 si $f(x)$ se puede aproximar mediante la función lineal dada por la recta tangente a la gráfica de f en x_0 , $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, con un error $o(x - x_0)$ que tiende a 0 más rápidamente que la distancia lineal entre x y x_0 ”.

Dado que la aproximación de f se hace con una función lineal y dado que esta aproximación produce un error ‘despreciable’ solo en puntos cercanos a x_0 , se suele decir que **la diferenciación es un proceso de linealización local de una función**.

Por lo tanto, las funciones no diferenciables son aquellas que no se pueden linealizar localmente ‘de forma eficaz’ porque no tienen recta tangente o porque el error que se cumple aproximando la función con su recta tangente es demasiado grande en el sentido especificado arriba.

Para funciones reales de variable real, y solo para éstas, resulta que ser derivable y ser diferenciable son condiciones equivalentes, como vamos a demostrar.

Teorema: La función $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $x_0 \in (a, b)$ si y solo si es derivable en x_0 .

Prueba. Hay que demostrar que la diferenciabilidad implica la derivabilidad (que indicamos con $\Rightarrow$) y la implicación inversa (que indicamos con $\Leftarrow$). Probaremos las dos implicaciones por separado.

- ($\Rightarrow$): Supongamos que f sea diferenciable en $x_0 \in (a, b)$, entonces, explicitando la fórmula que aparece en la definición de diferenciabilidad, podemos escribir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0,$$

pero $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$, entonces el límite se reescribe como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right] = 0,$$

que, gracias a las propiedades de los límites, podemos escribir como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

que es la definición de derivabilidad.

- ($\Leftarrow$): Supongamos ahora que f sea derivable en x_0 , o sea que exista finito el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0), \quad (3.2)$$

tenemos que demostrar que, bajo esta hipótesis, vale que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0.$$

Para lograr esto, observamos que $f'(x_0)$ es una función constante con respecto a h , entonces podemos escribir $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} f'(x_0)$, introduciendo esta expresión en el lado derecho de (3.2):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f'(x_0),$$

si pasamos el límite que aparece en el lado de la derecha al lado de la izquierda y utilizamos las propiedades algebraicas de los límites podemos escribir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right] = 0,$$

que obviamente equivale a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0,$$

que es la definición de diferenciabilidad. $\square$

El teorema que acabamos de demostrar dice que, para una función $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la existencia de la recta tangente en un punto con pendiente finita (derivabilidad) es condición necesaria y suficiente para que f se pueda linealizar con un error infinitésimo de orden superior con respecto al incremento de la variable independiente (diferenciabilidad).

Remarcamos que este resultado (fuerte) de equivalencia entre diferenciabilidad y derivabilidad vale solo para funciones reales *de una variable real*.

Como se verá durante el curso de cálculo del segundo trimestre, cuando f tiene más de una variable la derivabilidad pierde su carácter ‘global’ y se vuelve un concepto ‘direccional’, mientras que la diferenciabilidad mantiene su significado de aproximación lineal local de una función, no a través de rectas tangentes, sino de planos o hiperplanos tangentes.

Solo en una dimensión (una variable) estos dos conceptos se funden en uno solo.

3.6.1. El diferencial de una función

Si f es diferenciable en x_0 tiene sentido preguntarse cuánto vale el incremento de la ordenada del punto sobre la recta tangente a f en x_0 , o sea $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, cuando pasamos de x_0 a $x_0 + h$:

$$\begin{aligned} y(x_0 + h) - y(x_0) &= f(x_0) + f'(x_0)(x_0 + h - x_0) - f(x_0) - f'(x_0)(x_0 - x_0) \\ &= f'(x_0)h, \end{aligned}$$

este valor tiene un nombre particular:

Def.: Sea $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in (a, b)$. El valor del **diferencial** (de orden 1) de f en x_0 es

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)h}.$$

Entonces, *el diferencial de f en x_0 mide la variación de la ordenada del punto sobre la recta tangente a f en x_0 cuando se pasa de x_0 a $x_0 + h$ como el producto de la pendiente de la recta, $f'(x_0)$ por el incremento de abscisa h .*

Leibnitz indicó h con dx , con lo cual la definición de diferencial se vuelve:

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)dx} \iff \boxed{\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)},$$

habiendo tratado dx como una cantidad finita (operación definida rigurosamente en un dominio de la matemática llamado ‘Análisis no estándar’ desarrollada en los años 1970 por el matemático Abraham Robinson para dar rigor a la visión de Leibnitz del cálculo diferencial).

Es ésta la *génesis de la notación de Leibnitz!*

Podemos reformular las afirmaciones sobre la linealización local de una función a través del diferencial. Observamos antes de todo que la diferenciabilidad de f en x_0 se puede escribir así

$$\boxed{f(x_0 + dx) - f(x_0) = df(x_0) + o(dx)},$$

utilizando el significado geométrico del diferencial podemos afirmar que la diferenciabilidad de f en x_0 implica que se puede aproximar la variación de f en un entorno de x_0 con la variación de la recta tangente al gráfico de f en x_0 , sabiendo que el error de aproximación es un infinitésimo de orden superior con respecto a dx .

3.7. La fórmula de Taylor con resto de Peano

En la sección antecedente hemos comentado que, si f es derivable en x_0 , podemos aproximar f localmente con una función lineal, la recta tangente a su gráfico en x_0 , con menos de un error que resulta un infinitésimo de orden superior con respecto a $x - x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

que consta de un polinomio de orden 1, $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, más un término complementario, $o(x - x_0)$, del cual conocemos el comportamiento cualitativo: tiende a cero más rápidamente que $x - x_0$ cuando x se acerca a x_0 . El valor de la derivada primera de f en x_0 juega el papel del coeficiente del incremento de la variable del polinomio $(x - x_0)$.

Podemos preguntarnos si es posible mejorar esta aproximación si f es derivable más veces, considerando aproximaciones no lineales. Habiendo observado que la aproximación lineal no es nada más que una aproximación polinomial de orden 1, resulta natural buscar aproximaciones no lineales de carácter polinomial. Dado que los polinomios de grado > 1 tienen una curvatura no nula y dado que la curvatura de una función se mide con las derivadas de orden superior, podemos imaginar que el valor de estas derivadas en x_0 pueda jugar un papel análogo a lo de $f'(x_0)$ en la aproximación lineal, es decir, que $f''(x_0)$ sea el coeficiente de $(x - x_0)^2$, que $f'''(x_0)$ sea el coeficiente de $(x - x_0)^3$ y, en general, que $f^{(n)}(x_0)$ sea el coeficiente de $(x - x_0)^n$. Si esta hipótesis es verdadera podríamos llegar a escribir una aproximación como esta, cuando $x \simeq x_0$:

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \leftarrow \text{NO!} \quad (3.3)$$

donde $\simeq$ es el símbolo de ‘igualdad aproximada’. Esta fórmula no puede ser correcta por una razón muy sencilla. Al fin de entender esta razón, conviene suponer por el momento que n sea igual a 2. En este caso, la fórmula (incorrecta) (3.3) se escribe así: $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2$ y entonces, si calculamos las derivadas con respecto a x de las funciones que aparecen en ambos lados obtenemos: $f'(x) \simeq f'(x_0) + 2f''(x_0)(x - x_0)$ y $f''(x) \simeq 2f''(x_0)$ (observamos que $f(x_0)$ y $f'(x_0)$ son números reales y se comportan como constantes, o sea se anulan, si las derivamos con respecto a la variable x). Si calculamos la derivada en $x = x_0$, la última relación que acabamos de escribir se vuelve $f''(x_0) \simeq 2f''(x_0)$ lo cual es evidentemente incorrecto (a menos que $f''(x_0)$ sea nula, caso en el cual tenemos una aproximación lineal!). Si queremos modificar la fórmula (3.3) para eliminar

la incoherencia que acabamos de subrallar, tenemos que introducir un coeficiente que anule el factor 2 que aparece delante de la derivada segunda, es decir: $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$. ¿Cuales son los coeficientes de los términos de orden superior al segundo? Se podría pensar $1/3, 1/4, \dots, 1/n$, en realidad no es así, y para darse cuenta de eso es suficiente repetir el razonamiento de arriba para $n = 3$ obteniendo la *fórmula incorrecta* $f'''(x_0) \simeq 3 \cdot 2 \cdot f'''(x_0)$, entonces esta vez el coeficiente que tenemos que introducir en la fórmula (3.3) para anular el factor $3 \cdot 2$ es $\frac{1}{3 \cdot 2}$. Iterando el razonamiento hasta el orden n , llegamos a obtener la *fórmula incorrecta* $f^{(n)}(x_0) \simeq n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot f^{(n)}(x_0)$ y entonces habrá que corregir la fórmula (3.3) como sigue:

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n(n-1) \cdots 2}(x - x_0)^n.$$

Conviene introducir un simbolo para denotar el producto iterado de los números naturales hasta n : $n!$ que se lee ‘ n factorial’ (definición de Arbogast) y se define como sigue³

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \text{ o bien } n = 1 \\ \prod_{k=2}^n k & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

El siguiente teorema garantiza que el argumento que acabamos de examinar es correcto.

Teorema: si $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable n veces en (a, b) con derivadas continuas, entonces existe un entorno $U(x_0)$ tal que, para cada $x \in U(x_0)$ vale la siguiente fórmula:

Fórmula (o desarrollo) de Taylor hasta el orden n con centro en x_0 y con resto de Peano⁴:

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \\ & \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \end{aligned}$$

³Analogamente a $\sum_{k=1}^n$, el simbolo $\prod_{k=1}^n$ se llama **productoria** de 1 hasta n . $\sum$ y $\prod$ son las letras ‘sigma’ y ‘pi’ griegas maiusculas, que corresponden a las letras latinas ‘S’ y ‘P’, comienzo de Sumatoria y Productoria. El simbolo de exclamación para denotar el factorial fue introducido por el matemático frances Christian Kramp (1760-1826) para remarcar cuanto notable fuese la rapidez de crecimiento del factorial de un número natural: es suficiente pensar que $15! = 1307674368000$.

⁴Giuseppe Peano (1858-1932), matemático italiano.

donde $\underset{x \rightarrow x_0}{=}$ es una notación que significa que la igualdad vale $\forall x \in U(x_0)$ y donde $o((x - x_0)^n)$ es un infinitésimo superior con respecto a $(x - x_0)^n$:

$$\frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} \underset{x \rightarrow x_0}{\rightarrow} 0.$$

$o((x - x_0)^n)$ se llama resto de Peano y establece la presencia de un término complementario en el desarrollo de Taylor: a menos que f sea un polinomio de grado n , caso en el cual $o((x - x_0)^n)$ es la función nula, no conocemos explícitamente la expresión analítica de $o((x - x_0)^n)$, solo sabemos que es un error que tiende a cero más rápidamente de $(x - x_0)^n$ cuando $x \rightarrow x_0$.

La fórmula de Taylor mantiene su validez, aunque con hipótesis distintas, sustituyendo el resto de Peano con otros tres restos, que se llaman, respectivamente, resto de Lagrange, resto de Cauchy y resto integral. En la sección (3.11.1) veremos la fórmula de Taylor con resto de Lagrange.

El polinomio de orden n en la variable x dado por

$$T_{x_0}^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

es decir, explícitamente,

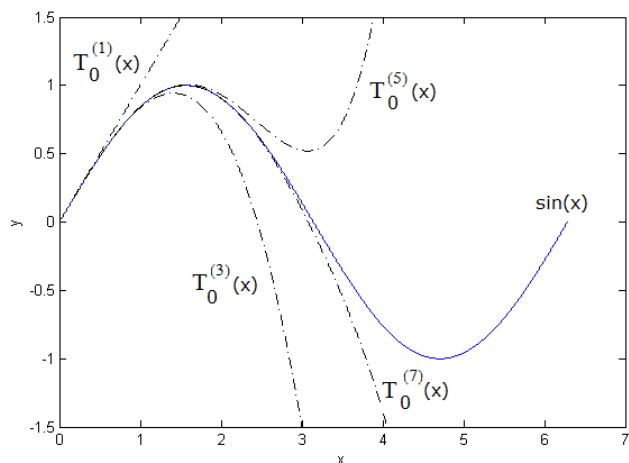
$$T_{x_0}^{(n)}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se llama **polinomio de Taylor** de orden n con centro en x_0 . Si $x_0 = 0$ el polinomio se llama de **Taylor-Mac Laurin**⁵.

Observaciones:

1. La fórmula de Taylor, independientemente del resto, es una de las fórmulas más importantes de la matemática: permite **aproximar una función complicada con la función no lineal más sencilla, un polinomio, por menos de infinitésimos de orden superior**. Veremos que esta propiedad resultará extremadamente útil también a la hora de resolver límites en forma indeterminada;
2. Los términos de orden superior de la fórmula de Taylor añaden detalles cada vez más finos a la aproximación de f .

⁵Brook Taylor (1685-1731), Colin Maclaurin (1698-1746), matemáticos británicos.



Como muestra la figura superior, estos detalles finos permiten aproximar cada vez mejor la función también lejos del punto central del desarrollo de Taylor. Cerca del centro del desarrollo, 0 en este caso, todos los polinomios dan una aproximación excelente de la función $y = \sin(x)$ (derivable infinitas veces con continuidad), a medida que nos alejamos de 0, los polinomios de orden más grande aproximan la función con un error cada vez más pequeño.

3. El desarrollo de Taylor se usa de forma extensa también en los computadores electrónicos. Un ordenador sabe hacer solo operaciones algebraicas básicas, por eso *para un ordenador resulta conveniente usar la fórmula de Taylor* para calcular el valor (necesariamente aproximado) que toma una función en un punto: aunque eso necesite muchas cuentas, las operaciones involucradas son solo sumas y productos, que el ordenador puede hacer de forma extremadamente rápida;
4. La fórmula de Taylor de orden 1 con resto de Peano coincide con la definición de diferenciabilidad: $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} T_{x_0}^{(1)} + o((x - x_0))$, con

$$T_{x_0}^{(1)} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \textbf{Polinomio de Taylor de orden 1.}$$

Resumimos en la tabla siguiente los desarrollos de Taylor-Mac Laurin con resto de Peano hasta el orden n más comunes en las aplicaciones.

$f(x)$	Desarrollo de Taylor-Mac Laurin de orden n
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$
$\sinh x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\cosh x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$
$\log(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{n=1}^n (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$

Observamos que:

1. En el desarrollo de Taylor-Mac Laurin de funciones pares aparecen solo potencias pares, en el desarrollo de Taylor-Mac Laurin de funciones impares aparecen solo potencias impares;
2. El desarrollo de Taylor-Mac Laurin de $\sin x$ y $\sinh x$ son idénticos, exceptuado el signo alterno

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

que está presente en el desarrollo de $\sin x$;

3. El desarrollo de Taylor-Mac Laurin de $\cos x$ y $\cosh x$ son idénticos, exceptuado el signo alterno que está presente en el desarrollo de $\cos x$;
4. En el desarrollo de $\log(1+x)$ aparece

$$(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ -1 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

5. El desarrollo de Taylor-Mac Laurin de $(1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, se llama desarrollo *binomial* y aparece el *coeficiente binomial* (o combinaciones):

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!},$$

En particular:

$$\binom{\alpha}{n} = \binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{1} = \binom{\alpha}{n-1} = 1, \quad \binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}.$$

Los desarrollos de Taylor se pueden generalizar sustituyendo $x \rightarrow 0$ con una función $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$, veremos ejemplos en las clases de prácticas y seminarios.

Estos desarrollos permiten extraer relaciones asintóticas que resultan muy útiles para resolver límites indeterminados. Recopilamos aquí debajo unas relaciones asintóticas que se encuentran con frecuencia en las aplicaciones.

Si $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$, valen estos desarrollos de Taylor:

$$e^{\varepsilon(x)} \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} 1 + \varepsilon(x), \quad e^{\varepsilon(x)} \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} 1 + \varepsilon(x) + \frac{\varepsilon(x)^2}{2}$$

$$\sin \varepsilon(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \varepsilon(x), \quad \sin \varepsilon(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \varepsilon(x) - \frac{\varepsilon(x)^3}{3!}$$

$$\cos \varepsilon(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} 1, \quad \cos \varepsilon(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} 1 - \frac{\varepsilon(x)^2}{2!}$$

$$\sinh \varepsilon(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \varepsilon(x), \quad \sinh \varepsilon(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \varepsilon(x) + \frac{\varepsilon(x)^3}{3!}$$

$$\cosh \varepsilon(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} 1, \quad \cosh \varepsilon(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} 1 + \frac{\varepsilon(x)^2}{2}$$

$$\log(1 + \varepsilon(x)) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \varepsilon(x), \quad \log(1 + \varepsilon(x)) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \varepsilon(x) - \frac{\varepsilon(x)^2}{2}$$

$$(1 + \varepsilon(x))^\alpha \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} 1 + \alpha \varepsilon(x), \quad (1 + \varepsilon(x))^\alpha \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} 1 + \alpha \varepsilon(x) + \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} \varepsilon(x)^2.$$

Ejemplo: $f(x) = e^{5\sqrt{x-2}}$, es evidente que $\varepsilon(x) = 5\sqrt{x-2} \xrightarrow{x \rightarrow 2} 0$, entonces el desarrollo de Taylor de $f(x)$ alrededor de $x = 2$ hasta el orden 2 es $f(x) \underset{x \rightarrow 2}{\sim} 1 + 5\sqrt{x-2} + \frac{25}{2}|x-2|$.

3.8. El teorema de l'Hôpital y sus aplicaciones al cálculo de límites en forma indeterminada

El desarrollo de Taylor y el teorema de l'Hôpital, que vamos a examinar en esta sección, son los dos métodos más potentes para resolver los límites que se presentan en forma indeterminada.

Teorema de l'Hôpital:

Hipótesis:

1. $f, g : [a, b] \subseteq \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, derivables en (a, b) ;
2. $c \in (a, b)$;
3. $g(x) \neq 0$ y $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b) \setminus \{c\}$;
4. Existen los límites siguientes

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 \text{ o bien } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm\infty;$$

5. Existe el límite siguiente

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}^*.$$

Tesis: vale que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Precauciones para el uso del teorema de l'Hôpital:

- El teorema de l'Hôpital se puede usar directamente en la forma escrita en el teorema solo para límites de cocientes que tengan una forma de indeterminación $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, no para límites de cocientes que no tienen formas de indeterminación;
- Si tenemos una forma de indeterminación del tipo $[0 \cdot \infty]$ para aplicar el teorema de l'Hôpital tenemos que reconducirnos a una de las formas de indeterminación $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ con manipulaciones algebraicas oportunas;

- El teorema dice que, bajo sus hipótesis, el límite del cociente entre las derivadas coincide con el límite del cociente de las funciones de partida. Sin embargo, si el límite del cociente de las derivadas no existe, no se puede decir nada sobre el límite del cociente de las funciones de partida!

Ejemplo de buen uso del teorema de l'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x$ presenta una forma de indeterminación $[0 \cdot \infty]$, pero podemos reescribir el límite como sigue

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

en esta forma el límite presenta una forma de indeterminación $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ y el estudiante puede averiguar que valen las hipótesis del teorema de l'Hôpital con $f(x) = \log x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $(a, b) = \mathbb{R}^+$ y $c = 0$. Vamos a ver si existe el límite de las derivadas de f y g para $x \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0,$$

aplicando la tesis de teorema podemos decir que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0}.$$

Ejemplo de uso incorrecto del teorema de l'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$ presenta la forma de indeterminación $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $f(x) = x - \sin x$, $g(x) = x + \sin x$ son derivables en todo $\mathbb{R}$, pero no existe el límite de sus derivadas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sin x)'}{(x + \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

porque $\cos x$ no tiene límite para $x \rightarrow \infty$, como ya hemos visto. Por lo tanto no todas las hipótesis del teorema de l'Hôpital son válidas y tenemos que usar otra técnica para calcular el límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 - \frac{\sin x}{x})}{x(1 + \frac{\sin x}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

Como se ve, hubiera sido incorrecto inferir que el límite original no existe solo porque el límite del cociente de las derivadas no existe!

Observación: el teorema de l'Hôpital se puede aplicar también de forma iterada (si siguen valiendo sus hipótesis, obviamente), o sea se puede intentar calcular el límite indeterminado con la derivada segunda, tercera, etc.

A veces estas iteraciones pueden generar un bucle infinito, como en el caso siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

valen las hipótesis del teorema de l'Hôpital, pero $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ y $g'(x) = 1$, entonces $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ sigue teniendo la misma forma de indeterminación.

Si derivamos otra vez obtenemos $\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ y así hemos vuelto al límite inicial. Se genera un bucle infinito que no permite resolver el límite. Hay que usar otra técnica (el desarrollo de Taylor, como veremos en las clases de prácticas y seminarios).

Una de las aplicaciones más útiles del teorema de l'Hôpital consiste en la determinación de la 'jerarquía' de infinitos e infinitésimos, vamos a ver de qué se trata.

3.9. Jerarquía de infinitos e infinitésimos

Hemos visto que funciones diferentes tienen formas diferentes de converger a 0 o diverger al ∞ y que existe la posibilidad de medir la rapidez relativa de convergencia a 0 o divergencia calculando el límite de la razón entre funciones, que permite definir los conceptos de infinitésimos e infinitos de orden superior, inferior o del mismo orden.

El teorema de l'Hôpital permite encontrar la jerarquía de infinitos e infinitésimos entre las funciones elementales del cálculo. A título de ejemplo, vamos a analizar el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$: tanto e^x como x satisfacen las hipótesis del teorema de l'Hôpital y el límite presenta una forma de indeterminación $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. El límite del cociente de las derivadas es $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$, por tanto: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, lo cual dice que e^x es un infinito de orden superior a x para $x \rightarrow +\infty$.

Con cuentas análogas, un poco más técnicas, se puede demostrar el siguiente resultado.

Teorema:

Jerarquía de infinitos:

$$\boxed{\log_a x \prec (\log_a x)^\alpha \prec x^\beta \prec x \prec x^\gamma \prec b^{\eta x} \prec x^x}, \quad x \rightarrow +\infty$$

Jerarquía de infinitésimos:

$$\boxed{\frac{1}{\log_a x} \prec \frac{1}{(\log_a x)^\alpha} \prec \frac{1}{x^\beta} \prec \frac{1}{x} \prec \frac{1}{x^\gamma} \prec \frac{1}{b^{\eta x}} \prec \frac{1}{x^x}}, \quad x \rightarrow +\infty$$

donde $\prec$ es el símbolo que expresa que el infinito o infinitésimo a su derecha es de orden superior al infinito o infinitésimo que aparece a su izquierda y donde:

- $a > 1$;
- $\alpha > 1$;
- $\beta \in (0, 1)$;
- $\gamma > 1$;
- $b > 1$;
- $\eta > 0$.

El logaritmo de x es la función elemental que diverge menos rápidamente para $x \rightarrow \infty$, después están las raíces de x , las potencias ≥ 1 , las exponenciales y x^x .

Observaciones importantes:

1. Observando que $\frac{1}{b^{\eta x}} = \left(\frac{1}{b}\right)^{\eta x}$, $b > 1$ así que $\frac{1}{b} = c \in (0, 1)$, podemos sustituir $\frac{1}{b^{\eta x}}$ en el orden de infinitésimos crecientes con $c^{\eta x}$, $0 < c < 1$;
2. $\frac{1}{x^\beta} = \left(\frac{1}{x}\right)^\beta$, $\beta \in (0, 1)$, $\frac{1}{x^\gamma} = \left(\frac{1}{x}\right)^\gamma$, $\gamma \geq 1$, entonces podemos reescribir la jerarquía de esos infinitésimos considerando el límite para $x \rightarrow 0$ como sigue:

$$\boxed{x^\beta \prec x^\gamma}, \quad 0 < \beta < \gamma, \quad x \rightarrow 0,$$

es decir: **potencias más grandes de x tienden a cero más rápidamente que potencias más pequeñas de x** para $x \rightarrow 0$ (volver a mirar el gráfico de la sección 2.7 que compara x^2 y x^3 alrededor de 0!).

Veamos unos ejemplos de aplicación de la jerarquías de infinitos e infinitésimos:

- Calcular

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{85 \log x - \frac{\sqrt{x}}{10}}{5\sqrt{x} + 19x^{\frac{1}{4}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

El límite se presenta en forma indeterminada $[\frac{\infty-\infty}{\infty}]$. Como sabemos, la suma de infinitos es asintótica al infinito de orden superior, entonces $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\sqrt{x}}{10}$ y $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 5\sqrt{x}$, entonces, utilizando las propiedades del criterio asintótico, podemos decir que $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\frac{\sqrt{x}}{10}}{5\sqrt{x}} = -\frac{1}{50}$, que es el resultado del límite.

- Calcular

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log 2)^x \cdot x^{40}.$$

Dado que la base de log es $e \simeq 2,7$ y que $2 < e$, $\log 2 \in (0, 1)$, entonces $(\log 2)^x \rightarrow 0$ para $x \rightarrow \infty$, mientras que $x^{40} \rightarrow \infty$ para $x \rightarrow \infty$, por tanto el límite se presenta con la forma de indeterminación $[0 \cdot \infty]$. Podemos reescribir el límite así:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log 2)^x \cdot x^{40} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log 2)^x}{\frac{1}{x^{40}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log 2)^x}{\left(\frac{1}{x}\right)^{40}} = 0$$

en virtud de la jerarquía de infinitésimos, dado que una exponencial con base entre 0 y 1 es un infinitésimo de orden superior (tiende a cero más rápidamente) que una potencia cualquiera de $1/x$ cuando $x \rightarrow +\infty$. Podemos resolver el límite también con esta técnica:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log 2)^x \cdot x^{40} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{40}}{\frac{1}{(\log 2)^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{40}}{\left(\frac{1}{\log 2}\right)^x} = 0$$

esta vez en virtud de la jerarquía de infinitos, dado que la exponencial que aparece en el denominador tiene base $\frac{1}{\log 2} > 1$ y las potencias de x son infinitos de orden inferior que las exponenciales con bases mayores de 1.

En las clases de prácticas y seminarios se verá que **combinando oportunamente desarrollo de Taylor, criterio asintótico y jerarquía de infinitos e infinitésimos, se pueden resolver todos los límites que se presentan en forma indeterminada.**

3.10. Teoremas fundamentales sobre derivadas

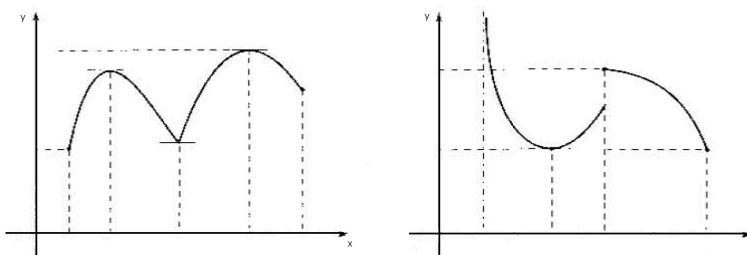
Vamos ahora a examinar unos teoremas fundamentales sobre las derivadas de funciones reales de variable real. Con estos teoremas completaremos el análisis de todos los resultados básicos que sirven para estudiar el comportamiento gráfico de las funciones y los aplicaremos a problemas de optimización.

Comencemos definiendo los extremos de una función.

Def.: Dada $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, y $x_0 \in [a, b]$ decimos que

- x_0 es un punto de **mínimo global** de f si $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in [a, b]$;
- x_0 es un punto de **máximo global** de f si $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in [a, b]$;
- x_0 es un punto de **mínimo local** de f si existe un entorno abierto $U(x_0)$ tal que $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in U(x_0)$;
- x_0 es un punto de **máximo local** de f si existe un entorno abierto $U(x_0)$ tal que $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in U(x_0)$.

Los puntos de máximos y mínimos se llaman, con una palabra, puntos **extremos** de f . Una función puede tener más extremos locales, como se ve en las figuras siguientes.



Se ve que, en un punto extremo, una función puede ser no derivable o hasta no continua. Sin embargo, si estamos en el interior (a, b) del dominio, si f es derivable en $x_0 \in (a, b)$ y x_0 es un extremo, la tangente al gráfico de f en x_0 es horizontal. Este es el contenido geométrico del siguiente teorema.

Teorema de Fermat: sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f derivable en $x_0 \in (a, b)$. Si x_0 es un punto extremo local o global, entonces vale que $f'(x_0) = 0$.

Prueba. Haremos la prueba suponiendo que x_0 sea un punto de mínimo local, si es un máximo la prueba es análoga.

Si x_0 es un mínimo local, existe un entorno abierto $U(x_0)$ tal que, para cada $x \in U(x_0)$ podemos escribir $f(x_0) \leq f(x)$, entonces $f(x) - f(x_0) \geq 0$.

Observamos también que podemos representar x como $x = x_0 + h$, donde h es un número oportuno ≥ 0 . Según el signo de h tenemos:

- $h > 0$, $x - x_0 = x_0 + h - x_0 = h > 0$, entonces

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \implies \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

por el teorema de permanencia del signo;

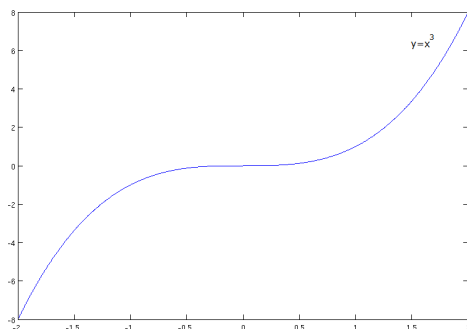
- $h < 0$, $x - x_0 = x_0 + h - x_0 = h < 0$, entonces

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \implies \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

de nuevo por el teorema de permanencia del signo.

Si f es derivable en x_0 , los límites por la izquierda y derecha tienen que coincidir, y esto es posible si y solo si $f'(x_0) = 0$. □

Llamaremos **puntos estacionarios** los puntos donde f' se anula. El teorema de Fermat dice que *el anularse de la derivada, o sea la estacionariedad, es una condición necesaria para que un punto que está en el interior del dominio de f sea un extremo*. La estacionariedad *no es suficiente*, para que un punto sea extremo: un contraejemplo canónico está dado por la función $f(x) = x^3$, cuya derivada se anula en cero: $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$, pero $x = 0$ no es un punto extremo:



3.11. El teorema del valor medio de Lagrange y sus aplicaciones al estudio de la monotonía de una función

Supongamos haber recorrido en coche los 160 km que separan dos puntos A y B en 2 horas. La velocidad media con la cual hemos viajado es 80 km/h. Si hemos viajado de forma continua, sin parar o tener otras irregularidades durante el trayecto, entonces en algún instante $t_0 \in (0, 2\text{horas})$ la velocidad con la cual hemos viajado ha coincidido con la velocidad media de 80 km/h, o sea:

$$\text{velocidad instantánea}(t_0) = \text{velocidad media}$$

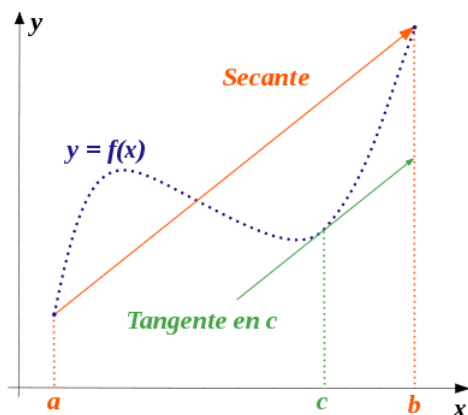
porque si hubiéramos viajado con una velocidad siempre inferior o siempre superior a 80km/h, la media no podría dar 80 km/h!

El teorema del valor medio de Lagrange formaliza matemáticamente esta intuición.

Teorema del valor medio (Lagrange): Si $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

La figura siguiente muestra el significado geométrico del teorema de Lagrange:



en el punto c (puede haber más de un punto!) la recta tangente al gráfico de f es paralela a la recta secante al gráfico de f que conecta $A \equiv (a, f(a))$ y $B \equiv (b, f(b))$.

Prueba: la tesis del teorema de Lagrange es una consecuencia bastante sencilla de los teoremas de Weierstrass y de Fermat. Resulta útil observar que la recta secante al gráfico de f en sus extremos tiene por ecuación

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

e introducir la función auxiliar

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right].$$

Se averigua de forma directa que $g(a) = g(b) = 0$, y que g es continua en $[a, b]$ y derivable en $[a, b]$ (dado que f tiene esas propiedades y g es una combinación lineal de f con una función lineal, que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$). La utilidad de g está contenida en el hecho de que

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

entonces demostrar que f satisface la tesis del teorema de Lagrange equivale a demostrar que existe por lo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, porque, en ese caso, $0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, o sea $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Siendo g continua en un conjunto compacto $[a, b]$, por el teorema de Weierstrass g tiene mínimo y máximo absolutos en $[a, b]$: $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que

$$m = g(x_1) = \min_{x \in [a, b]} \{g(x)\}$$

$$M = g(x_2) = \max_{x \in [a, b]} \{g(x)\}.$$

Si $M = m$, entonces g es constante e igual a 0 en todo $[a, b]$, entonces existen ∞ puntos que satisfacen la condición $g'(x) = 0$.

Si $M > m$, eso significa que por lo menos un valor, entre m y M , es diferente de 0, así que por lo menos un punto, entre x_1 y x_2 , no se encuentra en los extremos de $[a, b]$ y tiene que estar en el interior (a, b) . Ese punto, gracias al teorema de Fermat, tiene que ser estacionario, o sea g' debe anularse en ese punto, que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Vamos a ver un corolario (consecuencia inmediata) del teorema de Lagrange.

Test de monotonía de una función con la sola derivada primera: Sea $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en (a, b) , entonces:

$$f \text{ monotonamente creciente} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

$$f \text{ monotonamente decreciente} \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

$$f \text{ constante} \Leftrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Prueba: Las implicaciones directas ($\Rightarrow$) son obvias por definición de derivada. Supongamos ahora, por ejemplo, que $f'(x) \geq 0$ para cada $x \in (a, b)$, tenemos que demostrar que f es creciente en (a, b) (la prueba con $f'(x) \leq 0$ es análoga). Para hacerlo consideramos una pareja cualquiera de puntos $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$, por el teorema de Lagrange sabemos que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

Dado que hemos hecho la hipótesis de que $f'(c) \geq 0$ y que $x_2 > x_1$, sigue que $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, o sea $f(x_2) \geq f(x_1)$, o sea f es creciente.

Las otras dos implicaciones inversas se demuestran con esta misma técnica.

□

Observación: el test de monotonía se puede usar solo en intervalos conexos del tipo (a, b) , en prácticas veremos que sobre conjuntos más complejos el test no vale.

Los resultados de esta sección nos proporcionan una técnica para buscar extremos de funciones reales de variable real.

Busqueda de extremos:

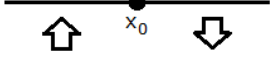
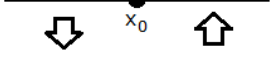
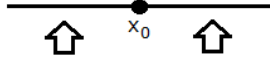
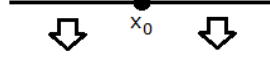
Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, para buscar sus extremos hay que:

1. Calcular los límites de f en los *puntos de frontera* de f , que son *los infinitos* (si D es ilimitado) y los puntos donde f *no es continua*, respectivamente. Si uno de estos límites es $+\infty$, entonces f puede tener solo puntos de máximo local. Análogamente, si uno de estos límites es $-\infty$, entonces f puede tener solo puntos de mínimo local;
2. Calcular f' y averiguar si el dominio de f' coincide o no con el dominio de f . Si existen puntos en D donde f' no está definida, esos puntos son candidatos a ser extremantes de f ;
3. Para determinar la existencia de eventuales puntos extremos en los subintervalos de D donde f es derivable tenemos, antes de todo, que calcular los puntos estacionarios de f , o sea resolver la ecuación

$$f'(x) = 0.$$

4. Los puntos estacionarios no son necesariamente extremos, para averiguar si lo son hay que **estudiar el signo de f'** alrededor de los puntos estacionarios:
 - $f'(x_0) = 0$, $f'(x) < 0$ en un entorno izquierdo de x_0 , $f'(x) > 0$ en un entorno derecho de $x_0 \implies x_0$: punto de **mínimo**;
 - $f'(x_0) = 0$, $f'(x) > 0$ en un entorno izquierdo de x_0 , $f'(x) < 0$ en un entorno derecho de $x_0 \implies x_0$: punto de **máximo**;
 - $f'(x_0) = 0$, $f'(x) > 0$ en un entorno izquierdo y derecho de x_0 , o bien $f'(x) < 0$ en un entorno izquierdo y derecho de $x_0 \implies x_0$: **punto de inflexión con tangente horizontal**.
5. Una vez encontrados todos los puntos extremos, se calcula el valor de f en esos puntos y se determina cuáles son los extremos globales y locales.

La figura siguiente resume el punto 4.

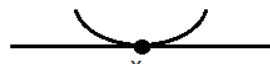
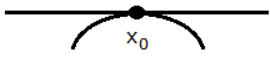
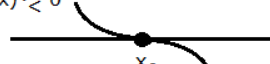
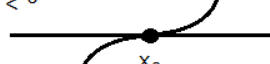
f' + -  x_0 punto de máximo	f' - +  x_0 punto de mínimo
f' + +  x_0 punto de inflexión con tangente horizontal	f' - -  x_0 punto de inflexión con tangente horizontal

$$f'(x_0)=0$$

El estudio del signo de f' alrededor de x_0 podría resultar complicado, por eso resulta útil tener un método alternativo para averiguar si un punto estacionario es un punto extremo. En un punto estacionario x_0 de f , la fórmula de Taylor de f con centro en x_0 no tiene el término lineal porque $f'(x_0) = 0$. Entonces, si f es derivable dos veces en un punto estacionario, el polinomio aproximante de Taylor alrededor de x_0 se escribe así:

$$T_{x_0}^{(2)}(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2, \quad x_0 \text{ punto estacionario}.$$

Como enseña la figura siguiente

$f''(x) > 0$  x_0 punto de mínimo	$f''(x) < 0$  x_0 punto de máximo
$f''(x) \gtrless 0$  x_0 punto de inflexión con tangente horizontal	$f''(x) \gtrless 0$  x_0 punto de inflexión con tangente horizontal

$$f'(x_0)=0$$

el polinomio aproximante de Taylor es la expresión de una parábola con vértice en x_0 cuya concavidad depende del signo de $f''(x_0)$:

- $f''(x_0) > 0$: concavidad hacia arriba;
- $f''(x_0) < 0$: concavidad hacia abajo.

podemos operar el test para saber si un punto estacionario es un punto extremo examinando el signo de la derivada segunda alrededor de x_0 :

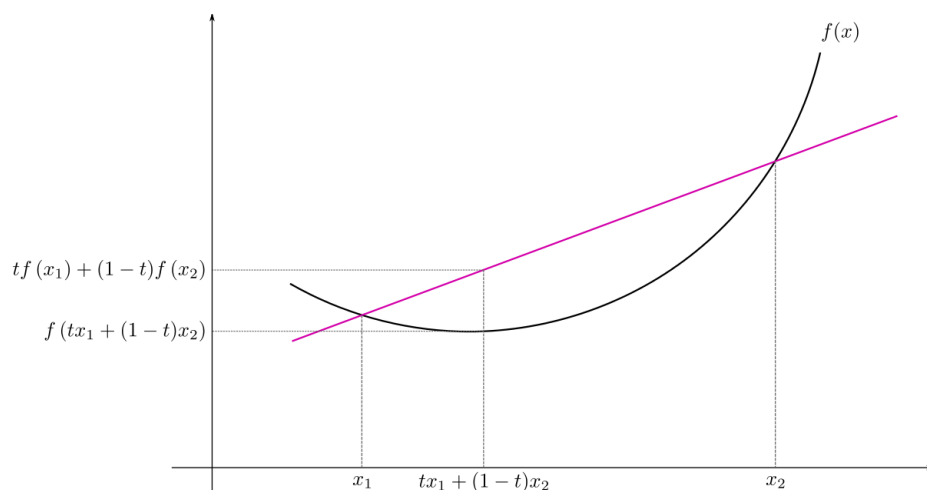
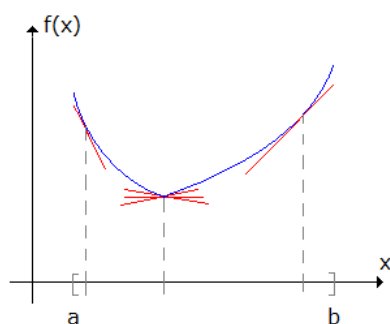
Test punto estacionario con derivada primera y segunda:

1. $f'(x_0) = 0$;
2. $f''(x_0) > 0$ en un entorno de $x_0 \implies x_0$: punto de **mínimo**;
3. $f''(x_0) < 0$ en un entorno de $x_0 \implies x_0$: punto de **máximo**;
4. $f''(x_0) = 0$, pero $f''(x_0)$ cambia signo pasando de la izquierda a la derecha de x_0 : x_0 **punto de inflexión con tangente horizontal**.

Def.: Llamaremos **convexa** o **cóncava hacia arriba** en (a, b) una función f tal que $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$, viceversa, llamaremos **cóncava** o **cóncava hacia abajo** en (a, b) una función f tal que $f''(x) \leq 0 \ \forall x \in (a, b)$.

Geométricamente, una función convexa en un intervalo se caracteriza por tener su gráfico siempre por encima de la recta tangente en cada punto del intervalo mismo, o bien por tener un gráfico que siempre está por debajo de la recta secante en dos puntos cualquiera del intervalo, como muestran las figuras de la pagina siguiente. Obviamente las funciones cóncavas tienen propiedades geométricas opuestas a las convexas.

Se puede demostrar que una función convexa en un intervalo tiene un único punto de mínimo en el intervalo mismo y que una función cóncava en un intervalo tiene un único punto de máximo en el intervalo mismo.



Tenemos todas las informaciones para poder desarrollar el esquema para el estudio gráfico de una función. Aunque los ordenadores pueden proporcionar fácilmente gráficos de funciones, es importante saber estudiar cualitativamente y cuantitativamente el gráfico de una función, dado que a menudo los gráficos contienen informaciones extremadamente importantes, como el estudiante podrá apreciar tanto en las prácticas y seminarios de este curso, como en otras asignaturas de su carrera.

Estudio gráfico de funciones

1. Determinar el **dominio** D de f ;
2. Averiguar si f es **par** o **impar**: en estos casos es suficiente estudiar f para $x \geq 0$ y simetrizar el gráfico con las reglas vistas en las clases de prácticas. Análogamente, si f es **periódica**, es suficiente analizar su gráfico sobre un intervalo de periodicidad, extendiendo sucesivamente el gráfico por periodicidad;
3. Determinar los **ceros** de f , si existen, o sea los puntos donde f cruza el eje horizontal y cuánto vale $f(0)$, si $0 \in D$;
4. Calcular **los límites en la frontera** (finita o infinita) de D , determinando eventualmente la presencia de **asíntotas verticales** y **horizontales**;
5. Puede resultar útil hacer **estimaciones asintóticas en los puntos de frontera** de f : eso proporciona *informaciones cualitativas* sobre la concavidad y la convexidad y a menudo ayuda a darse cuentas de errores e incongruencias que pueden aparecer en el estudio sucesivo debido a cuentas más complicadas. En particular, si f es asintótica a una función lineal para $x \rightarrow \pm\infty$, f puede tener una **asíntota oblicua**, esto pasa cuando

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0},$$

o sea, cuando la distancia entre el gráfico de f y la recta de ecuación $y = mx + q$ va a 0 cuando $x \rightarrow \pm\infty$. El límite arriba resulta equivalente a estos dos límites que, a veces, pueden resultar más fáciles de calcular:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m}, \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = q}.$$

6. Calcular f' y analizar con cuidado los puntos donde f es continua pero no existe f' , esos puntos singulares pueden ser **puntos angulosos**, **cuspides** o puntos con **tangente vertical**, que es útil estudiar con límites por la derecha e izquierda.
7. Determinar los **ceros** de f' , o sea los **puntos estacionarios**, y el signo de f' para saber cuándo f es **creciente** o **decreciente**, si f

tiene puntos extremos y si son **máximos** o **mínimos**. Si el estudio del signo de f' es muy complicado, puede resultar útil el test de monotonía de la derivada segunda;

8. Determinar los **ceros** y el signo de f'' para saber cuándo f es **cóncava** o **convexa** y si tiene **puntos de inflexión**. El estudio del signo de f'' alrededor de los puntos estacionarios puede ayudar a comprender si son puntos extremos. A menudo f'' es demasiado complicada para poder ser estudiada analíticamente, en esos casos solo podemos inferir cualitativamente la concavidad de f a través de las estimaciones asintóticas del punto 5.
9. Se aconseja dibujar el gráfico paso por paso, introduciendo cada vez las informaciones que cada punto proporciona. Si se ve que hay contradicciones entre estas informaciones hay que verificar que las cuentas sean correctas. Por eso insistimos sobre el punto 5. del análisis asintótico en los extremos, que a menudo ayuda a mantener una coherencia global en el estudio gráfico de la función.

Se ve que, en el esquema del estudio gráfico de la función, hay tres puntos, precisamente 3, 7 y 8, en los cuales tenemos que determinar los ceros de f , f' y f'' , respectivamente. Solo en casos muy sencillos es posible resolver las ecuaciones (no lineales) que corresponden a las condiciones de determinación de los ceros. Esta observación motiva la discusión de un método extremadamente útil a la hora de encontrar ceros de funciones, el método de Newton, que será el tema del próximo capítulo.

3.11.1. La fórmula de Taylor con resto de Lagrange

Otra consecuencia notable del teorema del valor medio de Lagrange es la posibilidad de escribir el desarrollo de Taylor con un resto diferente con respecto a lo de Peano. Para entender porque es suficiente re-escribir la tesis del teorema de Lagrange así: $f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$, pero si ponemos $a = x_0$ y $b = x = x_0 + h$, obtenemos la siguiente aproximación lineal de f en $x_0 + h$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0),$$

con $\xi \in (x_0, x_0 + h)$. Esta fórmula establece una linealización de f (bajo las hipótesis del teorema de Lagrange obviamente) alternativa al desarrollo de Taylor de orden 1 con resto de Peano y se llama fórmula de Taylor con centro en x_0 y resto de Lagrange.

También esta fórmula se puede extender a una aproximación polinomial más precisa, puesto que la función f satisfaga las condiciones de derivabilidad contenidas en el siguiente teorema.

Teorema: si $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable $n + 1$ veces en (a, b) con derivadas continuas, entonces, para cada pareja de puntos $x, x_0 \in (a, b)$, existe ξ contenido entre x y x_0 tal que:

Fórmula (o desarrollo) de Taylor hasta el orden n con centro en x_0 con resto de Lagrange:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \\ & \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Es importante subrayar la diferencia en los dominios de aplicación de las dos fórmulas de Taylor: cuando se considera el resto de Peano, x pertenece a un entorno pequeño del centro x_0 ; si se considera el resto de Lagrange x puede variar en todo (a, b) . Podemos resumir estas consideraciones diciendo que *la fórmula de Taylor con resto de Peano es una fórmula con validez local, mientras la fórmula de Taylor con resto de Lagrange es una fórmula con validez global.*

La razón que está a la base de esta diferencia es que la fórmula de Taylor con resto de Peano se funda en el concepto de linealización local, que involucra solo un entorno pequeño de un punto, mientras que la fórmula de Taylor con resto de Lagrange se funda en el teorema de Lagrange que involucra desplazamientos finitos de la variable independiente.

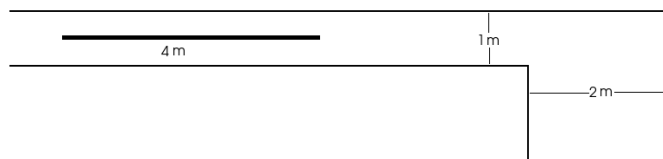
3.12. La optimización

Se llama optimización un campo muy amplio de las matemáticas dedicado a la búsqueda de extremos de funciones u objetos más complicados llamados *funcionales*. La optimización tiene un radio de aplicación prácticamente universal.

En el curso de cálculo del segundo trimestre examinaremos las funciones reales de varias variables y eso nos dará la oportunidad de mostrar aplicaciones de optimización muy interesantes. Sin embargo, ya con funciones reales de una sola variable real podemos discutir un problema de optimización que viene de la vida práctica y que dará una idea de la importancia de las técnicas de optimización en matemática aplicada. Veremos otros ejemplos en las clases de prácticas y seminarios.

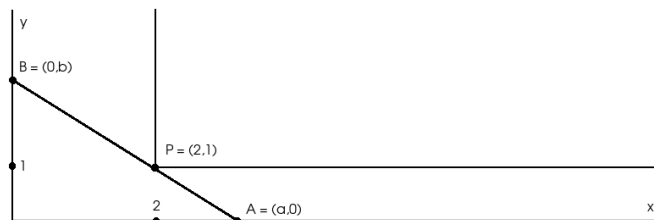
3.13. El problema del fontanero

Supongamos que un palo haya entrado por error en una cañería, como en la figura aquí debajo:



un fontanero se pregunta si el palo podrá pasar por la cañería o si se quedará atascado.

Vamos a demostrar que podemos formular esta situación como un problema de optimización y resolverlo encontrando el valor extremo de una función oportuna. Antes de todo, giramos 180 grados la figura para visualizar los ejes de la forma canonica, como en la figura siguiente



en la cual se ve claramente que el palo pasa a través de la cañería si y solo si la longitud mínima del segmento $\overline{AB}$ es ≥ 4 . La longitud L de $\overline{AB}$,

gracias al teorema de Pitágoras, se puede escribir como

$$L(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2},$$

L es una función de dos variables reales, a y b , que todavía no hemos aprendido a manejar. Por eso, tenemos que expresar una variable en función de la otra, así que L se quedará como una función de una sola variable real.

Para hacer esto resulta conveniente escribir la recta que pasa por A y P , que tiene ecuación $y(x) = y_A + \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A}(x - x_A)$, sustituyendo $(x_A, y_A) = (a, 0)$ y $(x_P, y_P) = (2, 1)$ obtenemos $y(x) = \frac{x-a}{2-a}$.

En la figura se ve que esta recta intersecta el eje y con ordenada $y = b$ (y abscisa $x = 0$ obviamente), por tanto: $y(0) = b = \frac{-a}{2-a} = \frac{a}{a-2}$.

Ahora introducimos la expresión de b en función de a en la fórmula de la longitud del segmento $\overline{AB}$ obteniendo una función de una variable:

$$L(a) = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{a-2}\right)^2}$$

que tiene sentido cuando $a > 2$ (véase la figura arriba). Derivando L con respecto a a tenemos:

$$L'(a) = \frac{2a \left(1 - \frac{2}{(a-2)^3}\right)}{2\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{a-2}\right)^2}}.$$

El denominador de $L'(a)$ es siempre positivo, entonces su signo está dado por el signo del numerador. Con cuentas directas obtenemos que

$$L'(a) : \begin{cases} < 0 & \text{si } 2 < a < \sqrt[3]{2} + 2 \\ = 0 & \text{si } a = \sqrt[3]{2} + 2 \\ > 0 & \text{si } a > \sqrt[3]{2} + 2. \end{cases}$$

entonces $a^* = \sqrt[3]{2} + 2$ es un punto de mínimo para $L(a)$. Si $L(a^*)$ es mayor de 4, el palo puede pasar por la cañería, si no, el palo se queda atrapado. Afortunadamente para el fontanero $L(a^*) \simeq 4,16$ y el palo podrá pasar por la cañería.

Capítulo 4

El método de Newton 1-D

El método de Newton es un algoritmo numérico que *sirve para encontrar los ceros de una función*. Newton utilizó por primera vez una técnica similar a la que presentaremos en el 1669 para aproximar las raíces de un polinomio, extendiendo ideas ya presentes en los documentos matemáticos de Persia y Babilonia relativos a la aproximación de raíces cuadradas. Aquí presentaremos la versión 1-D, es decir, para funciones reales de una variable real. Como veremos, el método de Newton tiene también aplicaciones a la resolución de sistemas no lineales y a problemas de optimización.

4.1. Construcción del método de Newton 1-D

La idea principal del método de Newton consiste en observar que los ceros de las funciones lineales son extremadamente fáciles de calcular: $f(x) = ax + b = 0$ si y solo si $x = -b/a$. Si una función es derivable, sabemos que, en cada punto x^0 de su dominio, puede ser *linealizada a través del proceso de diferenciación*: en un entorno suficientemente pequeño de x^0 la función f coincide con su recta tangente (o polinomio de Taylor de orden 1) a menos de infinitésimos de orden superior (con un resto que tiende a cero cuando nos aproximamos a x^0). Dado que la aproximación de f por su recta tangente es válida solo localmente, sería esperar demasiado que el cero de f coincidiera con el cero de su recta tangente; sin embargo, veremos que si se itera la linealización de f en los puntos determinados por los ceros de sus rectas tangentes, se aproximará cada vez mejor el valor del cero de f . Esto explica por qué el método de Newton se suele llamar también *método de las tangentes* o *método de las linealizaciones iteradas*.

Comencemos presentando la idea geométrica subyacente al método con

la figura 4.1.

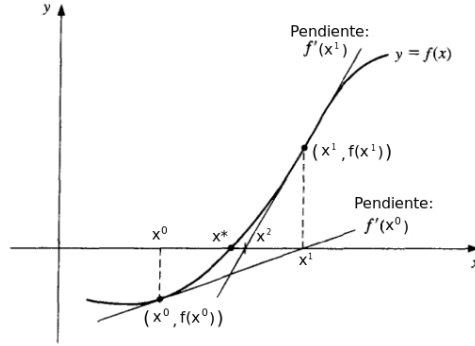


Figura 4.1: Idea geométrica del método de Newton.

Consideremos una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y un punto inicial $x^0 \in D$, elegido arbitrariamente en el dominio de f . En el punto $(x^0, f(x^0))$ la recta tangente a la gráfica de f tiene pendiente $f'(x^0)$ y tiene un cero en el punto x^1 donde corta el eje horizontal; a su vez, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x^1, f(x^1))$ tiene pendiente $f'(x^1)$ y tiene un cero en x^2 . Como muestra la figura 4.1, los puntos $x^0, x^1, x^2, \dots$ definen una sucesión de valores $\{x^k\}_{k \geq 0}$ que se acercan al punto x^* en el cual la función f se anula: $f(x^*) = 0$, ya que x^* es un cero de f .

El punto x^1 es el punto en el cual la recta tangente al gráfico de f en $(x^0, f(x^0))$ cruza el eje horizontal, para determinar x^1 recordemos que esa recta coincide con el polinomio de Taylor de orden 1 con centro en x^0 , que tiene expresión $T_{x^0}(x) = f(x^0) + f'(x^0)(x - x^0)$, entonces $T_{x^0}(x^1) = 0$ si y solo si $f(x^0) + f'(x^0)(x^1 - x^0) = 0$. Resolviendo con respecto a x^1 obtenemos $x^1 = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)}$, iterando este razonamiento llegamos a poder expresar el cruce de la k -ésima recta tangente con el eje horizontal como sigue:

$$x^k = x^{k-1} - \frac{f(x^{k-1})}{f'(x^{k-1})},$$

que es el punto determinado por la k -ésima iteración del método de Newton 1-D.

4.2. Aplicación al cálculo de los valores decimales de las raíces cuadradas

Presentamos una aplicación notable del método de Newton 1-D: el cálculo de raíces cuadradas.

Vamos a ver cómo se puede determinar por ejemplo el valor decimal de $\sqrt{3/4}$, que es $0,8660\dots$ con el esquema de Newton. Tenemos que interpretar $\sqrt{3/4}$ como el cero de una función, para ello definimos $x = \sqrt{3/4}$ y definimos una función de x que tenga $\sqrt{3/4}$ como cero. No podemos definir $f(x) = x - \sqrt{3/4}$ porque su derivada vale 1, entonces la recta tangente tiene siempre la misma pendiente y no hay manera de converger iterativamente a $\sqrt{3/4}$. Para evitar este problema podemos elevar al cuadrado la definición de x obteniendo $x^2 = 3/4$, o sea $4x^2 - 3 = 0$. Si definimos $f(x) = 4x^2 - 3$, los ceros de f corresponden a $x = \pm\sqrt{3/4}$. Vamos a aplicar el método de Newton: necesitamos la derivada primera de f , que es $f'(x) = 8x$, y un punto inicial. Dado que $3/4$ está entre 0 y 1 y dado que la raíz cuadrada de un número que está entre 0 y 1 sigue en este intervalo, elegimos por ejemplo $x^0 = 0,5$ para no estar demasiado lejos de la solución y converger más rápidamente.

- Iteración 1:

$$x^1 = 0,5 - \frac{f(0,5)}{f'(0,5)} = 0,5 - \frac{-2}{4} = 1;$$

- Iteración 2:

$$x^2 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \simeq 0,875;$$

- Iteración 3:

$$x^3 = \frac{7}{8} - \frac{f(\frac{7}{8})}{f'(\frac{7}{8})} \simeq 0,8660.$$

4.3. Criterios de parada del algoritmo de Newton

Una pregunta natural que surge a la hora de aplicar el método de Newton es: ¿cuál es la precisión hasta la cual queremos determinar los ceros de f para hacer terminar las iteraciones del algoritmo de Newton? Para contestar a esta pregunta observemos que a medida que nos acercamos a x^* la diferencia entre los puntos x^k y x^{k-1} va disminuyendo y, además, los valores que toma f en los puntos x^k van acercándose a 0. Para medir la distancia relativa entre

los puntos de la sucesión $\{x^k\}_{k \geq 0}$ se suele utilizar el *error relativo entre dos iteraciones sucesivas*:

$$E_k \equiv \frac{|x^k - x^{k-1}|}{|x^k|}.$$

Se suelen parar las iteraciones del algoritmo de Newton después de un número de iteraciones $\bar{k}$ tales que $x^{\bar{k}}$ y $x^{\bar{k}-1}$ sean cercanas. Formalmente se puede expresar como sigue:

$$E_{\bar{k}} \leq T,$$

siendo $T > 0$ un valor de *tolerancia* que el usuario del algoritmo elige según sus exigencias de precisión. Otra opción sería parar el algoritmo de Newton después de un número de iteraciones $\bar{k}$ tales que

$$|f(x^{\bar{k}})| \leq T,$$

es decir, cuando $|f|$ toma valores entre 0 y el valor de tolerancia T .

Un tercer criterio de parada consiste en definir un número máximo de iteraciones $k_{\text{máx}}$ y elegir $x^{k_{\text{máx}}}$ como solución (aproximada) proporcionada por el método de Newton. Normalmente se fija $k_{\text{máx}}$ a un valor suficientemente alto para asegurarnos de llegar a una solución con buena precisión en caso de convergencia del algoritmo y que evite que el algoritmo itere de forma infinita en caso de no convergencia de éste. En la próxima sección examinaremos cuáles son las condiciones de f y del valor inicial x^0 que nos aseguran la convergencia.

4.4. Condiciones de convergencia del algoritmo de Newton

El algoritmo de Newton puede converger al cero o no, como muestra el siguiente ejemplo. Consideremos la función $f(x) = x^3 - 2x + 2$: como se ve en la figura aquí debajo, si elegimos como puntos iniciales $x^0 = 0$ o $x^0 = 1$, las tangentes oscilan entre dos rectas que cruzan el eje horizontal en $x = 1$ y $x = 0$, respectivamente, entonces nunca convergiremos al cero de f .

Además, una función puede tener diferentes ceros, por lo tanto es necesario un criterio para establecer bajo qué condiciones podemos garantizar la convergencia del algoritmo de Newton a un determinado cero de una función.

Para ello, es conveniente definir el *error absoluto entre x^k y el cero x^** como:

$$e_k \equiv x^* - x^k, \quad \forall k \geq 0.$$

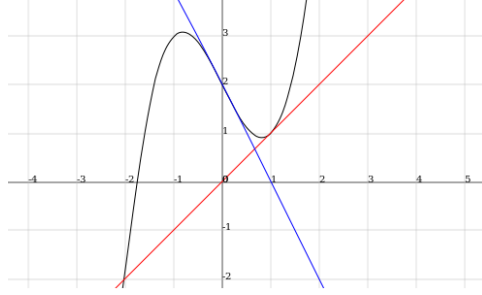


Figura 4.2: Oscilaciones en el método de Newton.

Está claro que el algoritmo de Newton converge si y solo si se cumple que

$$|e_{k+1}| < |e_k| \quad \forall k \geq 0$$

porque en ese caso el valor absoluto del error disminuye en cada iteración, hasta llegar a determinar el cero x^* con la precisión deseada.

Queremos utilizar la condición $|e_{k+1}| < |e_k|$ para determinar una restricción sobre el valor inicial x^0 que nos garantice la convergencia del algoritmo de Newton.

Empecemos definiendo el **intervalo de búsqueda** del cero x^* de f como sigue: $I = [x^* - x^0, x^* + x^0]$ y supongamos que f sea dos veces derivable con derivadas continuas en I . Bajo esta última condición podemos escribir, para cada $x \in I$, el desarrollo de Taylor de f centrado en $x^k \in I$ hasta el orden 1 con resto de Lagrange para cada paso k del algoritmo:

$$f(x) = f(x^k) + f'(x^k)(x - x^k) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x^k)^2, \quad \text{con } |\xi - x^k| < |x - x^k|.$$

Dado que este desarrollo vale para cada $x \in I$, podemos seleccionar en particular $x = x^*$, en este caso el desarrollo de Taylor se escribe:

$$f(x^*) = f(x^k) + f'(x^k)(x^* - x^k) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x^* - x^k)^2, \quad \text{con } |\xi - x^k| < |x^* - x^k|.$$

Si tenemos en consideración que $f(x^*) = 0$ y dividimos ambos miembros por $f'(x^k)$ (suponiendo que $f'(x^k) \neq 0$), obtenemos

$$0 = \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} + x^* - x^k + \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x^k)} (x^* - x^k)^2,$$

es decir

$$x^* - x^k + \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} = -\frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x^k)} (x^* - x^k)^2.$$

Ahora usamos el hecho de que $x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$ (dado por el paso básico de las iteraciones del método de Newton) para reescribir la última ecuación como:

$$x^* - x^{k+1} = -\frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x^k)} (x^* - x^k)^2.$$

La ventaja de esta última fórmula es que pone en evidencia la relación entre el error e_{k+1} y el error e_k :

$$e_{k+1} = -\frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x^k)} e_k^2,$$

tomando el valor absoluto en ambos lados:

$$|e_{k+1}| = \left| \frac{f''(\xi)}{2f'(x^k)} \right| |e_k|^2, \quad (4.1)$$

lo cual expresa el hecho de que el error absoluto e en el paso $k+1$ es proporcional al cuadrado del error absoluto e en el paso k , con coeficiente de proporcionalidad dado por $\left| \frac{f''(\xi)}{2f'(x^k)} \right|$. El valor máximo que puede tomar este coeficiente es¹:

$$M \equiv \max_{t \in I} \frac{1}{2} \left| \frac{f''(t)}{f'(t)} \right|,$$

donde, por sencillez, hemos usado la variable genérica $t \in I$ en lugar de las dos variables $\xi, x^k \in I$. Entonces la ecuación (4.1) implica que:

$$|e_{k+1}| \leq M |e_k|^2 = M |e_k| |e_k|, \quad (4.2)$$

por lo que se cumplirá la condición necesaria y suficiente de convergencia, $|e_{k+1}| < |e_k|$, si y solo si $M |e_k| < 1$. Para que M sea finito necesitamos que $f'(t) \neq 0 \forall t \in I$ (en particular es necesario que $f'(x^*) \neq 0$). Si se verifica esta condición, podemos garantizar que la magnitud del error absoluto e decrece en cada iteración (es decir, que $|e_{k+1}| < |e_k|$) siempre que:

$$M < \frac{1}{|e_k|},$$

pero como $|e_{k+1}| < |e_k|$, es suficiente pedir que

$$M < \frac{1}{|e_0|} = \frac{1}{|x^* - x^0|}, \quad (4.3)$$

(aquí es importante que el símbolo de desigualdad $<$ sea *estricto*). Comprobemos esta afirmación para las primeras dos iteraciones:

¹Recordar que, para maximizar una fracción, hay que maximizar el numerador y minimizar el denominador.

- Iteración 1: $k = 0$. Sustituyendo $k = 0$ en la ecuación (4.2) tenemos que $|e_1| \leq M|e_0|^2$, entonces, si M cumple con la propiedad (4.3), $|e_1| < \frac{|e_0|^2}{|e_0|} = |e_0|$;
- Iteración 2: $k = 1$. Sustituyendo $k = 1$ en la ecuación (4.2) tenemos que $|e_2| \leq M|e_1|^2$ entonces, si M cumple con la propiedad (4.3) y teniendo en consideración que $|e_1| < |e_0|$: $|e_2| < \frac{|e_1|^2}{|e_0|} < \frac{|e_1|^2}{|e_1|} = |e_1|$;

para las iteraciones sucesivas valen las mismas consideraciones.

Resumiendo, podemos garantizar la convergencia del método de Newton cuando se cumplen las siguientes condiciones:

1. f es derivable con derivadas continuas hasta el orden 2 en el intervalo I de búsqueda del cero x^* de f ;
2. $f'(t) \neq 0 \forall t \in I$ (en particular $f'(x^*) \neq 0$);
3. El punto inicial x^0 está suficientemente cerca de x^* ; utilizando la definición de M y la ecuación (4.3) equivale a que:

$$\boxed{|x^* - x^0| < \frac{2}{\max_{t \in I} \left| \frac{f''(t)}{f'(t)} \right|}}.$$

La última condición dice que si f' toma valores muy pequeños y/o f'' toma valores muy grandes, tenemos que elegir x^0 con cuidado (un x^0 lo suficientemente próximo a la solución).

Observación: si tanto f' como f'' son crecientes y positivas en el intervalo de búsqueda I e $I = [a, b]$, entonces, dado que una fracción se maximiza maximizando el numerador y minimizando el denominador, tenemos que

$$\boxed{\max_{t \in I} \left| \frac{f''(t)}{f'(t)} \right| = \frac{f''(b)}{f'(a)}} \quad f', f'' \text{ crecientes y positivas en } [a, b]$$

en cambio, si tanto f' como f'' son positivas en $I = [a, b]$ pero decrecientes, entonces

$$\boxed{\max_{t \in I} \left| \frac{f''(t)}{f'(t)} \right| = \frac{f''(a)}{f'(b)}} \quad f', f'' \text{ decrecientes y positivas en } [a, b].$$

Dejamos como ejercicio mental razonar sobre el valor del máximo cuando f' y f'' sean monótonas y negativas.

El algoritmo de Newton, cuando converge, lo hace *cuadráticamente*, es decir, la distancia entre el cero de f y la solución proporcionada en el paso k decrece cuadráticamente a medida que aumentamos k . Esa es una de las propiedades más importantes del *método de Newton*: *si converge, lo hace muy rápidamente*. La contrapartida es que tienen que cumplirse las condiciones de f especificadas anteriormente y *el punto inicial x^0 no tiene que estar demasiado lejos del cero x^** . Esto hace que sea más *difícil* poder *aplicar el método de Newton* a problemas donde *no se conoce el intervalo de valores probables* donde se puede encontrar x^* . Por esa razón, un estudio cualitativo cuidadoso antes de aplicar el método de Newton puede resultar extremadamente útil, como veremos en el ejemplo siguiente.

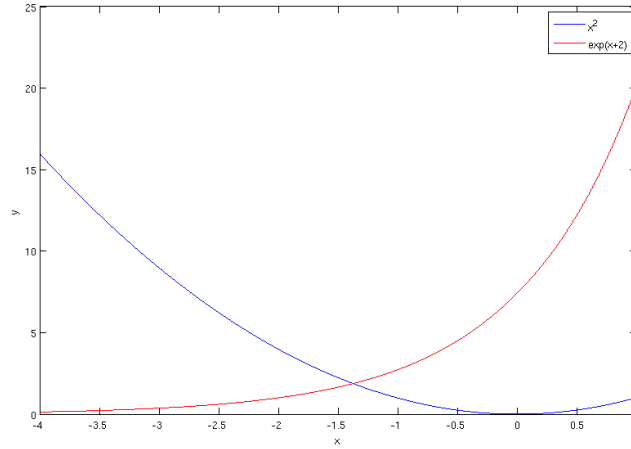
4.5. Aplicación al cálculo aproximado de los puntos de intersección entre gráficos de funciones

El método de Newton resulta particularmente útil a la hora de aproximar la posición de los puntos de intersección entre gráficos de dos funciones. Sean f_1 y f_2 dos funciones derivables, en los valores x por los cuales los gráficos de f_1 y f_2 se intersectan tendremos obviamente $f_1(x) = f_2(x)$, por lo tanto encontrar las intersecciones entre f_1 y f_2 es equivalente a encontrar los ceros de la función $F(x) = f_1(x) - f_2(x)$, que se puede hacer con el método de Newton.

Veamos una aplicación: supongamos de querer estudiar gráficamente la función $f(x) = e^{x+2} - \frac{1}{3}x^3$. Sabemos que los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f se determinan a través del signo de la derivada primera de f , o sea $f'(x) = e^{x+2} - x^2$. La expresión analítica de $f'(x)$ no es trivial y la inecuación $f'(x) \geq 0$, o sea $e^{x+2} \geq x^2$, que determina los valores de x por los cuales f es creciente o decreciente, respectivamente, no tiene una solución analítica explícita. En estos casos es aconsejable actuar así:

- Se hace una comparación gráfica entre las funciones e^{x+2} y x^2 para obtener una idea *cualitativa* de la posición de los puntos de intersección. Dibujando los gráficos de las dos funciones es muy fácil darse cuenta de que solo puede existir una intersección y que la abscisa x de esta intersección tiene que estar entre -2 y 0 (véase la figura debajo), porque en $x = -2$: $e^{-2+2} = 1 < x^2 = 4$, mientras que en $x = 0$: $e^{0+2} = e^2 > 0^2 = 0$, y *por continuidad* tiene que existir un valor

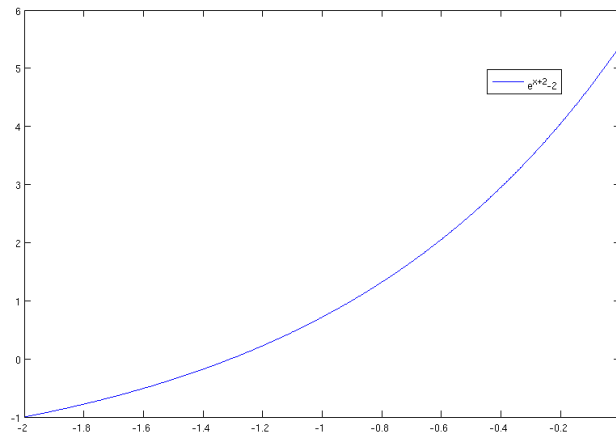
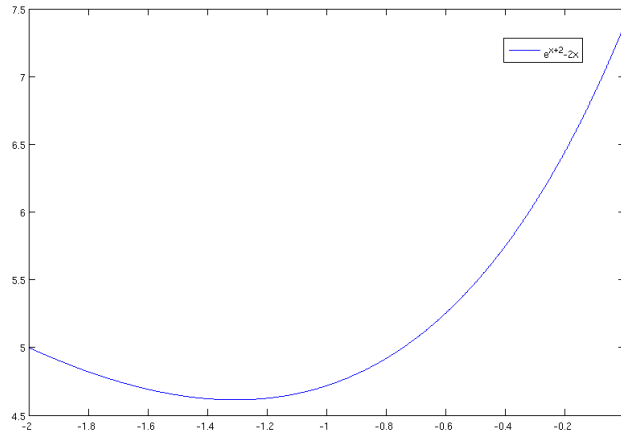
$x \in [-2, 0]$ donde $e^{x+2} = x^2$;



- Aplicamos ahora el método de Newton a la función $F(x) = e^{x+2} - x^2$. Para garantizar que el método de Newton pueda converger a la solución que buscamos tenemos que seleccionar con cuidado el valor inicial x^0 . Sabiendo que el intervalo de búsqueda es $I = [-2, 0]$, utilizamos la condición que acabamos de determinar para escoger un valor inicial. Tenemos que $F'(x) = e^{x+2} - 2x$ y $F''(x) = e^{x+2} - 2$, F' es suma de una función creciente y de una decreciente, mientras que F'' es creciente pero no positiva en todo el intervalo de búsqueda, así que para calcular

$$\max_{x \in [-2, 0]} \left| \frac{F''(x)}{F'(x)} \right|$$

tenemos que estudiar F' y F'' gráficamente en $[-2, 0]$:



F' tiene un mínimo en $x = \log 2 - 2$ en el cual toma el valor de $4,61 > 0$, entonces:

$$\max_{x \in [-2, 0]} \left| \frac{F''(x)}{F'(x)} \right| = \frac{F''(0)}{F'(\log 2 - 2)} = \frac{e^2 - 1}{4,16}.$$

Entonces la condición de convergencia se escribe como:

$$|x^0 - x^*| < \frac{2}{\frac{e^2-1}{4,16}} = \frac{8,32}{e^2 - 1} \simeq 1,3,$$

eso nos dice que si escogemos un valor inicial x^0 que está alejado del punto de intersección x^* por menos de 1,3, seguramente el algoritmo

de Newton convergerá a x^* . Dado que el intervalo de búsqueda es $I = [-2, 0]$, es suficiente escoger $x^0 = -1$ para estar seguros que la condición valga. Inicializando el algoritmo de Newton con $x^0 = -1$ y tomando como valor de tolerancia $0,01$, encontramos como salida final $x^* = -1,37$. Dado que $e^{x+2} > x^2$ solo cuando $x > -1,37$ sigue que $f(x)$ es creciente para cada $x \in (-1,37, +\infty)$, decreciente para cada $x \in (-\infty, -1,37)$ y que $x = -1,37$ es un punto de mínimo absoluto para f .

Capítulo 5

Integrales

Cuando discutimos las motivaciones para introducir el concepto de límite, vimos que uno de los problemas que empujaron al desarrollo del cálculo diferencial fue el cálculo del área de una figura con borde curvilíneo, problema resuelto gracias al concepto de integral, al cual vamos a dedicar este capítulo.

Las áreas por debajo de curvas particulares como parábolas o hipérbolas ya se conocían gracias a los trabajos de Arquímedes, Fermat y Mercator.

La formalización de la construcción geométrica que permite calcular el área por debajo del gráfico de una función se debe a Cauchy y a uno de los matemáticos más importantes de la historia, el alemán *Bernhard Riemann* (1826-1866).

5.1. Definición de la integral de Riemann

Consideramos una función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y operamos una **partición** de $[a, b]$ en n sub-intervalos:



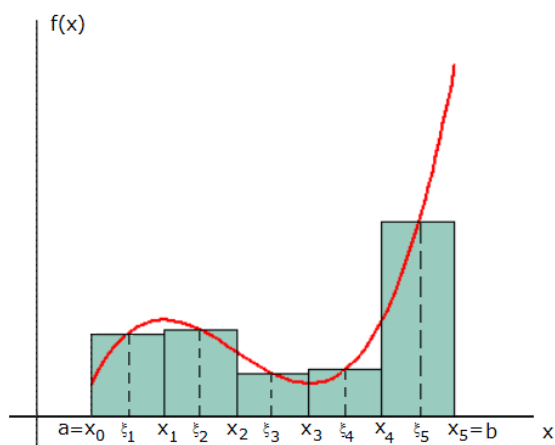
los extremos de los n sub-intervalos son $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$. La distancia entre estos puntos es constante y vale

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

entonces $x_j = a + j\Delta x$, $j = 0, \dots, n$.

En cada uno de los sub-intervalos $[x_j, x_{j+1}]$ elegimos un punto arbitrario ξ_j , por ejemplo el punto medio (pero podría ser cualquier otro punto,

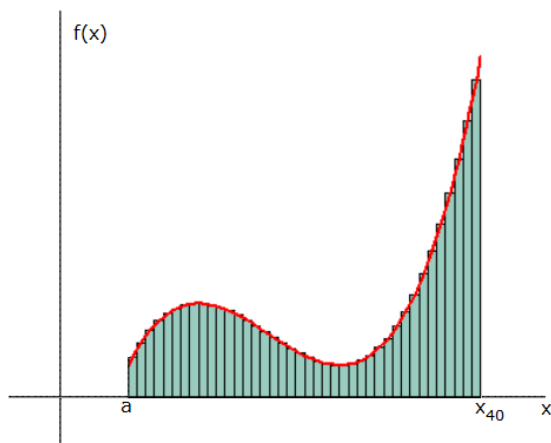
también los extremos), y evaluamos la función f en ξ_j , como en la figura siguiente. .



De esta manera, podemos definir la suma de **Cauchy-Riemann** como:

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)\Delta x.$$

Si operamos una partición más fina de $[a, b]$, por ejemplo esta



la posición de los ξ_j variará, y con ella el valor de f calculada en esos puntos y la distancia Δx entre los extremos de los sub-intervalos. El siguiente teorema, según Riemann, dice que, si f es continua, existe el límite de n

tendiendo a infinito, independientemente de la elección de los ξ_j , y coincide con el área por debajo del gráfico de f .

Teorema de la integral de Riemann: si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua entonces $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, este límite es independiente de la elección de los puntos ξ_j en cada paso de la partición. Definimos integral de f entre a y b como:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \Delta x.$$

La notación del integral se debe a Leibnitz (que ya hemos visto que era ingenioso en sus elecciones de la notación!). El símbolo $\int$, una S estirada, se refiere al hecho de que la integral no es nada más que un límite de sumas oportunas. El diferencial dx , en cambio, recuerda la base Δx de los rectángulos aproximando el área por debajo del gráfico de la función en cada intervalo $[x_j, x_{j+1}]$. Cuando $n \rightarrow \infty$ esa base Δx se vuelve infinitésima y se representa como dx .

Intuitivamente, podemos pensar en la integral como a la suma de infinitas áreas elementales de rectángulos con base infinitésima y altura dada por el valor de la función f en todos los puntos x que recorren el intervalo $[a, b]$.

La genialidad de la notación de Leibnitz está en el hecho de que *el símbolo que denota la integral sintetiza toda la construcción con la cual se llega a la integral misma!*

Obviamente

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall f$$

y, usando argumentos de simetría, se puede demostrar que

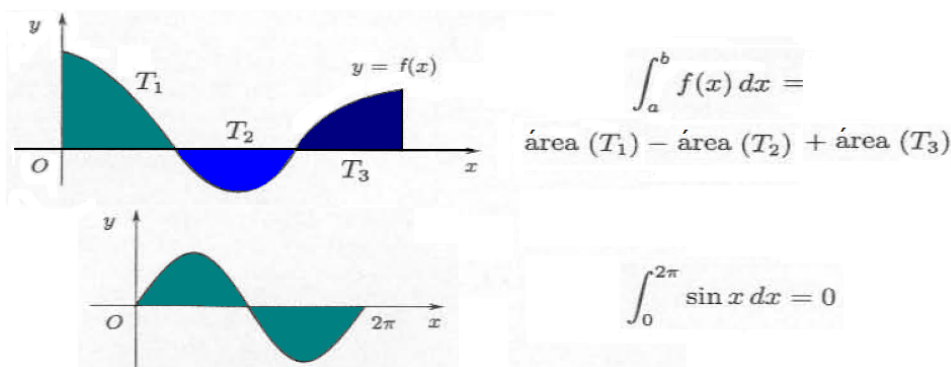
$$f \text{ par} \implies \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx,$$

$$f \text{ impar} \implies \int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Nomenclatura:

- a, b : **extremo inferior y superior** de la integral, respectivamente;
- $f(x)$: **función integranda**, x : **variable de integración**.

Observación importante: si f cambia de signo (o sea pasa de ser positiva a negativa, o viceversa), $\int_a^b f(x)dx$ representa una **suma de áreas con signo**, por eso *la integral puede también ser negativa o nula*, como muestra la figura siguiente (autoexplicativa).



Se suele decir que **la variable de integración es ‘muda’**, o sea, el símbolo usado para denotarla no es importante:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \text{etc.}$$

de la misma forma que escribir $\sum_{j=1}^3 a_j = \sum_{i=1}^3 a_i = a_1 + a_2 + a_3$.

Por razones que serán más claras después, se suele llamar $\int_a^b f(x)dx$ también **integral definida** de a a b . Observamos que si integramos la función constante $\mathbf{1}(x) \equiv 1$, obtenemos, por definición de $\int$, la longitud del intervalo $[a, b]$:

$$\boxed{\int_a^b dx = b - a}.$$

5.2. Propiedades de la integral

Las propiedades de las integrales siguen de las análogas propiedades de los límites:

- **Linealidad:** dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx ;$$

- Si $a \leq c \leq b$,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx ;$$

- Se usa la siguiente convención: si $a < b$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx ;$$

- Monotonía con respecto a la función integrada:

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x) dx \geq 0 ;$$

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx ;$$

- Para cualquier f continua:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx .$$

5.3. Valor medio y valor eficaz de una función

La media aritmética de un conjunto finito de valores viene dada por la suma de esos valores dividido por el número de valores. Si queremos calcular la media de una magnitud que varía de forma continua tenemos que generalizar la definición antecedente con el uso de las integrales como en la definición siguiente.

Def.: sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Llamamos,

$$f_M = \textbf{valor medio de } f \text{ en } [a, b] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx;$$

$$f_E = \textbf{valor eficaz de } f \text{ en } [a, b] = \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^2 dx \right)^{1/2}.$$

El estudiante podrá apreciar el interés en definir el valor eficaz de esa forma durante los *cursos de ondas y electromagnetismo y teoría de señales*.

El siguiente teorema dice que existe siempre un punto $c \in [a, b]$ en el cual f toma su valor medio en $[a, b]$.

Teorema de la media o del valor medio para integrales: sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Prueba: f es continua en un intervalo compacto de $\mathbb{R}$, entonces, en virtud del teorema de Weierstrass, tiene un mínimo m y un máximo M absolutos. Gracias a la propiedad de monotonía tenemos que

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b m dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b M dx = M,$$

entonces $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ está contenido entre el mínimo y el máximo valor que f toma en $[a, b]$. Siendo f continua, en virtud del teorema de los valores intermedios tiene que existir $c \in [a, b]$ tal que $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$. $\square$

5.4. El teorema fundamental del cálculo diferencial

Como veremos más adelante, la definición de integral que hemos dado se presta muy bien para encontrar fórmulas de aproximación numérica de las integrales. Sin embargo, el cálculo analítico (o sea a través de funciones elementales) de las integrales se hace de manera completamente diferente y necesita el concepto de primitiva o anti-derivada.

Def.: se dice que la función $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, G derivable en $[a, b]$, es una **primitiva** (o anti-derivada) de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en $[a, b]$ si

$$\boxed{G'(x) = f(x)} \quad \forall x \in [a, b].$$

Entonces, la primitiva de una función f en un intervalo $[a, b]$ es una función derivable G cuya derivada coincide con f en cada punto de $[a, b]$. Por ejemplo, si $f(x) = 2x$ tenemos que preguntarnos: ‘¿cuál es la función cuya derivada vale $2x$?’ la respuesta es x^2 , entonces $G(x) = x^2$ es la primitiva de $f(x) = 2x$ en todo $\mathbb{R}$.

Observación: Como la derivada de una constante es cero, dada la primitiva $G(x)$ de la función $f(x)$, también $G(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, es una primitiva de la misma función: $(G(x) + c)' = G'(x) = f(x)$.

Por otro lado, si G_1 y G_2 son dos primitivas cualquiera de $f(x)$ en un intervalo, entonces $G_1'(x) - G_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ para cada punto del intervalo. Pero $G_1'(x) - G_2'(x) = (G_1 - G_2)'(x) = 0$, entonces la función diferencia $G_1 - G_2$ tiene derivada nula en todos los puntos de un intervalo, lo cual, como hemos visto, implica que $G_1 - G_2$ es una constante! Entonces $G_1 - G_2 = c$, o sea, $G_1 = G_2 + c$. Queda demostrado que: si se conoce una primitiva G de f , todas las otras primitivas de f son de la forma $G(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, no hay otras más.

Se suele resumir eso diciendo que **las primitivas de una función difieren sólo por una constante aditiva**.

Se puede demostrar que

- Si f tiene discontinuidades de salto en $[a, b]$, entonces no puede tener primitiva en $[a, b]$;
- Si f es continua en $[a, b]$, entonces admite una primitiva en $[a, b]$ (lo demostraremos después).

Observación importante: aunque f sea continua, no siempre es posible escribir su primitiva a través de una composición de funciones elementales, en particular, se demuestra rigurosamente (como corolario de un teorema debido al matemático francés Joseph Liouville (1809-1882)) que **la primitiva de las funciones del tipo $f(x) = e^{ax^2}$ con $a \neq 0$, en particular de la función Gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$, no se puede escribir a través de la composición de funciones elementales.** Veremos después que una primitiva de la Gaussiana se puede escribir de forma ‘implícita’.

Tenemos todas las informaciones para citar y demostrar¹ el siguiente, importantísimo, resultado.

Teorema fundamental del cálculo integral: Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva de f . Entonces la integral de f de a a b coincide con la diferencia de los valores que G toma en el extremos superior e inferior (con este orden), es decir:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)}, \quad (5.1)$$

se suele escribir también $G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b \equiv G(x)|_a^b$.

Prueba. Consideramos una partición uniforme de $[a, b]$ en n sub-intervalos con puntos extremos dados por $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$, $\Delta x = x_j - x_{j-1}$, $j = 1, \dots, n$. Sumamos y restamos a $G(b) - G(a)$ el valor de la primitiva G calculada en los puntos extremos internos, o sea los x_j con $j = 1, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= G(x_n) - G(x_0) \\ &= [G(x_n) - G(x_{n-1})] + [G(x_{n-1}) - G(x_{n-2})] + \dots \\ &\quad \dots + [G(x_2) - G(x_1)] + [G(x_1) - G(x_0)] \\ &= \sum_{j=1}^n [G(x_j) - G(x_{j-1})]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Queremos transformar el lado de derecha de esta ecuación en una suma de Cauchy-Riemann para la función f . Para hacer eso observamos que, en virtud del teorema de Lagrange, para cada sub-intervalo de partición $[x_{j-1}, x_j]$,

¹Newton, Leibnitz y el suizo Johannes Bernoulli (1667-1748) fórmula ron independientemente este teorema a finales del 1600. La prueba que sigue se basa en el teorema de Lagrange, que todavía no se conocía. Newton, Leibnitz y Bernoulli usaron consideraciones geométricas para determinar el enunciado del teorema.

existe $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$ tal que

$$G(x_j) - G(x_{j-1}) = G'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}),$$

pero G es una primitiva de f , entonces $G'(\xi_j) = f(\xi_j)$, y $G(x_j) - G(x_{j-1}) = f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = f(\xi_j)\Delta x$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (5.2):

$$G(b) - G(a) = \sum_{j=1}^n [G(x_j) - G(x_{j-1})] = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)\Delta x,$$

obteniendo una suma de Cauchy-Riemann en el lado de derecha! Tomando el límite para $n \rightarrow +\infty$ en ambos lados y dado que el lado de izquierda no depende de n , llegamos a poder escribir

$$G(b) - G(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)\Delta x = \int_a^b f(x)dx,$$

habiendo usado la definición de integral. □

El teorema fundamental del cálculo permite **reducir la tarea del cálculo de la integral de una función en un intervalo a la búsqueda de una primitiva de la función**. Una vez encontrada esta primitiva lo único que hay que hacer es evaluarla en los extremos superior e inferior y restar los valores obtenidos, con ese orden.

Para comprender la importancia del teorema fundamental del cálculo integral vamos a calcular la integral siguiente $\int_0^1 x^2 dx$, o sea el área por debajo del gráfico de parábola en el intervalo $[0, 1]$, con la técnica proporcionada por este teorema: todo lo que tenemos que hacer es buscar una primitiva de x^2 en $[0, 1]$, o sea una función derivable sobre ese intervalo y cuya derivada valga x^2 . Es fácil ver que $x^3/3$ es una primitiva de x^2 : $(\frac{x^3}{3})' = \frac{3x^2}{3} = x^2$, entonces

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Es impresionante comparar la facilidad de esta técnica con la dificultad del *método de exhaustión* que Arquímedes desarrolló para obtener el mismo resultado hace más de 2000 años. Este es un hecho general en matemática: la contrapartida al trabajo que se necesita para construir una teoría ‘difícil’ (en este caso el cálculo diferencial e integral) es el poder creativo-resolutivo de las técnicas que la teoría proporciona. Estas técnicas permiten resolver

con facilidad problemas que, sin esas, necesitarían cálculos mucho más complicados.

Observamos ahora que, si derivamos ambos lados de la ecuación (5.1), obtenemos² $\int_a^b f'(x)dx = G'(b) - G'(a)$ pero $G'(b) - G'(a) = f(b) - f(a)$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) = [f(x)]_a^b.} \quad (5.3)$$

Este resultado toma una expresión aún más sugestiva si introducimos el símbolo siguiente

$$\boxed{\int f(x)dx}$$

para indicar el **conjunto de todas las primitivas** de f , que llamamos **integral indefinida** de f . Utilizando esta notación, la identidad del teorema fundamental del cálculo integral y su corolario dado por la ecuación (5.3) se pueden escribir como sigue

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx \right]_a^b,$$

$$\int_a^b f'(x)dx = \left[\int f'(x)dx \right]_a^b = [f(x)]_a^b.$$

Este último resultado vale para cualquier pareja de puntos extremos a, b de un intervalo donde f es continua, así que se suele escribir simplemente:

$$\boxed{\int f'(x)dx = f(x)}$$

o también, recordando que el diferencial df de la función f se escribe $df(x) = f'(x)dx$,

$$\boxed{\int df(x) = f(x)}.$$

Dado que es como si la operación de integración ‘anulara’ la diferenciación, se suele resumir (impropiamente) este resultado diciendo que **integración y diferenciación (o derivación) son operaciones inversas**. En las aplicaciones se usa muchas veces este resultado, sin embargo, se invita a los

²Obsérvese que hemos utilizado implícitamente un resultado no obvio que garantiza la posibilidad de invertir integral y derivada cuando f es continua.

estudiantes a tener siempre presente que la forma correcta de interpretarlo es a través de la ecuación (5.3).

Observación: $\int f(x)dx$ y $\int_a^b f(x)dx$ tienen dos significados completamente distintos:

- $\int f(x)dx$ es un conjunto de funciones (las primitivas de f);
- $\int_a^b f(x)dx$ es un número real!

Leyendo al revés la tabla de derivación de funciones elementales, podemos obtener gratuitamente la tabla de las **integrales inmediatas**:

$f(x)$	$\int f(x)dx$
k	$kx + c$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x + c$
e^x	$e^x + c$
a^x	$\frac{a^x}{\log a}, a > 0, a \neq 1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$\sinh x$	$\cosh x + c$
$\cosh x$	$\sinh x + c$

Comprobamos que la primitiva de $1/x$ es $\log |x|$ para cada $x \neq 0$:

$$\log |x| = \begin{cases} \log(x) & \text{si } x > 0 \\ \log(-x) & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

entonces, derivando:

$$\frac{d}{dx}(\log |x|) = \begin{cases} \frac{d}{dx} \log(x) = \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{d}{dx} \log(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Obsérvese que en el segundo caso hay que poner -1 al numerador porque la derivada de $-x$ es -1. La primitiva $\log|x|$ tiene en realidad que interpretarse como la pareja de primitivas $\log(-x)$ para $x < 0$ y $\log(x)$ para $x > 0$.

Para encontrar primitivas de funciones más complicadas resultan extremadamente útiles estos dos teoremas.

Teorema de integración por partes: Si f y g son dos funciones derivables, entonces

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Usando la notación con el diferencial, el teorema de integración por partes se puede escribir como

$$\int f dg = fg - \int g df$$

f : **factor finito**, dg : **factor diferencial**.

Prueba. Es una consecuencia inmediata de la regla de Leibnitz para derivar el producto de funciones: $(fg)' = f'g + fg'$, integrando ambos lados de esta igualdad obtenemos $\int (fg)' dx = \int f'g dx + \int fg' dx$, pero, en virtud del teorema fundamental del cálculo integral, el lado de izquierda vale fg , entonces: $fg = \int f'g dx + \int fg' dx$, o sea $\int fg' dx = fg - \int f'g dx$. $\square$

El teorema de integración por partes resulta muy útil cuando se reconoce en la función integrada el producto de una función f por la derivada de otra función g y cuando la integral que se queda en el lado derecho, o sea $\int f'(x)g(x)dx$, se puede resolver de forma más fácil que la integral inicial (si no el método pierde su utilidad).

La tabla siguiente presenta unas situaciones típicas en las cuales conviene usar el teorema de integración por partes, poniendo en evidencia el factor finito y el factor diferencial en cada caso. En la tabla $n \neq 1$, $m, q \neq 0$.

$f(x)g'(x)$	$f(x)$	$g(x) = \int g'(x)dx$
$x^n \log(mx + q),$	$\log(mx + q)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$x^n \sin(mx)$	x^n	$-\frac{1}{m} \cos(mx)$
$x^n \cos(mx)$	x^n	$\frac{1}{m} \sin(mx)$
$x^n e^{mx}, n > 0$	x^n	$\frac{1}{m} e^{mx}$
$e^{nx} \sin(mx)$	e^{nx}	$-\frac{1}{m} \cos(mx)$
$e^{nx} \cos(mx)$	e^{nx}	$\frac{1}{m} \sin(mx)$

Ejemplo: $\int \log x \, dx$. Interpretamos esta integral como $\int 1 \cdot \log x \, dx$, tomamos como factor finito $f(x) = \log x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ y como factor diferencial $g'(x)dx = 1 \cdot dx$, entonces $g(x) = \int g'(x)dx = \int 1 \cdot dx = x + c$. Seleccionamos $c = 0$ por sencillez³ y usamos la fórmula de integración por partes:

$$\int \log x \, dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \log x - \int 1 \, dx = x \log x - x + c,$$

entonces

$$\boxed{\int \log x \, dx = x \log x - x + c}.$$

Se verán muchos otros ejemplos en las clases de prácticas y seminarios.

Vamos ahora a ver que consecuencias tiene la regla de la cadena sobre las integrales. Consideramos, como antes,

$$\begin{aligned} f: [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

continua y $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, primitiva de f en $[a, b]$. Supongamos que la variable $x \in [a, b]$ es la imagen de otra función:

$$\begin{aligned} \varphi: [\alpha, \beta] &\longrightarrow [a, b] \\ t &\longmapsto \varphi(t) = x, \end{aligned}$$

φ derivable con derivada continua en su dominio. Usando la regla de la cadena, tenemos que:

$$\frac{d}{dt} G(\varphi(t)) = G'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

³Comprobar que si dejamos $c \neq 0$ encontramos la misma expresión de la integral de $\log x$.

por tanto, $G(x)$ es una primitiva de f , si y sólo si, $G(\varphi(t))$ es una primitiva de $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Usando la notación de integral indefinida este hecho se traduce escribiendo

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

llamada fórmula de **integración por sustitución (o cambio) de variable**. Hay que notar que, formalmente, es como si se pasara de una integral a la otra despejando $x = \varphi(t)$ y diferenciando $dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t)dt$. Esta observación se puede utilizar como *regla mnemotécnica* a la hora de resolver los ejercicios y es una consecuencia de la elección, particularmente feliz, de la notación de integral hecha por Leibnitz.

Esquema para la resolución de integrales por sustitución

- Se determina el cambio de variable oportuno $t = \varphi^{-1}(x)$ y se invierte despejando x en función de t : $x = \varphi(t)$;
- Se diferencia $x = \varphi(t)$: $dx = \varphi'(t)dt$;
- Se resuelve la nueva integral en términos de la variable t ;
- Una vez encontrada la primitiva, se deshace el cambio de variable escribiendo $t = \varphi^{-1}(x)$.

Si φ es invertible (o sea, dado que estamos considerando funciones de una variable real, monótona creciente o decreciente) podemos escribir la fórmula de integración por sustitución para integrales definidas como sigue:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Vamos a examinar un ejemplo que mezcla la fórmula de integración por partes con la de sustitución: queremos calcular $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$, usamos el cambio de variable $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2 = \varphi(t)$ ($|x| = x$ porque $x \in [0, 1]$), y $dx = 2tdt$, por tanto $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx = \int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{1}} e^t 2tdt = \int_0^1 e^t 2tdt$, esta integral se puede resolver por partes tomando t como factor finito y $e^t dt$ como factor diferencial (el factor 2 lo extraemos de la integral): $\int_0^1 e^t 2tdt = 2 \left[te^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt \right] = 2 \left[e - e^t \Big|_0^1 \right] = 2[e - (e - 1)] = 2$.

La fórmula de integración por sustitución resulta particularmente útil y fácil de implementar cuando x aparece en una combinación lineal: $\alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. En este caso, poniendo $t = \alpha x + \beta$ y despejando con respecto a x obtenemos $x = \frac{t}{\alpha} - b$, entonces $dx = \frac{1}{\alpha} dt$. Se ve que el diferencial dx y dt en este caso difieren sólo por una constante multiplicativa que tiene el significado de *cambio de escala*.

Vamos a ver porque hablamos de cambio de escala considerando por ejemplo la integral $\int_0^1 \frac{x}{100} dx$ y resolviendola sin sacar afuera $1/100$ sino usando la fórmula de sustitución de variable, $t = \frac{x}{100}$, $x = 100t$, $dx = 100dt$, eso significa que, si medimos la distancia infinitésima dx en metros, para que valga la igualdad $dx = 100dt$, tenemos que medir la distancia infinitésima dt en centímetros. La consecuencia es que cuando x varía de 0 a 1 metro, t variará de 0 a 100cm, que es la misma longitud, pero medida con una escala diferente!

En general, *un cambio de variable lineal $t = \alpha x + \beta$ genera un cambio de escala homogéneo en todo el intervalo de integración, que se realiza a través del factor de conversión $1/\alpha$.*

Un cambio de variable no lineal $t = \varphi^{-1}(x)$ genera un cambio de escala que varía, en general, punto por punto en el intervalo de integración y que se realiza a través del factor de conversión $1/\varphi'(t)$.

En las clases de prácticas y seminarios se verán las técnicas de sustitución más utilizadas en la resolución de las integrales. Aquí analizamos sólo una de esta técnicas: consideramos la integral $\int f(x)f'(x)dx$ y operamos el cambio de variable $t = f(x)$, $dt = d(f(x)) = f'(x)dx$, entonces $\int f(x)f'(x)dx = \int t dt$, que es una integral inmediata y vale $t^2/2 + c = [f(x)]^2/2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. Resumiendo, gracias a la fórmula de sustitución y con el cambio de variable $t = f(x)$, hemos transformado la integral inicial en una integral inmediata, por eso la integral $\int f(x)f'(x)dx$ se llama **semi-inmediata**.

Dejamos como ejercicio demostrar la validez de las otras dos fórmulas de integración semi-inmediata que resumimos aquí debajo.

Fórmulas de integración semi-inmediatas

$$\boxed{\int f(x)f'(x)dx = \frac{[f(x)]^2}{2} + c};$$

$$\boxed{\int f^\alpha(x)f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c}, \quad \alpha \neq -1;$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log |f(x)| + c}.$$

5.5. Integrales y dinámica de las partículas

En esta sección pondremos en evidencia la importancia de las integrales en la dinámica de las partículas. Consideramos la función posición de una partícula que se mueve en un eje, supongamos el eje horizontal: $s : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto s(t) = x$, posición de la partícula en el instante t , con $s(0) = a$ y $s(T) = b$. Como sabemos, la longitud del recorrido de la partícula es $\int_a^b dx$, pero dado que $x = s(t)$, podemos usar la fórmula de integración por sustitución y escribir $\int_a^b dx = \int_0^T ds(t) = \int_0^T \dot{s}(t) dt$, donde $\dot{s}(t) = v(t)$ es la velocidad instantánea de desplazamiento de la partícula, quedando demostrado que

$$\text{Espacio recorrido en } [0, T] = \int_0^T v(t) dt$$

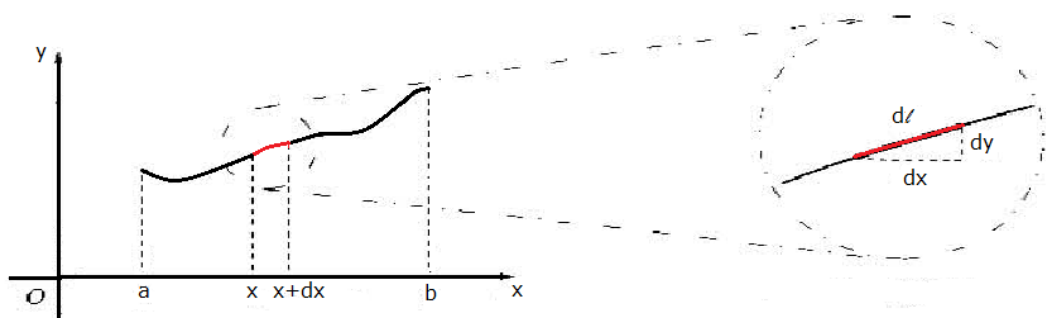
, es decir, el *espacio recorrido* por una partícula hasta el instante de tiempo T es la *integral de la velocidad* de la misma partícula.

Desde el punto de vista físico es muy restrictivo considerar un movimiento a lo largo de un eje, eso motiva el interés hacia la generalización del concepto de integral a más de una dimensión, que haremos en la segunda parte del curso de cálculo.

5.6. Cálculo de la longitud del gráfico de una función

En esta sección mostraremos como se puede calcular la longitud del gráfico de una función a través de las integrales.

Sea $y = f(x)$ una función continua con derivada continua en $[a, b]$. Vamos a considerar la contribución a la longitud del gráfico dada por la parte del gráfico entre dos puntos x y $x + dx$ (dx infinitésimo positivo), tal y como se observa en la figura siguiente:



Gracias a lo que hemos aprendido estudiando la diferenciabilidad, sabemos que el incremento de la ordenada del gráfico de f entre x y $x + dx$ es, a parte de errores infinitésimos de orden cuadrático o superior, $dy = f'(x)dx$. Por tanto, en virtud del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo de la figura, podemos escribir la longitud infinitésima $d\ell$ del gráfico (aproximada con un segmento de recta) como

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \underset{dy=f'(x)dx}{=} \sqrt{(dx)^2 + (f'(x))^2(dx)^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

La suma de las contribuciones infinitésimas de cada elemento del gráfico se encuentra con la integral:

Longitud del gráfico de $f = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$.

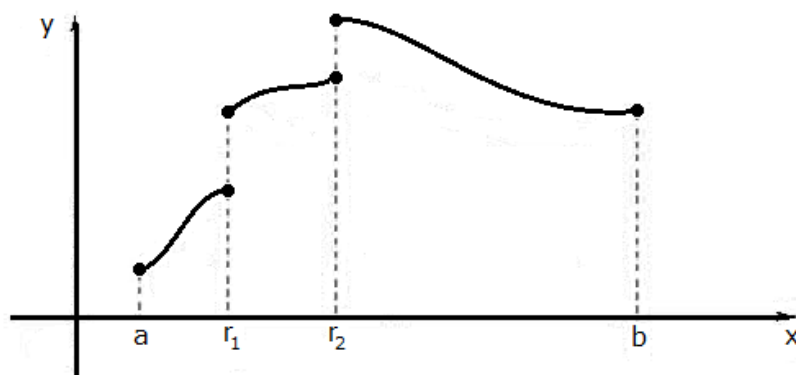
Ejemplo: Calculamos la longitud del gráfico de la función $y = x^{3/2}$ para $x \in [0, a]$, $a \in \mathbb{R}$. Dado que $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ obtenemos $L = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx$, dejamos como ejercicio demostrar que, usando la sustitución $t = 1 + \frac{9}{4}x$, se puede resolver la integral como sigue $L = \frac{8}{27} \left[\left(1 + \frac{9}{4}a\right)^{3/2} - 1 \right]$.

Observación importante: la forma de razonar que acabamos de ver es común en muchas aplicaciones. A menudo es demasiado difícil resolver un problema no lineal globalmente, entonces lo que se hace es **considerar la linealización local del problema en un entorno infinitésimo de un punto**, este problema suele ser más fácil y resoluble, la solución que se obtiene se extiende del infinitamente pequeño al finito con el proceso de integración.

5.7. Integrales generalizadas: integración de funciones no continuas o en intervalos ilimitados

En muchas situaciones prácticas, por ejemplo en probabilidad y estadística, hay que saber integrar funciones no continuas o con asíntotas o en intervalos ilimitados. En esta sección vamos a resumir los resultados sobre la integración en estas situaciones, las integrales que aparecerán se llaman **integrales generalizadas**.

- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función con un número finito de puntos de discontinuidad de salto $r_1, \dots, r_k$, como en la figura debajo

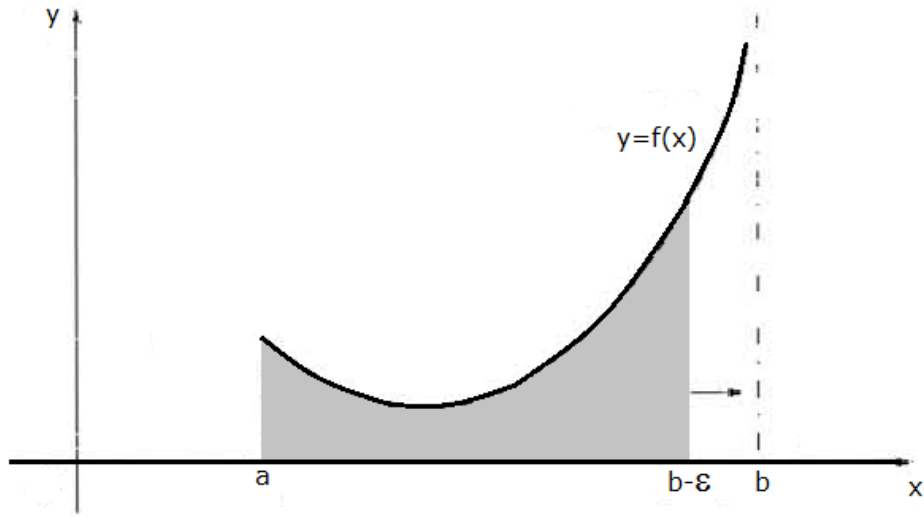


en este caso se define la integral de f en $[a, b]$ como la suma de las integrales en los intervalos donde la función es continua:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{r_1} f(x)dx + \dots + \int_{r_k}^b f(x)dx,$$

entonces, **alterar el valor de la función en un número finito de puntos no influye sobre la integral!**

- Sea ahora $f : [a, b)$ una función continua que tiene una asíntota vertical en $x = b$, o sea $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$ como en la figura debajo



en este caso se define la integral de f en $[a, b]$ como sigue

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx .$$

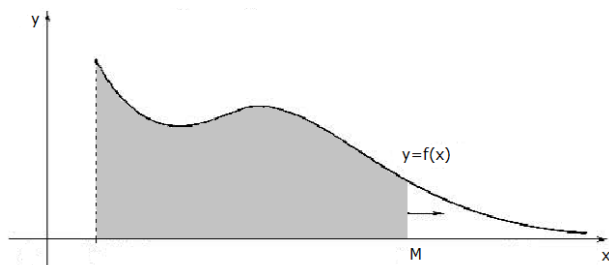
Si el límite existe y es finito, se dice que f es integrable en todo $[a, b]$, si el límite existe pero es ∞ se dice que la integral de f en $[a, b]$ diverge. Si no existe el límite se dice que la integral no existe.

La definición en el caso de una asíntota en $x = a$ es análoga:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx .$$

Como antes, se dice que f es integrable si el límite es finito o que la integral es infinita o no existe si el límite es infinito o no existe, respectivamente.

- Sea ahora $f : [a, \infty)$ una función continua sobre un intervalo ilimitado, como en la figura siguiente



definimos la integral de f en $[a, +\infty)$ como

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x)dx,$$

análogamente, si $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, definimos

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{m \rightarrow -\infty} \int_m^b f(x)dx,$$

y si $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en todo $\mathbb{R}$ definimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx.$$

Ejemplos notables:

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \geq 1 \\ \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1,$$

Podemos observar que el hecho de que la última integral valga 1 explica el porqué de los coeficientes en la función Gaussiana: el área debajo de una distribución de probabilidad debe dar 1 (probabilidad del 100 %!).

5.8. La función integral

Dada una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, sabemos que su integral definida⁴ $\int_a^b f(t)dt$ es un número real. Si fijamos el extremo inferior de integración a y dejamos libre el valor del extremo superior, llamándolo x , obtenemos una función llamada **función integral**:

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt, \end{aligned}$$

F asocia a cada $x \in [a, b]$ la integral de f de a a x misma, entonces $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ y $F(b) = \int_a^b f(t)dt$.

Geométricamente, F asocia a cada $x \in [a, b]$ el área con signo por debajo de la función f entre a y x .

Dos ejemplo notables de funciones integrales son:

- La función de los errores, *erroris functio* de Gauss:

$$\operatorname{erf}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

representa la probabilidad que una variable casual, siguiendo la distribución Gaussiana, tome un valor $\leq x$;

- El espacio recorrido hasta un instante t por una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria asignada es la función integral de la velocidad:

$$s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau.$$

Matemáticamente, la propiedad más importante de la función integral está contenida en el siguiente teorema, que es la versión del teorema fundamental del cálculo integral para funciones integrales.

Teorema: Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

su función integral, entonces F es derivable y

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

⁴Usamos t en lugar de x para no confundir la variable de integración con el extremo superior de integración, que en esta sección puede variar.

Este teorema tiene consecuencias interesantes:

1. Dado que $F' = f$ y f es continua, eso significa que F es derivable con derivada continua. Si f es derivable con continuidad, entonces F es derivable dos veces con continuidad, etc. Iterando el razonamiento se ve que **la función integral F tiene siempre un grado de regularidad más que la función integrada.**

Este hecho proporciona una técnica estándar para construir funciones más regulares...es suficiente con integrar!

En particular, como vimos en la sección sobre las integrales generalizadas, el hecho de que una función no sea continua en un número finito de puntos no crea problemas a la hora de definir su integral, en efecto se puede demostrar formalmente que si f es continua en $[a, b]$ menos que en los puntos $x_1, \dots, x_k$, entonces F es derivable en todo $[a, b]$ menos en $x_1, \dots, x_k$. Para darse cuenta de eso es suficiente considerar la función signo, que tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$, sin embargo

$$F(x) = \int_0^x \text{sign}(t)dt = \begin{cases} \int_0^x 1dt = x & \text{si } x > 0 \\ \int_0^x -1dt = -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

función que se puede prolongar con continuidad a la función valor absoluto, que es continua en todo $\mathbb{R}$ pero no derivable en $x = 0$. Podemos resumir estas consideraciones diciendo que **integrar una función aumenta su grado de regularidad y puede arreglar sus discontinuidades**, interpretando esta frase en el sentido que le hemos dado arriba;

2. El teorema dice que **cada función continua en un intervalo tiene una primitiva: su función integral!** Ya sabemos que todas las primitivas de una función difieren sólo por constantes aditivas, entonces podemos escribir

$$\boxed{\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + c},$$

remarcando otra vez que $\int f(x)dx$ es el conjunto de todas las primitivas de f .

5.8.1. Una aplicación de la función integral: la ecualización de histogramas

La función integral aparece en una de las transformaciones más comunes del procesado de señales digitales: la ecualización de histogramas. Aunque las variables que aparecen en las señales digitales sean discretas (o sea tienen un paso entero), la teoría que sigue resultará más fácil si suponemos que la variable r que describe un *nivel de intensidad* de la señal f es continua y varía en el intervalo normalizado $[0, 1]$ (cada intervalo finito se puede normalizar al intervalo $[0, 1]$, así que esta hipótesis no es restrictiva). Indicamos con $|f|$ el número de muestras de f (o su longitud, área o volumen, si consideramos f como una señal continua 1-D, 2-D o 3-D, respectivamente).

El **histograma** h de la señal es una función $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ que asocia a cada nivel $r \in [0, 1]$ el número de veces que el señal toma ese mismo valor (por ejemplo, si se mide la intensidad 0,5 de f 20 veces, entonces $h(0,5) = 20$).

Muchas veces un señal tiene un histograma no balanceado, en el sentido que unos pocos valores aparecen muchas veces (donde el histograma presenta un pico) y otros pocas o nunca (donde el histograma vale 0 o casi 0). En cambio, si una señal tiene un histograma homogéneo, significa que todos los niveles aparecen con la misma frecuencia. Es fácil entender que esta última señal tiene un contenido informativo superior a la primera.

La **ecualización de histograma** es la transformación $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $r \mapsto \varphi(r) = s$ que modifica la distribución de los niveles de una señal f para hacer que su histograma sea lo más homogéneo posible. Para evitar la inversión del orden entre los niveles de f se suele asumir que $\varphi'(r) \geq 0 \forall r$, o sea, φ es una función monótona no decreciente.

Para determinar analíticamente φ resulta útil observar que el número total de píxeles tienen que conservarse durante la transformación, es decir, el número de veces que aparecen los niveles en el rango de intensidades $[r, r + dr]$ en la señal original tiene que coincidir con el número de veces que aparecen los niveles en el rango de intensidades $[s, s + ds]$ en la señal transformada.

Si llamamos h_i el histograma de la señal original (i =input) y h_o el histograma de la señal transformada (o =output) lo que acabamos de decir se traduce escribiendo: $h_i(r)dr = h_o(s)ds$. Si queremos que h_o sea homogéneo, o sea $h_o(s) \equiv |f|$, tenemos que escribir la relación precedente como $h_i(r)dr = |f|ds$.

Integrando el lado de izquierda de 0 a r y el lado de derecha de $\varphi(0)$ a

$\varphi(r) = s$ obtenemos:

$$\int_0^r h_i(t)dt = |f| \int_{\varphi(0)}^{\varphi(r)=s} ds = |f|(s - \varphi(0)).$$

Si imponemos $\varphi(0) = 0$, nos quedamos con la expresión:

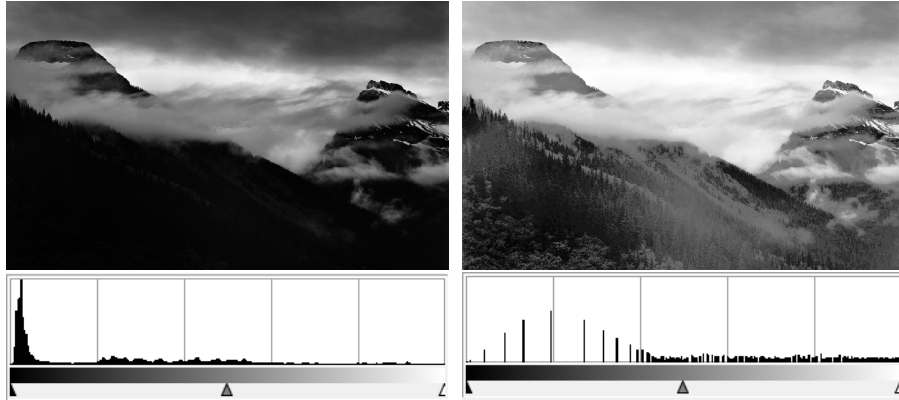
$$s = \varphi(r) = \frac{1}{|f|} \int_0^r h_i(t)dt \equiv H(r),$$

lo cual indica que φ es $1/|f|$ por la función integral del histograma original de f , llamado **histograma acumulado normalizado** de f y representado por H . Entonces, φ realiza ecualización de histograma mapeando cada nivel $r > 0$ en el histograma acumulado normalizado de f en r (suma, normalizada, del número de veces que se han detectado los niveles de 0 hasta r):

$$r \mapsto H(r) : \text{Ecualización de histograma.}$$

Del teorema de la función integral sigue que $H' = h$: **la derivada del histograma acumulado es el histograma**.

Como ejemplo de ecualización consideramos la figura siguiente, donde se muestra el efecto de la ecualización sobre una fotografía del celebre fotógrafo americano Ansel Adams (1902-1984). Nótese que el histograma de la imagen de la derecha no está totalmente ecualizado: las imágenes digitales son discretas, entonces siempre interviene un cierto nivel de aproximación.



5.9. Relaciones de ortogonalidad de las funciones sin y cos

En esta sección demostraremos unas fórmulas que el estudiante volverá a encontrar en el cursos de *teoría de señales* en relación a la **transformada de Fourier**.

Teorema: **Formulas de ortogonalidad de seno y coseno**

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} \quad (5.4)$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}, \, n \neq m \quad (5.5)$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}, \, n \neq m \quad (5.6)$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi} \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (5.7)$$

Prueba: las fórmulas (5.4), (5.5), (5.6) se demuestran usando las *fórmulas de Werner*. Probamos, por ejemplo, la fórmula (5.4) usando la fórmula: $\cos u \sin v = \frac{1}{2}[\sin(u+v) - \sin(u-v)]$:

$$\begin{aligned} \int \cos nx \sin mx \, dx &= \frac{1}{2} \int [\sin((n+m)x) - \sin((n-m)x)] \, dx \\ &\left(t = (n+m)x, \, dx = \frac{dt}{n+m}, \, s = (n-m)x, \, dx = \frac{ds}{n-m} \right) \\ &= -\frac{\cos(n+m)x}{n+m} + \frac{\cos(n-m)x}{n-m}. \end{aligned}$$

Si llamamos $n+m = k \in \mathbb{Z}$ y $n-m = l \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\int \cos nx \sin mx \, dx = \left[-\frac{\cos(n+m)x}{n+m} + \frac{\cos(n-m)x}{n-m} \right]_0^{2\pi} = 0$$

gracias a la periodicidad de la función coseno: $\cos(2p\pi) = \cos(0) = 1 \, \forall p \in \mathbb{Z}$. Las fórmulas (5.7) son una consecuencia directa de las fórmulas $\int_0^{k\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \int_0^{k\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = k\frac{\pi}{4}$, con $k = 4$, que demostraremos durante los seminarios. $\square$

5.10. Aproximación numérica de integrales

Ya dijimos que no siempre se puede calcular explícitamente la primitiva de una función a través de la composición de funciones elementales, como en el caso de la Gaussiana $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. De hecho son muchas más las funciones continuas de las que no sabemos calcular explícitamente una primitiva que las que sí se puede!

Por esta razón hace falta desarrollar técnicas alternativas para calcular integrales. Algunas de estas técnicas se basan en el análisis de funciones de variable compleja (análisis complejo) pero son demasiado complicadas para ser examinadas en un curso de cálculo del primer año. En esta sección presentamos técnicas numéricas que se basan en la definición misma de la integral y en su relación con el cálculo del área. Pero en este caso, la definición de integral como límite de sumas de Cauchy-Riemann no es cómoda para el cálculo de primitivas, pero resulta útil tanto para desarrollar teoremas sobre integrales como para su aproximación numérica.

La idea básica detrás de las aproximaciones numéricas de integrales consiste en la sustitución de la función f por una función $\tilde{f}$ más simple para la cual el cálculo de la integral resulte simple, rápido y eficaz (o sea que el error de aproximación resulte pequeño).

En esta sección veremos tres métodos: integración por rectángulos, por trapecios y por parábolas. Como estos tres métodos están basados en las sumas de Cauchy-Riemann, conviene recordar la notación antes de entrar en detalle: dado el intervalo de integración $[a, b]$ realizamos una **partición** de $[a, b]$ en n sub-intervalos de extremos $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$. La distancia entre estos puntos es constante y vale $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, entonces $x_j = a + j\Delta x$, $j = 0, \dots, n$. Si en cada uno de los sub-intervalos $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \dots, n-1$ elegimos un punto arbitrario ξ_j y evaluamos la función f en ξ_j , podemos definir las sumas de Cauchy-Riemann como sigue:

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)\Delta x.$$

El teorema de la integral de Riemann sostiene que, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, el límite para $n \rightarrow \infty$ de S_n converge, independientemente de la elección de los puntos ξ_j , a un número real $\int_a^b f(x)dx$ llamado integral de Riemann de f en $[a, b]$.

5.10.1. Integración por aproximación rectangular

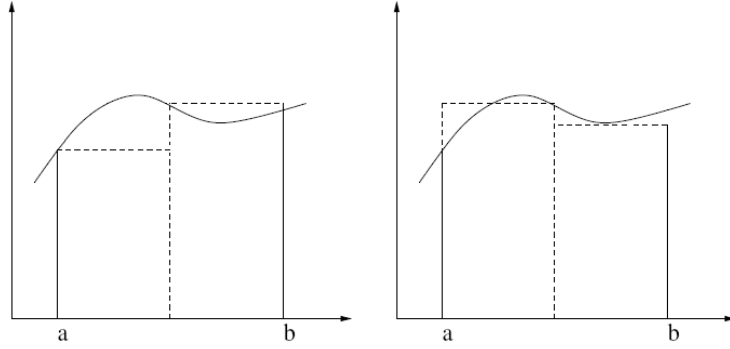
En el método de integración numérica por rectángulos se sustituye f con una función $\tilde{f}$ **constante por trozos**. Los trozos son los intervalos $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \dots, n-1$, y la constante puede ser el valor de f calculado en el extremo izquierdo de $[x_j, x_{j+1}]$ o en su punto medio:

$$\tilde{f}_1(x) = f(x_j), \quad \forall x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, \dots, n-1,$$

o bien

$$\tilde{f}_2(x) = f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right), \quad \forall x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, \dots, n-1.$$

La figura siguiente simboliza la aproximación por rectángulos cuando se escoge el extremo izquierdo o el punto medio, respectivamente.



Las sumas de Cauchy-Riemann de $\tilde{f}$ en los dos casos son, respectivamente:

$$S_n(\tilde{f}_1) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j);$$

$$S_n(\tilde{f}_2) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right).$$

Se puede demostrar que, si f es derivable en $[a, b]$ con derivada acotada, o sea $\max_{x \in [a, b]} \{|f'(x)|\} = M \in \mathbb{R}$, entonces existe una constante real $C > 0$ que acota el error máximo que se puede cumplir con la aproximación rectangular, tal y como se muestra a continuación:

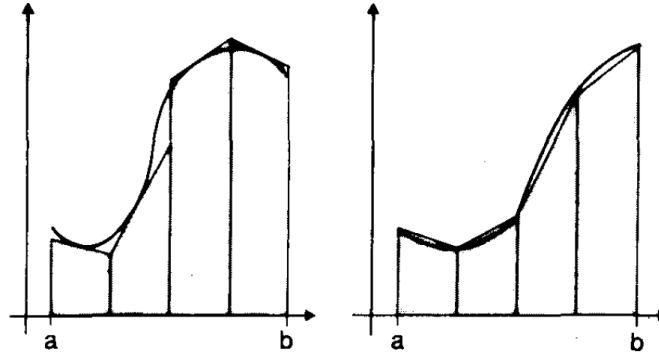
$$\max \left| \int_a^b f(x) dx - S_n(\tilde{f}_1) \right| \leq C \Delta x,$$

$$\max \left| \int_a^b f(x)dx - S_n(\tilde{f}_2) \right| \leq C(\Delta x)^2.$$

Dado que $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y que, generalmente $n \gg b-a$, es preferible una fórmula que está acotada por potencias más altas de Δx , por eso la aproximación rectangular de punto medio es más precisa (si se considera la misma partición) que la aproximación rectangular de extremo izquierdo.

5.10.2. Integración por aproximación trapezoidal

En el método de integración numérica por trapecios se sustituye f con una función $\tilde{f}$ **lineal por trozos**. El segmento rectilíneo en cada intervalo $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \dots, n-1$, puede ser el segmento de recta tangente al gráfico de f en el punto medio de $[x_j, x_{j+1}]$ (figura debajo a la izquierda), el segmento que conecta $(x_j, f(x_j))$ con $(x_{j+1}, f(x_{j+1}))$ (figura debajo a la derecha), o bien el segmento que pasa por $(x_j, f(x_j))$ con una pendiente asignada, por ejemplo el valor de la tangente en el punto medio. En todos estos casos ya no se aproxima el área por debajo del gráfico de f con rectángulos, sino con trapecios.



Consideramos la fórmula de la recta que pasa por un punto, por ejemplo $(x_j, f(x_j))$ y asignamos dos pendientes para obtener dos fórmulas: como primero asignamos la recta tangente al gráfico de f en $\frac{x_j+x_{j+1}}{2}$, o sea $f' \left(\frac{x_j+x_{j+1}}{2} \right)$, y después asignamos la pendiente de la recta que conecta $(x_j, f(x_j))$ con $(x_{j+1}, f(x_{j+1}))$, es decir $\frac{f(x_{j+1})-f(x_j)}{x_{j+1}-x_j}$. Encontramos las ex-

presiones⁵ de la función aproximada $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}_1(x) = f(x_j) + f' \left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2} \right) (x - x_j), \quad \forall x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, \dots, n-1,$$

o bien,

$$\tilde{f}_2(x) = f(x_j) + \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j} (x - x_j), \quad \forall x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Para la función aproximada $\tilde{f}_1$ el área del trapecio en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ es:

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \tilde{f}_1(x) dx &= f(x_j)(x_{j+1} - x_j) + f' \left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2} \right) \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x - x_j) dx \\ &= f(x_j)(x_{j+1} - x_j) + f' \left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2} \right) \frac{(x - x_j)^2}{2} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} \\ &= f(x_j)(x_{j+1} - x_j) + f' \left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2} \right) \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2} \\ &= (x_{j+1} - x_j) \left[f(x_j) + f' \left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2} \right) \frac{x_{j+1} - x_j}{2} \right], \end{aligned}$$

entonces las sumas de Cauchy-Riemann para la función aproximada $\tilde{f}_1$ son:

$$S_n(\tilde{f}_1) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[f(x_j) + f' \left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2} \right) \frac{x_{j+1} - x_j}{2} \right].$$

Para la función aproximada $\tilde{f}_2$ el área del trapecio en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ es:

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \tilde{f}_2(x) dx &= f(x_j)(x_{j+1} - x_j) + \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x - x_j) dx \\ &= f(x_j)(x_{j+1} - x_j) + \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j} \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2} \\ &= (x_{j+1} - x_j) \left[f(x_j) + \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{2} \right] \\ &= (x_{j+1} - x_j) \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2}, \end{aligned}$$

⁵Nótese que la primera fórmula necesita que f sea derivable en los puntos medios de cada intervalo de partición.

resultado esperado por la geometría del trapecio aproximada en este caso.

Las sumas de Cauchy-Riemann para la función aproximada $\tilde{f}_2$ son:

$$\begin{aligned} S_n(\tilde{f}_2) &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2} \\ &= \frac{b-a}{2n} [f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b)] \\ &= \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right] \\ &= \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \right]. \end{aligned}$$

Expresando cada x_j , $j = 1, \dots, n-1$, como $a + j\frac{b-a}{n}$ obtenemos la fórmula conocida como **regla del trapecio**:

$$S_n(\tilde{f}_2) = \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right) \right].$$

Se puede demostrar que, si $\max_{x \in [a,b]} \{|f''(x)|\} = M \in \mathbb{R}$, entonces el error máximo que se puede cumplir con la aproximación trapezoidal (las dos que vimos) es

$$\max \left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq C(\Delta x)^2.$$

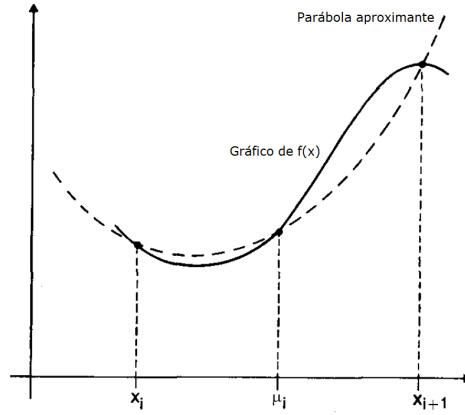
Esta fórmula mejora notablemente la aproximación rectangular en el caso de funciones periódicas, porque en ese caso los errores de la aproximación trapezoidal tienden a eliminarse mutuamente.

5.10.3. Integración por aproximación parabólica (fórmula de Cavalieri-Simpson)

En el método de integración numérica de Cavalieri-Simpson se sustituye f con una función $\tilde{f}$ **parabólica por trozos**, como en la figura siguiente.

Como se ha visto antes, pasar de una función constante a una función lineal ha permitido una mejora sustancial de la aproximación. Considerar una función cuadrática aumenta aún más la precisión de la aproximación.

Una parábola necesita 3 puntos para ser unívocamente determinada, por tanto hay que refinar la partición anterior cortando los n intervalos $[x_j, x_{j+1}]$,



por ejemplo, en el punto medio $\mu_j = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}$, y obteniendo $2n$ intervalos de longitud $\delta = \frac{\Delta x}{2} = \frac{b-a}{2n}$ cada uno, entonces $x_{j+1} - \mu_j = \delta$ y $x_j - \mu_j = -\delta$. La función parabólica aproximada $\tilde{f}$ tiene ecuación:

$$\tilde{f}(x) = \alpha(x - \mu_j)^2 + \beta(x - \mu_j) + \gamma \quad \forall x \in [x_j, x_{j+1}],$$

donde las constantes α, β, γ se determinan a través de las condiciones en los extremos y en el punto medio:

$$\begin{cases} f(x_j) = \alpha(x_j - \mu_j)^2 + \beta(x_j - \mu_j) + \gamma & \stackrel{(-\delta)^2 = \delta^2}{=} \alpha\delta^2 - \beta\delta + \gamma & (1) \\ f(\mu_j) = \gamma & (2) \\ f(x_{j+1}) = \alpha\delta^2 + \beta\delta + \gamma & (3) \end{cases}$$

El área debajo de $\tilde{f}$ en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ es

$$\begin{aligned}
\int_{x_j}^{x_{j+1}} \tilde{f}(x) dx &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} [\alpha(x - \mu_j)^2 + \beta(x - \mu_j) + \gamma] dx \\
&= \left[\alpha \frac{(x - \mu_j)^3}{3} + \beta \frac{(x - \mu_j)^2}{2} + \gamma x \right]_{x_j}^{x_{j+1}} \\
&= \alpha \frac{(x_{j+1} - \mu_j)^3}{3} + \beta \frac{(x_{j+1} - \mu_j)^2}{2} + \gamma x_{j+1} \\
&\quad - \alpha \frac{(x_j - \mu_j)^3}{3} - \beta \frac{(x_j - \mu_j)^2}{2} - \gamma x_j \\
&= \alpha \frac{\delta^3}{3} + \beta \frac{\delta^2}{2} + \gamma x_{j+1} - \alpha \frac{(-\delta)^3}{3} - \beta \frac{(-\delta)^2}{2} - \gamma x_j \\
&= 2\alpha \frac{\delta^3}{3} + \gamma(x_{j+1} - x_j) \\
&= \frac{2}{3}\alpha\delta^3 + 2\gamma\delta.
\end{aligned}$$

Para explicitar $\int_{x_j}^{x_{j+1}} \tilde{f}(x) dx$ necesitamos el valor de α , dado que ya conocemos $\gamma = f(\mu_j)$ y $\delta = \frac{\Delta x}{2} = \frac{b-a}{2n}$.

Podemos determinar α a partir de las condiciones que aparecen en el sistema anterior, (1)-(2) y (3)-(2) devuelven

$$f(x_j) - f(\mu_j) = \alpha\delta^2 - \beta\delta$$

$$f(x_{j+1}) - f(\mu_j) = \alpha\delta^2 + \beta\delta,$$

sumando estas dos últimas ecuaciones y despejando con respecto a α obtenemos:

$$\alpha = \frac{f(x_j) + f(x_{j+1}) - 2f(\mu_j)}{2\delta^2}.$$

Introduciendo esta expresión de α en $\int_{x_j}^{x_{j+1}} \tilde{f}(x) dx$ llegamos a escribir:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \tilde{f}(x) dx = \frac{b-a}{n} \frac{f(x_j) + f(x_{j+1}) + 4f(\mu_j)}{6}$$

y sumando la contribución de todos los intervalos de la partición para $j = 0, \dots, n$ obtenemos la fórmula de Cavalieri-Simpson⁶

⁶La fórmula de Cavalieri-Simpson fue usada por primera vez por el físico y astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) y llamada 'Keplersche Fassregel', o sea regla de Kepler. El matemático italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647) fue el primero en formalizarla en un contexto matemático y el matemático británico Thomas Simpson (1710-1761) la popularizó en la comunidad anglófona.

$$S_n(\tilde{f}) = \frac{b-a}{6n} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + 4 \sum_{i=0}^n f(\mu_i) \right].$$

Se puede demostrar que si $\max_{x \in [a,b]} \{|f^{(4)}(x)|\} = M \in \mathbb{R}$, entonces el error máximo que se puede cumplir con la regla del trapecio es

$$\max \left| \int_a^b f(x) dx - S_n(\tilde{f}) \right| \leq C(\Delta x)^4.$$

El hecho de que el error decrezca del orden de la cuarta potencia de n nos hace entender porque la fórmula de Cavalieri-Simpson tiene tantas aplicaciones; también con particiones no muy refinadas, la fórmula proporciona una aproximación excelente.

Las fórmulas de los rectángulos, trapecios y Cavalieri-Simpson se utilizarán en el curso de **ecuaciones diferenciales** para proporcionar soluciones aproximadas de estas ecuaciones.

5.10.4. Comandos Matlab para aproximar numéricamente integrales

En Matlab existen funciones optimizadas para el cálculo de la aproximación numérica de las integrales con el método de los trapecios y con la fórmula de Cavalieri-Simpson. Estas funciones se llaman **trapz** y **quad**, respectivamente, y el estudiante puede encontrar ejemplos en Matlab escribiendo **help trapz** y **help quad** en el ‘command space’ de Matlab.

Capítulo 6

Sucesiones y series numéricas y de funciones

En este último capítulo volveremos a examinar las propiedades de los números enteros y las relacionaremos con unos de los conceptos que hemos visto hasta ahora, en particular lo de límite de una función y de su desarrollo de Taylor. Comenzamos con una sección dedicada a una técnica de demostración peculiar de los números naturales.

6.1. El principio de inducción

Ya hemos visto que existen varias técnicas de demostración de propiedades en el campo de los números reales. Aquí examinaremos una técnica que funciona solo con números naturales: la técnica de demostración por inducción. La imagen intuitiva con la cual se puede comprender esta técnica es el *efecto dominó*:



para que todas las piezas del dominó se caigan es necesario y suficiente que se cumplan estas dos condiciones:

1. Que se caiga la primera pieza;
2. Que cualquier pieza esté posicionada de tal forma que, si se cae, provoca la caída de la pieza siguiente.

El principio de inducción extiende esta idea al caso de un número infinito de piezas y a propiedades matemáticas más generales que la caída de una pieza de dominó.

Técnica de demostración por inducción

Supongamos que queremos demostrar una propiedad $\mathcal{P}$ para todos los números enteros $n \geq n_0$, con $n_0 \in \mathbb{N}$;

1. Comenzamos demostrando que $\mathcal{P}$ vale cuando $n = n_0$;
2. Supongamos que la propiedad valga para un valor genérico de $n > n_0$ (**hipótesis de inducción**) y demostramos que eso implica que $\mathcal{P}$ vale para $n + 1$.

Como por el domino, eso garantiza que la validez de $\mathcal{P}$, comenzando por n_0 , va ‘propagándose’ de un entero al siguiente hasta el infinito.

Es imprescindible presentar un ejemplo (se verán más en los seminarios).

Ejemplo de demostración por inducción: demostrar que el número natural $5^n - 1$ se puede dividir por 4 para cada $n = 1, 2, \dots$ (Recordar que $5^n - 1$ es divisible por 4 si $\frac{5^n - 1}{4}$ devuelve un número entero)

- Demostramos que la propiedad vale cuando $n = 1$: $5^1 - 1 = 4$ y $4/4 = 1$, entonces la propiedad es verdadera cuando $n = 1$;
- Supongamos que la propiedad sea verdadera para cada $n \geq 2$, es decir $\frac{5^n - 1}{4} = m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 5^n - 1 = 4m \Leftrightarrow 5^n = 4m + 1$ (hip. inducción);
- Tenemos que demostrar que la propiedad vale para $n + 1$, o sea que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{5^{n+1} - 1}{4} = p$. La observación clave aquí es que, como la hipótesis de inducción involucra 5^n , tenemos que reconducirnos a una expresión en la cual aparezca 5^n . Usando las propiedades de las potencias podemos escribir $5^{n+1} = 5 \cdot 5^n$, entonces

$$\frac{5^{n+1} - 1}{4} = \frac{5 \cdot 5^n - 1}{4} \stackrel{(\text{hyp. inducción})}{=} \frac{5 \cdot (4m + 1) - 1}{4} = \frac{20m + 4}{4} = 5m + 1,$$

por lo tanto, poniendo $p = 5m + 1 \in \mathbb{N}$, tenemos que $\frac{5^{n+1} - 1}{4} = p$, lo cual termina la prueba. $\square$

Para entender la importancia de la técnica de inducción, citamos el hecho de que Peano logró demostrar formalmente la validez de la fórmula de Taylor con una prueba muy simple y elegante basada en la inducción.

6.2. Sucesiones numéricas

Como dijimos en el capítulo dedicado a las funciones, es importante recordar la definición general de función y no atarse a las funciones reales de variable real. Una función es cualquier correspondencia entre dos conjuntos X e Y que asocia a un dato de input un solo dato de output. Tenemos la libertad de elegir el conjunto inicial y final y la correspondencia como queramos. Si elegimos $X = \mathbb{N}$ e $Y = \mathbb{R}$ tenemos lo que se llama una sucesión a valores reales:

Def.: una **sucesión a valores reales** es una función de $D \subseteq \mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n) = a_n \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dado que la sucesión está completamente determinada por los valores a_n que toma, se suele escribir también así: $\{a_n\}$ o bien (a_n) , especificando de donde comienza n .

Ejemplos:

- $n \geq 0$: $(a_n) = (n^2) = (0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots)$;
- $n \geq 0$: $(a_n) = ((-1)^n) = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$;
- $n \geq 1$: $(a_n) = (2^{\frac{1}{n}}) = (2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \dots)$.

La teoría de los límites se puede desarrollar considerando sucesiones en vez que funciones, con la única diferencia que el límite sucesional se define solo para $n \rightarrow +\infty$. Para definir los límites de sucesiones resulta extremadamente útil definir el concepto siguiente.

Def.: Se dice que una sucesión (a_n) tiene una propiedad $\mathcal{P}$ **definitivamente** si existe un $n_0 \geq 0$ tal que a_n satisface $\mathcal{P}$ para cada $n \geq n_0$.

Ejemplos:

- La sucesión $(n - 10\sqrt{n})$ es definitivamente positiva porque lo es para cada $n \geq 100$ (dejamos como ejercicio averiguar que es así);
- La sucesión $(\frac{1}{n^2})$ es definitivamente menor de $\frac{1}{10}$ porque lo es para cada $n \geq 4$.

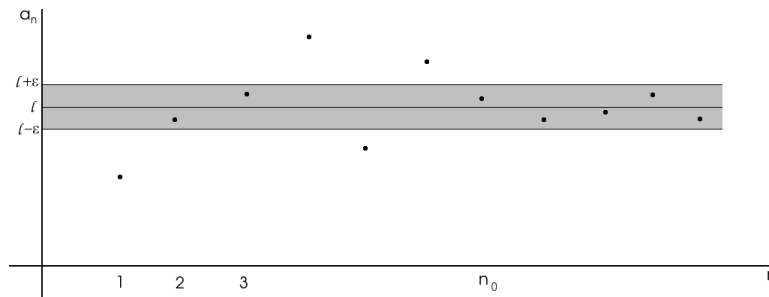
Estamos listos para dar la definición de límite de una sucesión.

Def.: se dice que la sucesión (a_n) converge a $\ell \in \mathbb{R}$ o que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell}$$

si $\forall \varepsilon > 0$ la distancia de a_n a ℓ es definitivamente menor que ε , o sea $\exists n_0(\varepsilon)$ tal que $|a_n - \ell| < \varepsilon \forall n \geq n_0(\varepsilon)$.

Geométricamente, una sucesión convergente tiene el comportamiento que se ve en la figura siguiente:



su gráfico (puntos discretos!), a partir de un cierto n_0 , queda contenido en una banda horizontal de ancho 2ε centrada en ℓ . Esto sucedería no importa que tan pequeña sea ε . Cuanto más pequeña, más habrá que esperar hasta que la sucesión entre en la banda, pero tarde o temprano entrará.

Def.: se dice que la sucesión (a_n) diverge a $+\infty$ (resp. a $-\infty$) o que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty} \quad (\text{resp. } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty})$$

si $\forall M > 0$, a_n es definitivamente mayor que M (resp. menor que $-M$).

Los límites de funciones y de sucesiones se pueden relacionar a través de un *punto* establecido por el teorema siguiente debido al matemático alemán Heinrich Heine (1821-1881).

Teorema de Heine: Sean $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. f converge a $\ell \in \mathbb{R}$ para $x \rightarrow x_0$ si y solo si para cada sucesión (a_n) tal que $a_n \in (a, b)$ definitivamente, $a_n \neq x_0$ definitivamente y $(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$, la sucesión numérica $(f(a_n))$ converge a ℓ para $n \rightarrow +\infty$.

Unos autores toman como referencia para la definición de límite la condición necesaria y suficiente del teorema de Heine y la llaman definición de límite de Heine.

Gracias al teorema de Heine podemos garantizar de forma inmediata (o casi) que los resultados que hemos visto sobre límites de funciones valen también para los límites de sucesiones (obviamente teniendo en consideración que, en este caso, el límite se puede definir solo cuando $n \rightarrow +\infty$). Por ejemplo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{1/n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty, \text{ etc.}$$

Destacamos el límite de una sucesión que devuelve un número notable y una relación asintótica particularmente importante:

■ **Límite notable fundamental del cálculo:**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

siendo e el número de Neper, la base de los logaritmos naturales: $e \simeq 2,7182\dots$ (número irracional);

■ **Fórmula de De Moivre–Stirling¹:**

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{n^n}{e^n}.$$

Gracias a la fórmula de De Moivre–Stirling podemos escribir la jerarquía de los infinitos para sucesiones (se invita al estudiante a demostrar que $\frac{n^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ usando la fórmula que acabamos de ver):

$$\boxed{\log_a n \prec (\log_a n)^\alpha \prec n^\beta \prec n \prec n^\gamma \prec b^{\eta n} \prec n! \prec n^n}, \quad n \rightarrow +\infty$$

donde $\prec$ es el símbolo que expresa que el infinito a su derecha es de orden superior al infinito que aparece a su izquierda y donde:

¹Abraham de Moivre, matemático francés (1667-1754) ha descubierto la fórmula sin la constante de proporcionalidad, James Stirling, matemático británico (1692-1770) determinó la constante de proporcionalidad $\sqrt{2\pi}$.

- $a > 1$;
- $\alpha > 1$;
- $\beta \in (0, 1)$;
- $\gamma > 1$;
- $b > 1$;
- $\eta > 0$.

En particular, observamos que, fijado cada $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^n}{n!} \rightarrow 0$ para $n \rightarrow +\infty$. Utilizaremos esta observación en breve.

6.3. Sucesiones de funciones

En esta sección podremos apreciar aún más la versatilidad de la definición abstracta de función. Consideremos, como dominio X y codominio Y de una función f estos conjuntos:

- $X = \mathbb{N}$;
- $Y = \mathcal{F} = \{f : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, o sea, $\mathcal{F}$ es el conjunto que contiene todas las funciones reales de variable real con dominio E .

Def.: Una **sucesión de funciones** (reales de variable real) es una función

$$\begin{aligned} \varphi : D \subseteq \mathbb{N} &\longrightarrow \mathcal{F} \\ n &\longmapsto \varphi(n) \equiv f_n. \end{aligned}$$

Como en el caso de sucesiones numéricas, podemos identificar φ con su imagen $(f_n)_{n \in D}$. Ahora los números enteros n indexan funciones, no números reales: para cada n , $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ es una función!

Ejemplos:

- $n \geq 0$: $f_n : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $(f_n(x) = \frac{2x^n}{2+n\sqrt{x+2}}) = (f_0(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2}}, f_1(x) = \frac{2x}{\sqrt[3]{x+2}}, f_2(x) = \frac{2x^2}{\sqrt[4]{x+2}}, \dots)$;
- $n \geq 1$: $f_n : (0, 1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $(f_n(x) = \frac{3x-1}{\log(x^n)}) = (f_1(x) = \frac{3x-1}{\log(x)}, f_2(x) = \frac{3x-1}{\log(x^2)}, f_3(x) = \frac{3x-1}{\log(x^3)}, \dots)$.

Def.: Se dice que **la sucesión de funciones (f_n) converge puntualmente** en x si la sucesión numérica $(f_n(x))$ es convergente. Si (f_n) converge puntualmente en cada punto de un intervalo $E \subseteq \mathbb{R}$, resulta bien definida la función $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

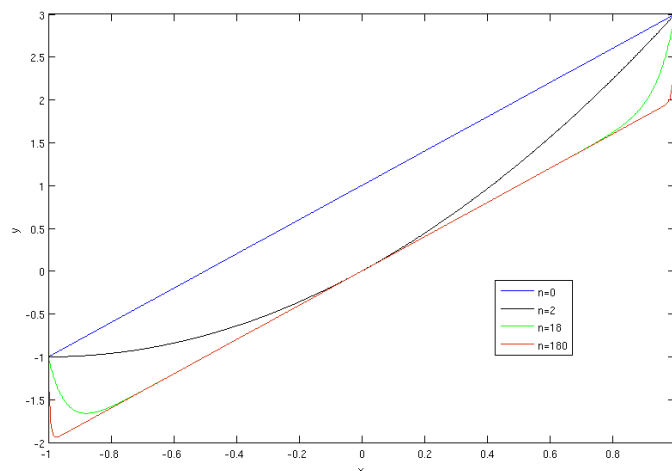
$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

y llamada **función límite puntual** de la sucesión de funciones (f_n) .

Ejemplo: $n \geq 1$: $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f_n(x) = 2x + x^n)$. Se ve fácilmente que si fijamos un valor de x tal que $|x| > 1$, la sucesión numérica $(2x + x^n)$ no converge, porque los valores de x^n siguen subiendo en valor absoluto a medida que n aumenta. En cambio, si fijamos x tal que $|x| < 1$, la sucesión numérica $(2x + x^n)$ converge a $2x$ porque $x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ si $|x| < 1$. Si fijamos $x = 1$ tenemos $(2x + 1^n = 2x + 1) \forall n \in \mathbb{N}$, en cambio, si fijamos $x = -1$ tenemos $(2x + (-1)^n)$ que no converge. Finalmente, podemos decir que la sucesión de funciones $(f_n(x) = 2x + x^n)$ converge puntualmente a la función límite puntual

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (-1, 1) \\ 2x + 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

En la figura siguiente se puede ver como evoluciona el gráfico de las funciones f_n con $x \in (-1, 1)$: se ve que, a medida que n crece, los gráficos se acercan cada vez mejor al gráfico de la función $f(x) = 2x$.



6.3.1. El teorema de aproximación de Stone-Weierstrass

El teorema de aproximación de Stone-Weierstrass² es uno de los más importantes de toda la matemática. Fue obtenido por primera vez en el 1885 por Weierstrass y sucesivamente generalizado por Stone en el 1937. El teorema dice que cada función continua en un intervalo compacto puede ser aproximada con un nivel de precisión cualquiera a través de una función polinomial. Dado que los polinomios son las funciones no lineales más simples de la matemática y dado que los ordenadores pueden computarlos de forma muy rapida, resulta evidente la importancia tanto teorica como práctica de este resultado. Rigurosamente:

Teorema de aproximación de Stone-Weierstrass: sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces existe una sucesión de polinomios P_n tal que

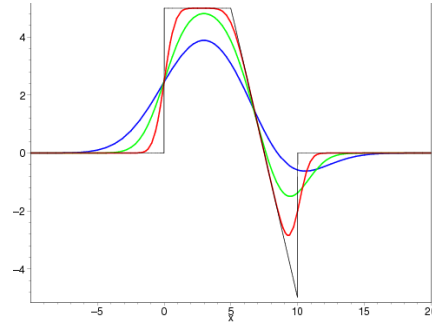
$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} |P_n(x) - f(x)| = 0} \quad \forall x \in [a, b].$$

Se puede demostrar que la convergencia de la sucesión de polinomios es *uniforme*, pero este es un concepto que va más allá de los fines de este curso.

Observamos que el teorema garantiza este resultado tan solo con la continuidad de f , así que la función podría no ser diferenciable, por lo tanto los polinomios involucrados en la aproximación de Stone-Weierstrass difieren de los polinomios de Taylor en general. De hecho el matemático ruso Sergei Bernstein (1880-1968) proporcionó una prueba constructiva del teorema usando unos polinomios que hoy se llaman *polinomios de Bernstein* en su honor y que son una herramienta importante en la teoría de la interpolación polinomial de funciones reales.

Es interesante observar que la prueba original de Weierstrass de su teorema se basa sobre un proceso de ‘*smoothing*’ que se llama ‘convolución con una Gaussiana’, o *trasformada de Weierstrass*, una técnica que los estudiantes podrán estudiar con detalle en los cursos de procesamiento de imágenes y teoría de señales. Esta es una de las técnicas más simples, aunque no muy precisa, para quitar ruido a una señal digital y consiste en sustituir el valor de la señal en un punto con una media pesada, con peso dado por una Gaussiana con su máximo centrado en el punto mismo. La siguiente figura muestra este efecto de smoothing.

²Marshall Stone, 1903-1989, matemático americano.



6.4. Series numéricas

La teoría de las series numéricas permite expresar de forma matemáticamente rigurosa el concepto de suma finita de un número infinito de términos, un concepto que en la antigüedad parecía no tener sentido, como se deduce de la famosa **paradoja de Zenón** (-489 – -431) de **Aquiles y la tortuga**. El filósofo Zenón, imaginó Aquiles y una tortuga compitiendo en una carrera. Como Aquiles es más rápido, los jueces de la carrera deciden que Aquiles comience en la posición x_0 y la tortuga en la posición $x_1 > x_0$. Obviamente en un tiempo $t_0 > 0$ Aquiles alcanzará la posición de la tortuga y después la superará. Sin embargo Zenón consideraba esa una paradoja lógica, veamos por qué. En el instante de tiempo $t_1 = \frac{t_0}{2}$, obviamente Aquiles estará detrás de la tortuga, y también en el instante $t_2 = \frac{t_1}{2} = \frac{t_0}{4}$, etc. siguiendo hasta el ‘infinito’. La paradoja, según Zenón, es que Aquiles ha alcanzado la tortuga en un instante de tiempo finito obtenido por la suma de una cantidad infinita de instantes de tiempo más pequeños pero siempre positivos. Zenón, considerando sus elucubraciones filosóficas más lógicas que la realidad de los hechos, ¡creyó haber demostrado lógicamente la imposibilidad del movimiento!

Vamos a ver como se puede dar rigor al concepto de suma de infinitos términos. Consideramos una sucesión de números reales (a_n) y construimos una sucesión auxiliar (s_n) definida como sigue:

$$s_0 = a_0$$

$$s_1 = a_0 + a_1$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k,$$

llamamos s_n la **suma parcial n -ésima** de la sucesión (a_n) .

Def.: Se dice **serie numérica** con *término general* (a_n) la sucesión numérica de las sumas parciales s_n . Si (s_n) es convergente, se dice que la serie es convergente, si (s_n) diverge o es irregular (no tiene límite), se dice que la serie diverge o es irregular, respectivamente. Si (s_n) converge a S para $n \rightarrow +\infty$ llamamos S la **suma de la serie** y escribimos:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k = S.}$$

Si la sucesión (a_n) comienza en $n_0 > 0$ entonces escribiremos $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

En las clases de prácticas y seminarios veremos ejemplos de series numéricas. Aquí, a título de ejemplo, nos limitamos a señalar el comportamiento de una serie particularmente importante, la **serie geométrica** de razón q :

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{si } |q| < 1 \\ +\infty & \text{si } q \geq 1 \\ \text{irregular} & \text{si } q < -1. \end{cases}$$

No tenemos tiempo de examinar los criterios de convergencia de las series numéricas, sin embargo queremos remarcar que, **para que una serie sea convergente, es necesario** (y *no suficiente*, en general) **que su término general a_n tienda a 0** para $n \rightarrow +\infty$. Para entender por qué observamos que, por definición de suma parcial, $s_n - s_{n-1} = a_n$. Si la serie converge a la suma S , tanto s_n como s_{n-1} tienden a S para $n \rightarrow +\infty$, lo cual implica que $a_n = s_n - s_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S - S = 0$.

Este hecho se puede tomar como un criterio suficiente de no convergencia: si el término general de una serie no es infinitésimo cuando $n \rightarrow +\infty$, la serie no puede converger.

Un ejemplo de serie divergente cuyo término general tiende a 0 está dado

por: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$, a pesare de que $\frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} &= 2 + 1 + 2/3 + 2/4 + 2/5 + 2/6 + 2/7 + 2/8 + \dots \\ &> 2 + 1 + 1/2 + 1/2 + 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 + \dots \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 + \dots = +\infty. \end{aligned}$$

Como consecuencia inmediata tenemos que también la **serie harmonica** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

Terminamos con un ejemplo práctico para entender que una suma infinita puede, efectivamente, dar un resultado finito es el siguiente: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ modeliza coger la mitad de un pastel, después la mitad de lo que queda (un cuarto), después la mitad de lo que queda, etc. Claramente, en cada paso siempre quedará algo y en el límite se coge todo el pastel (entonces la suma infinita da 1).

6.5. Series de funciones, de Taylor y de potencias

Así como hemos utilizado las sucesiones numéricas para definir las series numéricas, podemos utilizar las sucesiones de funciones para definir las series de funciones: dada la sucesión de funciones (f_n) , $f_n : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos la sucesión de funciones auxiliar:

$$\begin{aligned} s_0(x) &= f_0(x), \quad \forall x \in D \\ s_1(x) &= f_0(x) + f_1(x), \quad \forall x \in D \\ s_2(x) &= f_0(x) + f_1(x) + f_2(x), \quad \forall x \in D \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$s_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x), \quad \forall x \in D,$$

llamamos $s_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ la **función suma parcial n -esima** de sucesión de funciones $(f_n(x))$.

Def.: Se dice **serie de funciones** con *término general* $(f_n(x))$ la sucesión de funciones dada por las funciones sumas parciales $s_n(x)$. Si $(s_n(x))$ es una sucesión de funciones que converge puntualmente en $x_0 \in D$, diremos que la serie de funciones converge puntualmente en $x_0 \in D$, si $(s_n(x))$ es una

sucesión de funciones divergente o irregular en $x_0 \in D$, diremos que la serie de funciones diverge o es irregular en $x_0 \in D$, respectivamente.

Nótese que, por definición, la convergencia puntual de la sucesión de las sumas parciales n -ésimas ($s_n(x)$) en $x_0 \in D$ equivale a la convergencia de la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$. Si la serie de funciones converge en cada punto de un conjunto E , queda bien definida la **función suma de la serie de potencias** dada por: $S : E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Las series de funciones aparecen en muchas aplicaciones de las matemáticas. Un caso de particular relevancia son las **series de Fourier**, que permiten expresar funciones periódicas como series de las funciones trigonométricas seno y coseno. Las series de Fourier son un instrumento de análisis de enorme importancia en muchas disciplinas científicas. El estudiante podrá ver aplicaciones de las series de Fourier en el curso de teoría de señales.

Existen unas series de funciones particularmente significativas: *las series de funciones cuyas sumas parciales n -ésimas están dadas por los polinomios de Taylor de orden n de una función derivable f se llaman series de Taylor.*

Recordamos que la fórmula de Taylor con centro en x_0 y resto de Lagrange de una función $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n+1$ veces derivable con derivadas continuas en (a, b) es:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \\ &= T_{x_0}^{(n)}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

$\forall x \in (a, b)$ y $\xi \in (a, b)$ tal que $|\xi - x_0| < |x - x_0|$. Si una función f es derivable infinitas veces con derivadas limitadas por un número $M \in \mathbb{R}$, entonces, en virtud de la fórmula de De Moivre - Stirling, el error en la aproximación de Taylor de la función f tiende a 0 cuando n tiende a $+\infty$:

$$\left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leq M \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Todas las funciones elementales del cálculo tienen esta propiedad.

Consideramos ahora un intervalo real abierto I tal que $x_0 \in I$. En general, cuando el error de la aproximación de Taylor de una función f infinitamente derivable tiende a cero para cada $x \in I$, se dice que f **se puede desarrollar en serie de Taylor en I con centro en x_0** y vale la fórmula:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \forall x, x_0 \in I,$$

en particular, si $x_0 = 0$, tenemos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \forall x \in I.$$

Se puede observar que las series de Taylor son series de funciones particulares en las cuales las funciones que aparecen son potencias de la variable x multiplicadas por coeficientes proporcionales a las derivadas de la función que se está desarrollando. En general, una expresión del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

se llama **serie de potencias** con centro en x_0 y coeficientes a_n . Se puede demostrar que a cada serie de potencia corresponde un número real $R \geq 0$ llamado **radio de convergencia** tal que *la serie converge puntualmente en* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Si $R = 0$, la serie converge solo en $x = x_0$, si $R = +\infty$ la serie converge en todo $\mathbb{R}$.

En la tabla siguiente recopilamos las series de Taylor y de potencias más comunes en el cálculo.

Función	Serie de potencias correspondiente	Radio de convergencia
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\log(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	$R = +\infty$
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\sinh x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\cosh x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$(1+x)^\alpha$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$	$R = 1$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ es el coeficiente binomial.

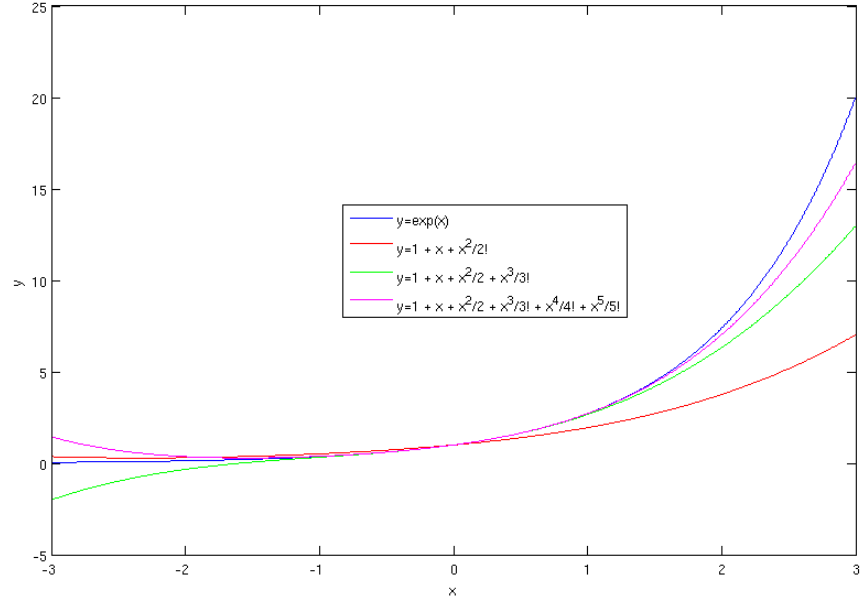
Observe, en particular, que si ponemos $x = 1$ en la serie exponencial obtenemos

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

una fórmula muy usada para aproximar el valor numérico de e .

Los estudiantes podrán apreciar una aplicación de las series de potencias en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales, donde se usarán para resolver las ecuaciones diferenciales lineales en coeficientes no constantes.

En la figura siguiente podemos ver el comportamiento de las sumas parciales de la serie exponencial.



6.6. La formula de la exponencial compleja de Euler

Presentamos en esta última sección una formula de grande importancia debida a **Leonhard Euler** (1707-1783) matemático y físico suizo. Euler es seguramente el matemático más importante del siglo XVIII y muchos lo consideran el matemático más importante de la historia junto con Gauss. Es el matemático que más resultados ha publicado y a él debemos la gran mayoría de la notación matemática que utilizamos hoy en día.

Euler estudió las series con términos complejos y encontró unas fórmulas particularmente significativas para la serie exponencial en el campo complejo. Para entender su análisis, tenemos que dar sentido al concepto de serie de términos complejos. Dado que una serie no es nada más que la sucesión de las sumas parciales de una sucesión, el problema de definir lo que es una serie convergente en el campo complejo se reduce al problema de la definición de una sucesión convergente de números complejos.

Def.: Se dice que la sucesión de números complejos (s_n) , $s_n \in \mathbb{C} \forall n$, converge al límite $\ell \in \mathbb{C}$ si $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) > 0$ tal que $|s_n - \ell| < \varepsilon$, donde $|\cdot|$ es el modulo³ en el campo complejo. En otras palabras, $s_n \rightarrow \ell$ si y solo si

³Recordamos que si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, su modulo $|z|$ es el número real no negativo

$|s_n - \ell| \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$.

Habiendo dado sentido a las series numéricas con términos complejos, podemos extender también las series de funciones al campo complejo, dado que la convergencia puntual de estas series se analiza a través del análisis de la convergencia de series numéricas complejas. Euler se concentró en particular en la serie exponencial $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ y se preguntó cuales propiedades tiene su extensión al campo complejo, que definió de forma natural como sigue:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Antes que nada observamos que esta serie de funciones converge puntualmente en todo $\mathbb{C}$ dado que, fijando cada z , la serie de términos reales no negativos $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$ es convergente en virtud de la fórmula de De Moivre - Stirling.

Analizamos, en particular, el caso de un número complejo imaginario puro, o sea $z = ix$, $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

Considerando $-x$ en lugar de x , y recordando que el coseno es par y el seno es impar, obtenemos: $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$.

Destacamos estas dos fórmulas llamadas **fórmulas de Euler**:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

sumando y restando las fórmulas arriba se obtiene una relación entre exponenciales complejos y funciones trigonométricas reales seno y coseno:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

definido así: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, así que la definición usa el modulo de un número complejo para reconducir la teoría de los límites de número complejos a la de número reales no negativos, que ya hemos desarrollado y de la cual podemos usar los resultados.

A través de las fórmulas de Euler podemos escribir la forma polar de los números complejos en la **forma exponencial**:

$$z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \rho e^{i\alpha}.$$

El siguiente teorema, debido a Euler, garantiza el hecho de que la exponencial compleja se comporta como la exponencial real con respecto a la suma de exponentes.

Teorema: $\forall z \in \mathbb{C}$ vale que:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

Usando la forma exponencial y este teorema es inmediato probar la validez de las fórmulas de De Moivre sobre producto, cociente y potencia de números complejos, por ejemplo:

$$\rho_1 e^{i\alpha_1} \cdot \rho_2 e^{i\alpha_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} = \rho_1 \rho_2 [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)].$$

No existe mejor manera de terminar estos apuntes que escribiendo **la fórmula más bella de las matemáticas**: si introducimos $x = \pi$ en la fórmula de Euler obtenemos $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$, entonces

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Se considera la fórmula más bella porque mezcla los cinco números y las cuatro operaciones más importantes de la matemática: 0,1,e, π , i e igualdad, suma, producto y exponenciación, respectivamente.

THE END.