Éléments de correction du DS

Exercice 1.

1. On a $\mathbb{Z} \in \mathcal{T}$ et si $A \in \mathcal{T}$ alors pour $n \geq 1$, on a $2n \in \mathbb{Z} \setminus A$ ssi $2n \notin A$ i.e. $2n+1 \notin A$, puisque $A \in \mathcal{T}$. Ainsi, pour $n \geq 1$, $2n \in \mathbb{Z} \setminus A$ équivaut à $2n+1 \in Z \setminus A$. Soit enfin $(A_k)_{k \geq 1}$ une suite de $\mathcal{T}$ et $E = \cup_k A_k$. Alors pour $n \geq 1$, $2n \in E$ ssi il existe $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tel que $2n \in A_{n_0}$ i.e. il existe $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tel que $2n+1 \in A_{n_0}$. Cela équivaut encore à $2n+1 \in E$. Ainsi $E \in \mathcal{T}$.
2. L'application f est bien définie et injective ; un antécédent de $m \in \mathbb{Z}$ est $m-2 \in \mathbb{Z}$. Ainsi f est une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$. Soit enfin $A \in \mathcal{T}$; pour $n \geq 1$, on a $2n \in f^{-1}(A)$ ssi $f(2n) \in A$ i.e. $2n+2 = 2(n+1) \in A$. Comme $A \in \mathcal{T}$, cela équivaut encore à $2(n+1)+1 = 2n+3 \in A$, i.e. $f(2n+1) \in A$, i.e. $2n+1 \in f^{-1}(A)$. Donc $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$.
3. On a $\{0\} \in \mathcal{T}$ et $(f^{-1})^{-1}(\{0\}) = f(\{0\}) = \{2\} \notin \mathcal{T}$, donc on a trouvé un élément de $\mathcal{T}$ dont l'image réciproque par l'application f^{-1} n'est pas dans $\mathcal{T}$. Cela prouve que f^{-1} n'est pas mesurable.

Exercice 2. Soit E la partie de X dont on considère la mesure dans le membre de gauche. Par définition $\mu(E) = \int_X \mathbf{1}_E \, \mathrm{d}\mu$. Mais par définition de E,

$$\forall x \in E, \ \frac{g(x)}{\varepsilon} > 1 = \mathbf{1}_E(x) \,.$$

Par croissance de l'intégrale des fonctions mesurables positives, on déduit :

$$\mu(E) = \int_X \mathbf{1}_E \, \mathrm{d}\mu = \int_E \mathbf{1}_E \, \mathrm{d}\mu \leq \int_E \frac{g}{\varepsilon} \, \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X g \, \mathrm{d}\mu \,.$$

Exercice 3.

1. On a $E_n = f^{-1}(]1/n, \infty[)$; comme $]1/n, \infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ pour la topologie standard, c'est un borélien de $\mathbb{R}$. Son image réciproque par la fonction mesurable f est donc un élément de $\mathcal{T}$.
2. Fixons $\varepsilon > 0$. La suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives car $E_n \subset E_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. La limite ponctuelle de cette suite est f. En effet étant donné $x \in X$, soit $f(x) > 0$ et alors il existe n_0 tel que $x \in E_{n_0}$ et donc $f(x) = f_{n_0}(x) = f_m(x)$, dès que $m \geq n_0$, soit $f(x) = 0$ et l'égalité $f(x) = f_m(x)$ est vraie pour tout $m \geq 1$. Le théorème de convergence monotone affirme alors que
$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \,.$$
En particulier, pour n_0 assez grand,
$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu - \int_X f_{n_0} \, \mathrm{d}\mu \right| < \varepsilon \,,$$
et l'inégalité souhaitée s'en déduit immédiatement.
3. Dans l'inégalité obtenue à la question précédente, le membre de gauche est $\int_{E_{n_0}} f \, \mathrm{d}\mu$. En appliquant l'exercice 2 à $g = f$ et $\varepsilon = 1/n_0$, on voit que
$$\mu(E_{n_0}) \leq n_0 \int_X f \, \mathrm{d}\mu \,.$$
Cette quantité est finie car f est intégrable et positive par hypothèse. Le choix $E = E_{n_0}$ convient donc.

Exercice 4.

1. C'est l'inégalité triangulaire : $|f(x)| \leq |\mathbf{1}_{A_n}(x) - f(x)| + |\mathbf{1}_{A_n}(x)|$. Donc si $|f(x)| > 2$, on a $1 \leq 2 - \mathbf{1}_{A_n}(x) < |\mathbf{1}_{A_n}(x) - f(x)|$, d'où l'on déduit l'inclusion attendue.
2. On applique l'exercice 2 avec $g = |\mathbf{1}_{A_n} - f|$ et $\varepsilon = 1$, on obtient :
$$\mu(\{x \in X \colon |\mathbf{1}_{A_n}(x) - f(x)| > 1\}) \leq \int_X |\mathbf{1}_{A_n} - f| \,\mathrm{d}\mu\,.$$
En combinant avec la question précédente et la croissance de la mesure μ, on déduit :
$$\mu(\{x \in X \colon |f(x)| > 2\}) \leq \int_X |\mathbf{1}_{A_n} - f| \,\mathrm{d}\mu\,.$$
Par hypothèse, le majorant tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Comme le membre de gauche est positif et ne dépend pas de n, on déduit $\mu(\{x \in X \colon |f(x)| > 2\}) = 0$.
3. On suit l'indication :
$$\int_X |f - f^2| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X |f - \mathbf{1}_{A_n}| \,\mathrm{d}\mu + \int_X |\mathbf{1}_{A_n} - f^2| \,\mathrm{d}\mu\,.$$
On écrit ensuite $\mathbf{1}_{A_n} - f^2 = (\mathbf{1}_{A_n} - f)(\mathbf{1}_{A_n} + f)$ et la question 2 implique que $|\mathbf{1}_{A_n}(x) + f(x)| \leq 3$, μ-p.p. En injectant ces remarques dans l'inégalité ci-dessus, on déduit :
$$\int_X |f - f^2| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X |f - \mathbf{1}_{A_n}| \,\mathrm{d}\mu + 3\int_X |\mathbf{1}_{A_n} - f| \,\mathrm{d}\mu\,.$$
On utilise à nouveau l'hypothèse de l'exercice et l'indépendance du membre de gauche par rapport à n pour conclure.
4. De la question précédente (et des résultats vus en cours), on déduit que $|f - f^2|$ est positive mesurable d'intégrale nulle, donc $f = f^2$, μ-p.p. Si l'on note $A = \{x \in X \colon f(x) = 1\}$, on conclut donc que $f = \mathbf{1}_A$, μ-p.p.