Un rappel basique sur la théorie de la mesure et de l'intégration

Edoardo Provenzi

Avant propos

Dans ce document on va rappeler que les informations strictement essentielles pour pouvoir avoir une notation et un langage compréhensible et commun. La rédaction est volontairement très synthétique et elle doit être accompagnée par un véritable support pédagogique dédié à la théorie de la mesure et de l'intégration pour les élèves qui n'ont pas encore eu la possibilité ce champ extrêmement important des mathématiques, par exemple l'excellent ouvrage de M.Briane et G.Pages : « Théorie de l'intégration - Cours et exercices ».

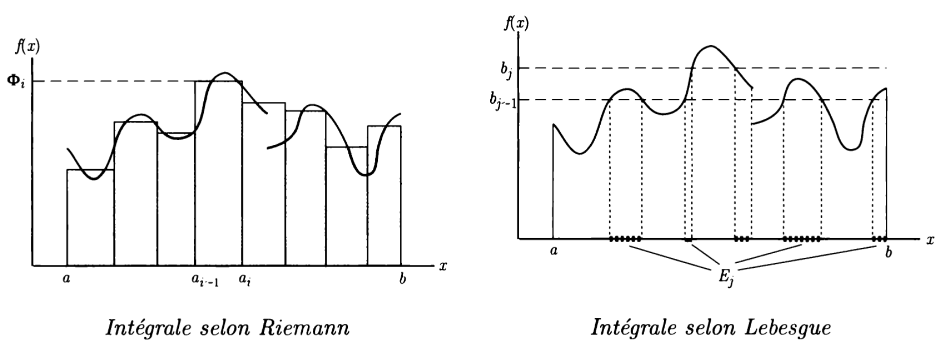
1 Riemann vs Lebesgue

La différence principale de l'approche à la Riemann et à la Lebesgue est montrée dans la Figure 1.

Le principe fondateur de l'intégration à la Riemann est d'approcher l'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses et la courbe du graphe de la fonction f à l'aide de petits rectangles $[a_{i-1}, a_i] \times [0, \Phi_i]$ basés sur l'axe des abscisses et dont la hauteur Φ_i est proche de la hauteur moyenne de la fonction f sur $[a_{i-1}, a_i]$.

L'idée novatrice apportée par la théorie de l'intégration de Lebesgue est, à l'inverse, de commencer par découper en petits intervalles $[b_{j-1}, bj]$ l'axe des ordonnées, puis d'approximer la surface située sous le graphe de f par

$$\int_a^b f \approx \sum_j \frac{b_{j-1} - b_j}{2} \cdot \text{longueur}\left(\{x \ : \ b_{j-1} \leqslant f(x) \leqslant b_j\}\right).$$



Intégrale selon Riemann *Intégrale selon Lebesgue*

Figure 1 – Intégration à la Riemann (gauche) et à la Lebesgue (droite).

La principale difficulté réside dans le fait que les ensembles

$$E_j = \{x \in [a,b] \ : \ b_{j-1} \leqslant f(x) \leqslant b_j\}$$

ne sont généralement pas des intervalles et que leur associer une longueur, ou, plus généralement, une mesure, est délicat voir même, dans certains cas, impossible.

2 Tribu, espace mesurable, mesure et espace mesuré

Pour définir l'intégrale à la Lebesgue il faut donc, tout d'abord, définir les ensembles et les fonction qu'on peut mesurer. D'après l'étude fait au début du XXème siècle, on est arrivé à la formalisation contenue dans les définitions et résultats suivants.

Soit X un ensemble. On appelle **tribu** (ou **σ-algèbre**) sur X, un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de X, i.e. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, qui vérifie :

— $\varnothing, X \in \mathcal{A}$;
— $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire : $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$;
— $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable : $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E \in \mathcal{A}$.

La définition implique que $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable.

Exemples triviales :

— $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$: tribu des parties de X ;
— $\mathcal{A} = \{\varnothing, X\}$: tribu grossière.

Dans les livres de théorie de la mesure on démontre que les propriétés qui définissent une tribu sont nécessaires et suffisantes pour pouvoir « mesurer » les ensembles contenus dans la tribu elle-même, dans un sens qu'on va définir bientôt. C'est pour ça qu'on appelle la couple $(X, \mathcal{A})$ un **espace mesurable** et les éléments de $\mathcal{A}$ **ensembles mesurables**.

Pour donner un premier exemple significatif d'espace mesurable on doit introduire d'abord le concept de *relation d'ordre entre tribus* : si tout élément de la tribu $\mathcal{A}_\infty$ est contenu dans la tribu $\mathcal{A}_\in$, alors on dit que $\mathcal{A}_\infty$ est plus petite que $\mathcal{A}_\in$ et on écrit $\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{A}_\in$. Ce concept est utilisé pour définir la plus petite tribu engendrée par une collection de parties d'un ensemble : soit $S \subset \mathcal{P}(X)$, alors on appelle **tribu engendrée** par S l'intersection de toutes les tribus qui contiennent S.

Le cas très important d'un ensemble X doté d'une topologie mérite une discussion privilégiée. L'existence d'une topologie permet de définir le concept de partie ouverte de X. Notée avec $\tau \subseteq \mathcal{P}$ l'ensemble des parties ouvertes de X, bien évidemment τ n'est pas une tribu car le complémentaire d'un ouvert est fermé, mais on peut considérer la tribu engendrée par τ, qu'on appelle **tribu de Borel**[1] et qu'on dénote avec $\mathcal{B}(X)$. Chaque élément de cette tribu (que, on rappelle encore une fois, est un sous-ensemble de X !) est appelé un **ensemble Borélien**.
Une fois qu'on a un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, on peut définir le concept de mesure positive, ou tout simplement **mesure** μ comme une fonction $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ telle que :

— $\mu(\varnothing) = 0$;
— μ est σ-additive (ou vérifie l'additivité dénombrable) : si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, alors :

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

1. Une description *explicite* de cette tribu est impossible.

La triplette $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est dite un **espace mesuré**. Quand la tribu et la mesure sont clairement spécifiées, elles sont souvent admises.

Un exemple très simple mais déjà significatif de mesure est celle de Dirac dans l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\tau))$, i.e. $\mathbb{R}$ avec la tribu des Boréliens. La **mesure de Dirac** basée en $x_0 \in \mathbb{R}$ est définie par : $\delta_{x_0} : \mathcal{B}(\tau) \to \{0, 1\}$,

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 \text{ si } x_0 \in E \\ 0 \text{ si } x_0 \notin E, \end{cases} \qquad \forall E \in \mathcal{B}(\tau).$$

Comme $\mathbb{R}$ lui-même est un élément de $\mathcal{B}(\tau)$, $\delta_{x_0}(\mathbb{R}) = 1$, donc la mesure de Dirac de $\mathbb{R}$ est 1 indépendamment du point de base. On a donc un exemple de **mesure finie**, i.e. telle que la mesure de l'espace mesurable est $< +\infty$.

En général, les mesures ne sont pas finies, mais plutôt σ-finies. Étant donné un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, on dit que μ est une **mesure σ-finie** si X peut être écrit comme l'union dénombrable de parties $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ qui ont toutes mesure finie via μ, i.e.

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n, \quad \mu(E_n) < +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il y a plusieurs techniques pour construire une mesure, néanmoins elles ne sont pas ni simples ni rapides à décrire, on invite le lecteur à consulter, par exemple, le livre mentionné dans l'avant propos ou n'importe quel autre livre de théorie de la mesure.

3 Fonctions mesurables et propriétés possédées presque partout (p.p)

C'est maintenant le moment d'introduire les *morphismes des espaces mesurables*, i.e. les applications entre espaces mesurables qui en préservent la propriété essentielle : la mesurabilité des ensembles.

Soient $(X_1, \mathcal{A}_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2)$ deux espaces mesurables et soit $f : X_1 \to X_2$ une fonction quelconque. On dit que f est une **fonction mesurable** (par rapport aux tribus choisies) si la tribu image réciproque par f de la tribu $\mathcal{A}_2$ est incluse dans $\mathcal{A}_1$, i.e. [2]

$$\forall E \in \mathcal{A}_2 \ \Rightarrow \ f^{-1}(E) \in \mathcal{A}_1,$$

ce qui est équivalent, par définition, à dire que l'image réciproque d'une partie mesurable de X_2 (par rapport à $\mathcal{A}_2$) est une partie mesurable de X_1 (par rapport à $\mathcal{A}_1$).

Exemples :

- Les fonctions continues entre deux espaces topologiques sont évidemment mesurables par rapport aux tribus de Boréliens ;
- Quand on considère les fonctions à valeur réels, i.e. $f : X \to \mathbb{R}$, où $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, alors on fixe la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on définit la mesurabilité de f par rapport à ce choix ;

2. Il faut noter la similarité entre cette définition et celle d'une fonction continue dans le sens topologique du terme.

— Une fonction à valeur complexes $f : X \to \mathbb{C}$ est mesurable si le sont sa partie réelle et sa partie imaginaire.

On vient maintenant à un concept cruciale, celui des propriétés définies presque partout. On dit qu'une fonction f définie sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ possède une propriété **presque partout** (et on écrit **p.p**) si f a cette propriété sur $X \backslash E$, où $E \in \mathcal{A}$ a mesure nulle : $\mu(E) = 0$.

Exemples :

— f, g : fonctions mesurables définies sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$, alors $f = g$ p.p si $f(x) = g(x)$ $\forall x \in U \in \mathcal{A}$ et $\mu(X \backslash U) = 0$;

— f est la limite ponctuelle p.p de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ $\forall x \in U \in \mathcal{A}$ et $\mu(X \backslash U) = 0$.

4 Fonctions intégrables, intégrales à la Lebesgue

Une fois donné un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, la construction de l'intégrale d'une fonction mesurable définie sur à valeurs réels ou complexes est plutôt rapide. On commence par considérer une fonction particulière, la **fonction caractéristique** d'un ensemble $E \in \mathcal{A}$: $\chi_E : X \to \{0, 1\}$,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in E \\ 0 \text{ si } x \notin E, \end{cases}$$

une notation équivalente est $\mathbb{1}_E$.

Les fonctions caractéristiques sont utilisées pour définir les **fonctions simples** ou **fonctions étagées** via combinaison linéaires. Plus précisément, soit $(E_k)_{k=1}^n$ une partition finie et disjointe de X, i.e. $E_k \cap E_{k'} = \emptyset$ $\forall k \neq k'$ et

$$\bigcup_{k=1}^n E_k = X,$$

alors une fonction simple $s : X \to \mathbb{R}$ est définie comme ça :

$$s = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k},$$

$s(x) = c_k$ $\forall x \in E_k$, donc s prend seulement un nombre fini de valeurs, si X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, alors s est une fonction constantes par morceaux.

L'intégrale à la Lebesgue d'une fonction simple a la définition naturelle suivante :

$$\int_X s d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \mu(E_k),$$

à noter que sans la définition de la mesure des ensembles E_k, l'intégrale de s ne serait pas bien défini.

L'importance des fonctions simples est exprimé dans le théorème suivant.

Théorème 4.1 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, +infty]$ une fonction mesurable et non-négative, alors f on peut approcher f du bas avec une suite de fonctions simples, i.e. $\exists$ $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, s_n fonction simple, telle que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \nearrow f$, i.e.*

1. $0 \leqslant s_0(x) \leqslant s_1(x) \leqslant \ldots \leqslant s_n(x) \leqslant \ldots \leqslant f(x)\ \forall x \in X$ *;*

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n(x) = f(x)\ \forall x \in X$ *(limite ponctuel). Si f est borné, alors la convergence de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f est uniforme.*

Pour curiosité, dans la preuve (très belle) du théorème est constructive, et on prouve que la suite de fonctions simples et donnée par :

$$s_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} \text{ si } \frac{k}{2^n} \leqslant f(x) \leqslant \frac{k+1}{2^n}, \text{ pour } k = 0, 1, \ldots, 2^{2^n} - 1 \\ 2^n \text{ si } 2^n \leqslant f(x). \end{cases}$$

Ce théorème fondamentale nous permet de définir l'**intégrale d'une fonction mesurable non négative** $f : X \to [0, +\infty]$ comme cela :

$$\int_X f d\mu = \sup_{0 \leqslant s \leqslant f} \int_X s d\mu, \qquad s \text{ simple},$$

f est dite **intégrable** (à la Lebesgue) si $\int_X f d\mu < +\infty$.

Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable, alors on peut définir son intégrale en considérant sa partie positive :

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } f(x) < 0 \end{cases}$$

et sa partie négative :

$$f_-(x) = \begin{cases} -f(x) \text{ si } f(x) \leqslant 0 \\ 0 \text{ si } f(x) > 0 \end{cases}$$

en fait les deux sont des fonctions à valeurs non négatives pour lesquelles on sait définir l'intégrale. Comme $f = f_+ - f_-$, si f_+ et f_- sont intégrables, on peut définir l'**intégrale d'une fonction mesurable à valeurs réels étendues** comme ça :

$$\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu.$$

Pour fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ mesurables on utilise la même stratégie, mais avec la partie positive et la partie négative de sa partie réelle $\mathfrak{R}(f)$ et de sa partie imaginaire $\mathfrak{I}(f)$, l'intégrale est alors definit comme cela :

$$\int_X f d\mu = \int_X \mathfrak{R}(f) d\mu + i \int_X \mathfrak{I}(f) d\mu.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour l'intégrabilité d'une fonction à valeurs réels ou complexes est son intégrabilité absolue :

$$\int_X f d\mu < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_X |f| d\mu < +\infty.$$

5 Les espaces L^p

Dans les définitions suivantes $\mathbb{K}$ sera soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On définie :

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{K},\ f \text{ mesurable } \ : \int_X |f| d\mu < +\infty \right\}.$$

Si on écrit :

$$\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu,$$

on peut vérifier que $\|f\|_1$ vérifie les axiomes d'une norme, sauf pour la stricte positivité, i.e. ce n'est pas vrai que $\|f\|_1 = 0$ si et seulement si $f \equiv 0$ (la fonction identiquement nulle $f(x) = 0$ $\forall x \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$). On sait, en fait, que toute fonction $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ égale p.p à la fonction identiquement nulle a intégrale nul, et donc $\|g\|_1 = 0$. La solution à ce problème consiste en considérer comme équivalentes toutes les fonctions de $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ qui ont la même intégrale, i.e. celles que sont égales p.p. L'égalité p.p est, en fait, une relation d'équivalence $\sim$ sur l'espace $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ et donc l'espace quotient :

$$L^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)/\sim, \quad f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ p.p}$$

formé par les classes d'équivalence de fonctions mesurables sur X absolument intégrables et égales p.p, est un espace normé avec norme $\| \|_1$. Pour simplicité on écrira toujours une fonction et la classe d'équivalence à laquelle elle appartient avec le même symbole et on identifiera toujours une classes d'équivalence avec une fonction représentative quelconque de cette classe.

La convergence d'une suite de fonctions de $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ par rapport à la norme $\| \|_1$ est définie comme ceci :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f \quad \text{ou} \quad f_n \underset{n\to+\infty}{\to} f \quad \Leftrightarrow \quad \|f_n - f\|_1 \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

L'opération d'intégration est continue par rapport à la norme $\| \|_1$, pour vérifier cela il faut tout simplement montrer que $f_n \underset{n\to+\infty}{\to} f$ en norme $\| \|_1$, i.e.

$$\|f_n - f\|_1 \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_X |f_n - f| d\mu \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

implique la convergence des intégrales, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$, la preuve est très simple :

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| = \left| \int_X (f_n - f) d\mu \right| \leqslant \int_X |f_n - f| d\mu \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Plus en général, pour tout $0 < p < +\infty$ on peut définir les espaces

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{K},\ f \text{ mesurable } \ : \int_X |f|^p d\mu < +\infty \right\}$$

qui deviennent espaces normés

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)/\sim, \quad f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ p.p}$$

avec norme

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On a volontairement laissé à côté le cas $p = \infty$, qu'on va examiner maintenant.

Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable quelconque, alors on va définir :

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant C \text{ p.p}\}$$

avec $\inf(\varnothing) = +\infty$. Considérons l'espace :

$$L^\infty(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable } : \|f\|_\infty < +\infty\}/\sim,$$

où $\sim$ est bien évidemment la relation d'équivalence d'égalité p.p.

Le symbole et le nom « norme infinie » dérive du fait que si $1 \leqslant p < +\infty$ et $f \in L^p \cap L^\infty$ alors :

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|f\|_p.$$

6 La caractérisation de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et les ensembles de mesure de Lebesgue nulle

Comme on l'a déjà dit, la construction d'une mesure n'est pas, en général, un processus simple. Néanmoins, vu l'importance de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, on veut au moins résumer les caractéristiques de cette mesure. Heureusement, il existe un théorème qui donne la caractérisation de la mesure de Lebesgue via certaines propriétés qu'on doit décrire avant de citer ce résultat.

— **Mesure de Borel** : soit X un espace topologique, considérons l'espace mesurable $(X, \mathcal{B}(X))$, où $\mathcal{B}(X)$ est la tribu des Boréliens. Alors on dit qu'une mesure μ définie sur cet espace est une **mesure de Borel** si elle associe un nombre fini à toute partie compacte K de X ;

— **Mesure de Borel reguliere** : (celle-ci est une propriété plus technique qu'il faut, néanmoins, citer pour pouvoir énoncer des résultats précisément), une mesure de Borel est dite régulière si, pour tout ensemble Borélien $E \in \mathcal{B}(X)$ il vaut que :

1. $\mu(E) = \sup\{\mu(K),\ K \subset E,\ K \text{ compact}\}$;
2. $\mu(E) = \inf\{\mu(O),\ E \subset O,\ O \text{ ouvert}\}$.

Au lieu de considérer un espace mesuré quelconque, on va mettre notre attention sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$, alors on dit que μ est une **mesure invariante par translations** si

$$\mu(E + a) = \mu(E),$$

pour tout ensemble Borélien $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et tout $a \in \mathbb{R}$, où $E + a = \{x \in \mathbb{R} \ :\ x = e + a,\ \text{où } e \in E\}$.

On peut maintenant détourner la construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, qu'on écrit avec le symbole m, en citant le théorème qui la caractérise.

Théorème 6.1 *Si une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ a les propriétés suivantes :*

1. μ est une mesure de Borel régulière ;

2. μ est une invariante par translation ;

3. μ est normalisée, i.e. $\mu[0,1] = 1$;

alors μ est la mesure de Lebesgue m.

On peut donc dire que **la mesure de Lebesgue** sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ **est une mesure de Borel régulière invariante par translation et normalisée**, ce qui implique aussi que $m[a,b] = b - a$.

Une autre conséquence de ce théorème est que la mesure de Lebesgue est σ-finie : en fait, $\mathbb{R}$ peut être recouvert avec une partition d'intervalles compacts $[-n, n]$ avec $n \in \mathbb{N}$, tous de mesure finie ($\mu[-n,n] = 2n$).

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ se généralise sans problème à $\mathbb{R}^n$ et, on peut démontrer que où une fonction est Riemann-intégrable, elle est aussi Lebesgue-intégrable et les deux intégrales coïncident.

Des exemples importants d'ensemble de mesure de Lebesgue nulle en $\mathbb{R}^n$ sont les hypersurfaces de dimension $n-1$ en $\mathbb{R}^n$, par exemple les courbes en $\mathbb{R}^2$, les surfaces 2D en $\mathbb{R}^3$...et en $\mathbb{R}$ lui-même ? Comme $\mathbb{R}$ a la dimension (infinie) du continu, les parties de $\mathbb{R}$ qui ont dimension inférieure sont celles dénombrables, donc, en particulier :

$$m(\mathbb{N}) = m(\mathbb{Z}) = m(\mathbb{Q}) = 0,$$

cela veut dire que si on élimine d'un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$, comme par exemple un intervalle $[a, b]$, un nombre infini dénombrable de point, la mesure de l'ensemble ne change pas.

Cette propriété permet de considérer dans la classe des fonctions Lebesgue-intégrables a énormément plus de fonctions que dans le cas de l'intégrale à la Riemann. Imaginons le cas d'une fonction continue par morceaux sur un ensemble avec un nombre fini ou dénombrable de discontinuités sous forme de saut, comme c'est par exemple le cas pour une fonction étagée. L'intégrale à la Riemann de cette fonction n'existe pas, néanmoins l'intégrale à la Lebesgue existe et il est la somme algébrique des intégrales de Riemann sur chaque morceaux où la fonction est continue : comme on a seulement un nombre fini ou dénombrable de discontinuités, on peut tout simplement les ignorer, car elles constituent un ensemble de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue, et donc n'influent pas sur le résultat final de l'intégration !

Il faut bien retenir que la théorie de l'intégration à la Lebesgue ne donne pas des outils plus avancées pour le calcul explicite des intégrales, sauf dans des cas particuliers, mais elle permet de définir les intégrales de fonction beaucoup moins régulières que dans le cas de Riemann. C'est ce résultat, avec les célèbres théorèmes de passage de la limite sous signe d'integrale de Beppo Levi et de Lebesgue lui-même, qui ont établi la supériorité de la théorie de l'intégration à la Lebesgue sur celle de Riemann.

7 Le théorème de représentation de Riesz

Les mesures (positives) de Borel peuvent être mises en relation avec de fonctions qui ont des caractéristiques particulières, qui s'appellent fonctionnelles et qu'on va définir de suite. Considérons l'espace mesuré $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ et allons définir l'espace :

$$\mathcal{C}_c(X) = \{f : X \to \mathbb{K},\ f \text{ continue et } \operatorname{supp}(f) \text{ est compact}\},$$

où supp(f) est le support topologique de f, i.e. le complémentaire en X de l'ensemble des parties ouvertes de X où f est nulle, en formule :

$$V_f = \left\{ \bigcup_i O_i,\ O_i \text{ ouvert } \subset X,\ f(x) = 0\ \forall x \in O_i \right\}, \quad \text{supp}(f) = X \backslash V_f.$$

Si μ est une mesure de Borel, alors ces fonctions sont mesurables et intégrables, i.e $\mathcal{C}_c(X) \subset L^1(X, \mathcal{B}(X), \mu)$, en fait :

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(X)\ :\ \int_X |f| d\mu = \int_K |f| d\mu \leqslant \|f\|_\infty \mu(K) < +\infty,$$

où K est compact.

Cela montre que la mesure de Borel μ définit une **fonctionnelle linéaire, continu et positive** su $\mathcal{C}_c(X)$ donné par :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{I}_\mu : & \mathcal{C}_c(X) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & \mathcal{I}_\mu(f) = \int_X f d\mu, \end{array}$$

la positivité signifie que, si $f(x) \geqslant 0\ \forall x \in X$ alors $\mathcal{I}_\mu(f) \geqslant 0$.

Le fondamentale théorème de représentation de Riesz établit que, sous des requêtes minimales, le réciproque de ce qu'on vient de dire est vrai.

Théorème 7.1 (Théorème de représentation de Riesz) *Soit $\mathcal{I} : \mathcal{C}_c(X) \to \mathbb{K}$ une fonctionnelle linéaire continue et positive, alors il existe une mesure de Borel μ sur $(X, \mathcal{B}(X))$ telle que :*

$$\mathcal{I}(f) = \int_X f d\mu \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c(X).$$

Si, de plus, μ est régulière, alors elle est univoquement déterminée.

Ce théorème a une importance énorme en mathématique et, historiquement, a représenté un pont entre les théorie mathématiques qui essayaient d'étendre la théorie de l'intégration de Riemann du point de vue des fonctionnelles et celles qui essayaient de le faire du point de vue de la mesure : les deux étaient en train d'aller exactement dans la même direction.