Éléments de correction de l'examen de première session

Exercice 1.

1. Fixons $x \in \mathbb{R}$. L'application $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$ est continue (comme produit de fonctions usuelles continues) sur $]0,\infty[$ donc mesurable relativement aux tribus boréliennes de $]0,\infty[$ et $\mathbb{R}$. Par ailleurs cette application est bornée donc intégrable sur $[0,1]$ et $t^2\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt) \to 0$, lorsque $t \to \infty$ donc la fonction positive considérée est majorée sur $[1,\infty[$ par C/t^2, pour une certaine constante $C > 0$. Ce dernier majorant définit une focntion intégrable sur $[1,\infty[$, par le critère de Riemann. On conclut que $(t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)) \in \mathscr{L}^1(]0,\infty[)$.
2. On a vu en 1 que $(t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)) \in \mathscr{L}^1(]0,\infty[)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $t > 0$ fixé. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\,.$$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut majorer :
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq t\mathrm{e}^{-t^2}\,. \qquad (t > 0.)$$
Par la même méthode qu'à la question 1, on voit que le majorant définit une fonction de $\mathscr{L}^1(]0,\infty[)$. On est donc dans les conditions d'application du théorème de dérivation sous $\int$: la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$f'(x) = -\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t\,. \qquad (x \in \mathbb{R}.)$$
3. Fixons $x \in \mathbb{R}$; en intégrant par parties on obtient :
$$f'(x) = [(\mathrm{e}^{-t^2}/2)\sin(xt)]_0^\infty - \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2/2}x\cos(xt)\,\mathrm{d}t = -\frac{x}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2/2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t\,.$$
On déduit que f satisfait bien l'équation différentielle attendue.
4. On résout l'équation différentielle de la question précédente. Les solutions sont définie sur $\mathbb{R}$ et sont de la forme
$$x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{4}}\,, \qquad C \in \mathbb{R}\,.$$
Parmi ces solutions, f est la fonction dont la valeur en 0 est $C = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}/2$. On conclut :
$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{4}}\,. \qquad (x \in \mathbb{R}.)$$
5. La fonction g est positive et mesurable relativement aux tribus boréliennes de $]0,\infty[\times]0,\infty$ et de $\mathbb{R}$ car continue comme produit de composées de fonctions usuelles continues. Le théorème de Tonelli s'applique et l'intégrale double du membre de gauche coïncide avec les deux quantités suivantes :
$$\int_{x\in]0,\infty[}\left(\int_{y\in]0,\infty[} g(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{y\in]0,\infty[}\left(\int_{x\in]0,\infty[} g(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,.$$
La première de ces deux intégrales se calcule explicitement :
$$\int_{x\in]0,\infty[}\left[\frac{-1}{2(1+x^2)}\exp(-y^2(1+x^2))\right]_{y=0}^\infty \mathrm{d}x = \frac{1}{2}[\mathrm{Arctan}(x)]_0^\infty = \frac{\pi}{4}\,.$$

Quant à la seconde intégrale, elle est trivialement égale à la quantité du membre de droite attendue.

6. À $y > 0$ fixé on fait le changement de variable $u = yx$ dans l'intégrale intérieure du membre de droite de la série d'égalités de 5. On obtient :

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{y}\,.$$

En réinjectant dans la série d'égalités de 5, on déduit $J^2 = \pi/4$. Donc $J = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 2.

1. Fixons $n \geq 1$. La fonction f_n est définie et continue sur $]0,\infty[$; elle est donc mesurable relativement aux tribus boréliennes de $]0,\infty[$ et $\mathbb{R}$. Par ailleurs f_n est prolongeable par continuité en 0 (donc intégrable sur $]0,1[$) et on a clairement $|f_n(x)| \leq 1/x^2$ pour tout $x \geq 1$ (donc f_n est intégrable sur $]1,\infty[$). On conclut que $f_n \in \mathscr{L}^1(]0,\infty[)$.
2. Supposons $0 < x \leq 1$. On a $\exp((1/n)\log(1+x^n)) \to 1$, et donc $f_n(x) \to 1/(1+x^2)$, lorsque $n \to \infty$. Supposons maintenant $x > 1$: on a $\exp((1/n)\log(1+x^n) = \exp((1/n)\log(1+x^{-n}))\exp(\log x)$. En notant que $0 < 1/x < 1$, on obtient $f_n(x) \to 1/(x(1+x^2))$ lorsque $n \to \infty$.
3. On suit l'indication ; on trouve $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$. On a donc :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}\mu = \int_1^\infty (\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2})\,\mathrm{d}\mu = \big[\log(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\big]_1^\infty = \big[-\frac{1}{2}\log(1+x^{-2})\big]_1^\infty = \frac{\log 2}{2}\,.$$

4. D'après ce qui précède, (f_n) est une suite de fonctions mesurables (question 1) admettant une limite ponctuelle f (question 2) sur $]0,\infty[$. Par ailleurs, on a vu en 1 que pour tout $n \geq 1$, et pour tout $x > 0$, on a $|f_n(x)| \leq g(x)$ où g est définie par $g(x) = 1$ si $0 < x \leq 1$ et $g(x) = 1/x^2$ si $x > 1$. La fonction g est continue par morceaux (et même continue) sur $]0,\infty[$ donc mesurable pour les tribus borélennes de $]0,\infty[$ et $\mathbb{R}$. On a donc $g \in \mathscr{L}^1(]0,\infty[)$ d'après le critère de Riemann. Le théorème de convergence dominée s'applique et prouve l'existence de la limite L ; d'après la question 3, celle-ci est égale à

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{\log 2}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\log 2}{2}\,.$$

Exercice 3.

1. On remarque que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $E_k = f^{-1}(]2^{k-1},2^k])$. L'intervalle $]2^{k-1},2^k]$ est un borélien de $\mathbb{R}$ (c'est par exemple l'intersection de l'intervalle ouvert $]2^{k-1},2^k+1[$ et de l'intervalle fermé $[2^{k-1},2^k]$), son image récirpoque E_k par la fonction mesurable f est donc une partie mesurable de $\mathbb{R}^d$.
2. Si $x \in E_k$ pour un certain k alors $f(x) > 2^{k-1} > 0$ et l'on obtient ainsi une première inclusion. Réciproquement si $x \in \mathbb{R}^d$ est tel que $f(x) > 0$, on peut choisir un entier $n \in \mathbb{N}$ (dé'pendant de x) tel que $f(x) > 2^{-n}$ On a alors en aprticulier $x \in E_{-n}$. On obtient l'égalité d'ensembles attendue. Enfin pour la disjonction des E_k : fixons des indices entiers $i < j$. On a $i \leq j-1$ et donc $2^i \leq 2^{j-1}$, ce qui prouve que les intervalles $]2^{i-1},2^i]$ et $]2^{j-1},2^j]$ sont disjoints. Il s'ensuit que $E_i \cap E_j = \emptyset$.
3. Fixons $x \in \mathbb{R}^d$. Si $f(x) = 0$ alors $x \notin E_k$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On obtient alors $F_n(x) = 0$ pour tout $n \geq 0$. Sinon $f(x) > 0$ et alors x est élément d'un unique E_{k_0} d'après la question précdente. On alors $F_n(x) = 2^{k_0}$ pour tout $n \geq k_0$. On a prouvé l'existence de la limite ponctuelle F de (F_n) sur $\mathbb{R}^d$: F est définie par

$$F(x) = 0 \text{ si } f(x) = 0\,, \qquad F(x) = 2^k \text{ si } x \in E_k\,.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^d$: alors soit $f(x) = 0$ et dans ce cas $F(x) = 0$ et on obtient l'encadrement attendu, soit $x \in E_k$ pour un unique entier k et alors

$$\frac{1}{2}F(x) = 2^{k-1} \leq f(x) < 2^k = F(x)\,.$$

4. Par positivité des coefficients, il est clair que la suite (F_n) est une suite croissante de fonctions mesurables positives. D'après la question 3, le théorème de convergence monotone, et la disjonction des ensembles E_k :
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} 2^k \lambda(E_k) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} F_n \, \mathrm{d}\lambda \to \int_{\mathbb{R}^d} F \, \mathrm{d}\lambda$$
La fonction F, mesurable (et positive)) comme limite simple des fonctions mesurables F_n, est intégrable si et seulement la suite $(\sum_{k=-n}^{n} 2^k \lambda(E_k))_n$ converge (i.e. ssi cette suite, positive, est majorée). Or d'après la question 3, l'intégrabilité des fonctions mesurables positives F et f sont équivalentes.