Éléments de correction du DS

Question de cours.
C'est une application du théorème des restes chinois. Comme 9, 11, et 13 sont 2 à 2 premiers entre eux, il existe un unique a qui convient modulo $9 \times 11 \times 13 > 1000$. En particulier, il existe au plus une solution positive à 3 chiffres.

Exercice 1.

1. On utilise alors la relation de récurrence :
$$U(X) = 7 + \sum_{n\geq 1}(6u_{n-1} + 4^n)X^n = 7 + 6XU(X) + \sum_{n\geq 1}(4X)^n .$$
On utilise $1 + \sum_{n\geq 1}(4X)^n = 1/(1-4X)$. On obtient : $U(X)(1-6X) = 7 + 1/(1-4X) - 1 = (6(1-4X)+1)/(1-4X)$. Le résultat attendu suit immédiatement.
2. La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle considérée est a priori $U(X) = a/(1-4X) + b/(1-6X)$. En évaluant en 0, on trouve $a+b=7$. En multipliant par X puis en faisant $X \to \infty$, on trouve $1 = a/4 + b/6$. En combinant ces deux équations on obtient $a=-2$, $b=9$.
3. On conclut :
$$\begin{aligned} U(X) &= -2 \times \frac{1}{1-4X} + 9 \times \frac{1}{1-6X} \\ &= -2\sum_{n\geq 0} 4^n X^n + 9 \sum_{n\geq 0} 6^n X^n . \end{aligned}$$
Ainsi pour tout $n \geq 0$, on a $u_n = -2 \times 4^n + 9 \times 6^n$.

Exercice 2. Notons $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

1. On voit que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$: on a $0, 1 \in A$ et si $a + ib\sqrt{2}$ et $c + id\sqrt{2}$ sont dans A, la différence $(a-c) + i(b-d)\sqrt{2}$ et le produit $(ac - 2bd) + i(ad+bc)\sqrt{2}$ de ces deux éléments sont encore dans A.
2. S'il existe $z' \in A$ tel que $zz' = 1$, alors $1 = \lambda(zz') = (zz')\overline{zz'} = (z\bar{z})(z'\bar{z'}) = \lambda(z)\lambda(z')$. En écrivant $z = a + ib\sqrt{2}$ et $z' = a' + ib'\sqrt{2}$, on a donc $1 = (a^2+2b^2)(c^2+2d^2)$. Donc $\lambda(z)$ est un entier positif divisant 1, c'est donc 1. Réciproquement si $1 = \lambda(z) = z\bar{z} = 1$ alors $\bar{z}$ est l'inverse de z or si $z \in A$ alors $\bar{z} \in A$, donc $\bar{z}$ est l'inverse de z dans A.
3. D'après la question précédente, $z = a + ib\sqrt{2} \in A$ est inversible si et seulement si $a^2 + 2b^2 = 1$. Cela impose $b = 0$ et $a = \pm 1$. Réciproquement $z = \pm 1$ est inversible dans A. Donc $A^\times = \{\pm 1\}$.
4. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Pour tout réeI α, il existe un entier à distance au plus 1/2 de α. On applique cette remarque à $\alpha = x$ puis à $\alpha = y/\sqrt{2}$: il existe des entiers n, m tels que $|n - x| \leq 1/2$ et $|m - (y/\sqrt{2})| \leq 1/2$. On a alors $\lambda(z - (n + im\sqrt{2})) \leq 1/4 + 2/4 < 1$.
5. On se donne $x, y \in A$ avec $y \neq 0$. On applique la question précédente à $z = x/y$: on obtient $q \in A$ tel que $\lambda\big((x/y) - q\big) < 1$. On multiplie par $\lambda(y) \geq 0$ et on utilise la formule $\lambda(z_1)\lambda(z_2) = \lambda(z_1 z_2)$ (évidente d'après la définition de λ) pour déduire $\lambda(x - qy) < \lambda(y)$. En posant $r = x - qy$, on a obtenu la division euclidienne $x = qy + r$ de x par y dans A relativement à λ.
6. Le choix $(u, v) = (1 + i\sqrt{2}, 1)$ convient. L'anneau A est euclidien donc principal et comme 2 et $-3 + 2i\sqrt{2}$ sont premiers entre eux dans A (d'après la relation de Bézout que l'on vient d'établir), on déduit que l'idéal qu'ils engendrent est égal à $(1) = A$.

7. Si $z \in A$ s'écrit $z = z_1 z_2$ avec $z_1, z_2 \in A$, alors en appliquant λ, on a $\lambda(z) = \lambda(z_1)\lambda(z_2)$ (cf question précédente). Par hypothèse $\lambda(z)$ est un nombre premier. Aussi $\lambda(z_1)$ et $\lambda(z_2)$ sont des entiers positifs, donc l'un des deux vaut 1, c'est-à-dire z_1 ou z_2 est inversible d'après la question 2. Donc z est irréductible.
8. On remarque que $11 = 9 + 2 = (3 + i\sqrt{2})(3 - i\sqrt{2})$. De plus $\lambda(3 + i\sqrt{2}) = \lambda(3 - i\sqrt{2}) = 11$ donc $(3 + i\sqrt{2})$ et $(3 - i\sqrt{2})$ sont irréductibles dans A d'après la question précédente.