Éléments de correction du DS

Exercice 1.

1. On note $G = \mathrm{Aff}(A)$.
   (a) On a
   $$M_{a,b}M_{1,y}M_{a,b}^{-1} = M_{a,b}M_{1,y}M_{a^{-1},-ba^{-1}} = M_{1,ay}\,.$$
   Donc $N = \{M_{1,y} \colon y \in A\} \triangleleft G$ et bien sûr $N \simeq A$ *via* le morphisme $M_{1,y} \mapsto y$. Aussi $H = \{M_{x,0} \colon x \in A^\times\}$ est un sous-groupe de G isomorphe à $A^\times$ *via* $M_{x,0} \mapsto x$. On a $N \cap H = \{\mathrm{Id}\}$ et $G = NH$ car $M_{x,y} = M_{1,y}M_{x,0}$. Donc G est produit semi-direct de N et H et d'après ce que l'on a remarqué ci-dessus, on déduit $G \simeq A \rtimes A^\times$.
   (b) Les groupes $A^\times$ et A sont abéliens. Il en est donc de même de N et H. De plus, comme $G = N \rtimes H$, on a $G/N \simeq H$, donc N est un sous-groupe distingué résoluble de G tel que G/N est résoluble. On déduit que G est résoluble.
2. On note $G = \mathrm{Aff}(5)$.
   (a) Les éléments de $H = \langle M_{2,0}\rangle$ sont de la forme $M_{2^i,0}$, donc $M_{2,1} \notin H$. Par ailleurs, comme 2 est d'ordre 4 modulo 5, l'ordre de $M_{2,0}$ est 4. Par le calcul, on voit aussi que $H' = \langle M_{2,1}\rangle$ est d'ordre 4.
   Par la question 1(b), on a $|G| = 5 \times 4$ donc H et H' sont des 2-Sylow distincts de G. De plus le nombre n_2 de 2-Sylow de G vérifie $n_2 \mid 5$. Finalement $n_2 = 5$.
   (b) Soit n_5 le nombre de 5-Sylow de G. Les 5-Sylow de G sont d'ordre 5 et d'après Sylow $n_5 \mid 4$ et $n_5 \equiv 1 \bmod 5$. On déduit $n_5 = 1$. On vérifie facilement la formule $M_{1,1}^i = M_{1,i}$ d'où l'on déduit que $M_{1,1}$ est d'ordre 5, donc engendre l'unique 5-Sylow de G.
   (c) Si $M \in G$ est d'ordre une puissance de 2 alors $\langle M\rangle$ est un 2-groupe, donc est contenu dans un 2-Sylow S de G. Les 2-Sylow de G forment uen unique orbite sous l'action par conjugaison de G (par Sylow), donc, comme $\langle M_{2,0}\rangle$ est aussi un 2-Sylow de G, un conjugué de M est élément de $\langle M_{2,0}\rangle$.
3. On note $G = \mathrm{Aff}(p^2)$.
   (a) Le fait que ψ est un morphisme de groupes se déduit immédiatement de la commutativité de A et du fait que le coefficient en position $(1,1)$ de $M_{a,b}M_{c,d}$ est ac. On a $\ker\psi = \{M_{x,y} \in G \colon : x^p = 1\}$. Pour former un élément $M_{x,y} \in \ker\psi$, on a $p^2 = |A|$ choix pour y. Quant à x il parcourt le sous-groupe $K = \{z \in A^\times \colon z^p = 1\}$. Comme $A^\times$ est cyclique d'ordre $p(p-1)$, il existe dans $A^\times$ un unique sous-groupe d'ordre p, nécessairement inclus dans K, et donc égal à K. Finalement $\ker\psi = p^3$.
   (b) Comme $|G| = p^3(p-1)$, le sous-groupe $\ker\psi$ est un p-Sylow de G d'après la question précédente. Comme c'est un sous-groupe distingué de G, c'est, d'après Sylow, l'unique sous-groupe d'ordre p^3 (i.e. l'unique p-Sylow de G.
4. On note $G = \mathrm{Aff}(k)$.
   (a) On a $|H| = q-1$. C'est un groupe abélien (isomorphe à $k^\times$) donc, d'après Sylow, il admet un unique p-Sylow. Comme $|G| = q(q-1)$ et que $\gcd(q, q-1) = 1$, la plus grande puissance de p divisant $|H|$ est également la plus grande puissance de p divisant $|G|$. Donc P est un p-Sylow de G.

(b) Comme H est abélien et $P \subset H$, on a $N(P) \supset H$. Réciproquement étant donné $M_{a,0} \in P$, si $M_{x,y} M_{a,0} M_{x,y}^{-1} = M_{a,(1-a)y} \in P \subset H$, alors $(1-a)y = 0$. Si l'on choisit $a \in k^\times \setminus \{1\}$ (possible car $q \geq 3$), on déduit $y = 0$, donc $M_{x,y} = M_{x,0} \in H$.

(c) D'après la question précédente, le nombre de p-Sylow de G est $[G : N(P)] = q$.

Exercice 2.

1. Dans S_n les classes de conjugaison sont déterminées par le type de décomposition en produit de cycles disjoints. Homis Id, les éléments de V_4 sont exactement les produits de transpositions qui commutent dans S_4 donc V_4 est réunion de 2 clases de conjugaison dans S_4. En particulier $V_4 \triangleleft S_4$.
2. On a $V_4 \triangleleft S_4$ et, hormis Id, les éléments de V_4 sont sans point fixe donc $H \cap V_4 = \mathrm{Id}$. Aussi, H s'identifie clairement au groupe S_3 des permutations de $\{1,2,3\}$, donc $|HV_4| = (|H| \times |V_4|)/|H \cap V_4| = 24$, puis $HV_4 = S_4$. On conclut que $S_4 = V_4 \rtimes H$.
3. L'application donnée dans l'énoncé est un isomorphisme de groupes (τ_1 et τ_2 commutent, la surjectivité et l'injectivité sont évidentes) et induit donc un isomorphisme $\mathrm{Aut}(V_4) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Tout automorphisme de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ étant linéaire, on conclut en utilisant $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
4. On note que $(12)\tau_1(12) = \tau_1$ et que $(12)\tau_2(12) = (23)(14) = \tau_1\tau_2$ donc $\gamma \circ \varphi((12))$ est la matrice triangulaire supérieure à coeffcients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ayant exactement 3 coeffcients non nuls. De même $(123)\tau_1(123)^{-1} = \tau_1\tau_2$ et que $(123)\tau_2(123)^{-1} = \tau_1$, donc $\gamma \circ \varphi((123))$ est la matrice transposée de $\gamma \circ \varphi((12))$.
5. Par Lagrange, le sous-groupe $\langle (12), (123) \rangle$ de $H \simeq S_3$ est d'ordre multiple de 2 (ordre de (12)) et de 3 (ordre de (123)) ; il est donc de même ordre que H et coïncide donc avec H.