F. Jouve, A.-C. Le Bras

Corrigé succinct du partiel

Exercice 1

On écrit $p(z;t) = p(z;0) + (p(z;t) - p(z;0))$. Par compacité du cercle de centre 0 et de rayon R, et par continuité, il existe $c > 0$ tel que $|p(z;0)| \geqslant c$ si $|z| = R$. Pour t assez petit, on a, par uniforme continuité de $p(z;t)$ comme fonction de $(z,t) \in C(0,R) \times [0,1]$, l'inégalité $|p(z;t) - p(z,0)| < c/2$ pour tout z de module R. On applique alors le théorème de Rouché pour conclure.

Exercice 2

Montrons que la seule fonction f qui convient est la fonction nulle.

Déjà, la seule singularité possible pour f est en $z = 1$. Considérons $g(z) = (z-1)^2 f(z)$. Alors pour tout $z \neq 1$, on a $|g(z)| \leqslant (2|z|)^{3/2}|z-1|^{1/2}$. Ainsi g est bornée au voisinage de 1 et la singularité éventuelle de g en 1 est éliminable d'après le théorème de Riemann. On note encore g le prolongement de g en une fonction entière. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $|g(z)| \leqslant C|z|^2$. D'après la formule intégrale de Cauchy d'ordre supérieur, le n-ème coefficient a_n du DSE de g en 0 est donné par

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} \frac{g(w)}{w^{n+1}} \mathrm{d}w\,,$$

où $C(0,r)$ est le cercle de centre 0 et de rayon r (quelconque) parcouru une fois dans le sens positif. On déduit immédiatement de la borne sur $|g(z)|$ que g est un polynôme de degré $\leqslant 2$. Revenant à la définition de g, on voit alors que f doit être constant. Mais on doit avoir $g(0) = 0$. Donc $f(0) = 0$, puis f est la fonction nulle.

Problème

1. Si $-z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, alors $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On note log la détermination principale du logarithme ; pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ on définit $(-z)^{\lambda-1} = \exp((\lambda-1)\log(-z))$.

2. F est une partie finie de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. On peut donc trouver des réels $0 < r < R$ tels que la couronne (pleine) de rayons (r,R) contienne F. Comme F est fini et n'intersecte pas $\mathbb{R}_+$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $F \cap \{z \colon \operatorname{Re} z \geqslant 0,\ |\operatorname{Im} z| \leqslant \varepsilon\} = \emptyset$. La formule intégrale de Cauchy appliquée à la fonction entière constante égale à 1 et la courbe lisse par morceaux $\gamma_{\varepsilon,r,R}$ donne pour tout $a \in F$,
$$1 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{\varepsilon,r,R}} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \operatorname{Ind}(\gamma_{\varepsilon,r,R}; a)\,.$$

3. On cherche à appliquer la formule des résidus à g_λ intégrée le long de $\gamma_{\varepsilon,r,R}$.

(a) La définition donnée en 1 de $z \mapsto (-z)^{\lambda-1}$ correspond en coordonnées polaires à

$$re^{i\theta} \mapsto r^{\lambda-1} e^{i(\lambda-1)(\theta-\pi)} \qquad (r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi)\,.$$

Cette définition permet de voir que g_λ se prolonge en une fonction continue sur $(\{\operatorname{Im} z > 0\} \cup \mathbb{R}_+^*) \setminus F$ ainsi que sur $(\{\operatorname{Im} z < 0\} \cup \mathbb{R}_+^*) \setminus F$. On a pour tout réel $t > 0$,

$$\lim_{\substack{\operatorname{Im} z>0 \\ z\to t}} g_\lambda(z) = -e^{-i\pi\lambda} t^{\lambda-1} f(t)\,, \qquad \lim_{\substack{\operatorname{Im} z<0 \\ z\to t}} g_\lambda(z) = -e^{i\pi\lambda} t^{\lambda-1} f(t)\,.$$

La formule souhaitée s'en déduit.

(b) En utilisant la fomule permettant de majorer le module d'une intégrale curviligne par le produit de la longueur de la courbe par le sup de la fonction intégrée sur le support de la courbe, on obtient immédiatement :

$$\left|\int_{\gamma^2_{\varepsilon,r,R}} g_\lambda(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \pi R \max_{|z|=R} |g_\lambda(z)| = \pi \max_{|z|=R} |z|^\lambda |f(z)|\,.$$

et de même $\left|\int_{\gamma^4_{\varepsilon,r,R}} g_\lambda(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \pi \max_{|z|=r} |z|^\lambda |f(z)|$.

(c) D'après le théorème des résidus et les questions 2, 3(a) et 3(b), on déduit l'égalité annoncée.

4. Les hypothèses sur P et Q impliquent que l'intégrale $\int_0^\infty R(t)t^{\lambda-1}\mathrm{d}t$ est absolument convergente si $0 < \operatorname{Re}\lambda < \deg Q - \deg P$. Par ailleurs, fixons des réels a, b tels que $0 < a < b < \deg Q - \deg P$. Pour tout $t > 0$ on a $|R(t)t^{\lambda-1}| \leqslant |R(t)|(t^{a-1} + t^{b-1})$. Ce majorant est une fonction intégrable de t sur $\mathbb{R}_+^*$. Dans ces conditions, on déduit *via* le théorème de Morera (et le théorème de Fubini–Tonelli), l'holomorphie de l'intégrale à paramètre $\int_0^\infty R(t)t^{\lambda-1}\mathrm{d}t$. On conclut en utilisant le fait que a et b sont arbitraires.

5. On utilise le développement en série entière classique de $(1+z)^\alpha$ pour $|z| < 1$ et l'on écrit, pour $a \notin \mathbb{R}_+$ et $z \notin \mathbb{R}_+$,

$$(-z)^{\lambda-1} = (-a)^{\lambda-1}\left(1 + a^{-1}(z-a)\right)^{\lambda-1}\,.$$

On déduit

$$(-z)^{\lambda-1} = (-a)^{\lambda-1}\left(1 + \sum_{k\geqslant 1} \frac{(\lambda-1)\cdots(\lambda-k)}{k!} a^{-k}(z-a)^k\right)\,.$$

6. En combinant les questions 3(c), 4, et 5, on voit que le polynôme cherché est

$$\sum_{a\in F} (-a)^{\lambda-1}\left(c_{a,-1} + \sum_{k=1}^{N(a)-1} \frac{c_{a,-k-1} a^{-k}(\lambda-1)\cdots(\lambda-k)}{k!}\right)\,.$$

7. Le polynôme $P_{F,R}$ de la question 6 définit bien sûr une fonction entière. Quant à $\lambda \mapsto \sin \pi\lambda$, c'est une fonction entière avec des zéros simples en tous les entiers. Le quotient $\pi P_{F,R}(\lambda)/\sin(\pi\lambda)$, qui coïncide avec $h_R(\lambda)$ si $0 < \operatorname{Re}\lambda < \deg Q - \deg P$ définit donc un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, de h_R.

Exercice 3