DM

Seul(e) ou en binôme. À rendre en TD le 20 septembre.

Exercice 1. (DS, L2 17-18)

Soit p un nombre premier et $n \geq 1$ un entier.

1. Soit H un sous-groupe du groupe $G = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Quel est l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs possibles pour l'ordre de H ?
2. Pour chaque $j \in \mathcal{E}$, dire s'il existe effectivement un sous-groupe de G d'ordre j, dire combien il y a de tels sous-groupes et dire s'ils sont cycliques ou non.
3. Application : lorsque $p = 2$ et $n = 3$, donner une partie génératrice pour un sous-groupe d'indice 4 de G.
4. On suppose encore $p = 2$, $n = 3$. On note $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ l'ensemble des classes de congruence inversibles modulo 8 c'est-à-dire l'ensemble des $\bar{a} \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ tels qu'il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $\bar{a}\bar{u} = \bar{1}$ dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. On rappelle que $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ est un groupe pour la multiplication.
   (a) Donner la liste des éléments de $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ et calculer l'ordre de chacun de ces éléments ?
   (b) Le groupe $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ est-il cyclique ?
5. On suppose dans cette question $p = 3$, $n = 2$. On note $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$ le groupe multiplicatif des classes de congruence inversibles modulo 9.
   (a) Montrer que l'application $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ définie par
   $$(\bar{a}, \bar{x}) \mapsto \overline{ax}\,,$$
   est une action de groupes.
   (b) Calculer l'ordre de 2 dans $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$ puis déterminer les orbites dans l'action définie à la question (a).

Exercice 2. (Examen de session 1, L2 17-18)

L'objectif de cet exercice est d'étudier la valeur de l'indice de certains sous-groupes du groupe $\mathcal{A}_4$. (On rappelle que $\mathcal{A}_4$ est le groupe des permutations de 4 éléments dont la signature vaut 1.)

1. Quel est l'ordre du groupe $\mathcal{A}_4$?
2. Soit G un groupe fini, N un sous-groupe distingué de G, et $\pi\colon G \to G/N$ la surjection canonique (dont on rappelle qu'elle associe à $x \in G$ sa classe à gauche xN modulo N). On note $(G : N)$ l'indice de N dans G et on se donne un élément $a \in G$ dont l'ordre m est premier à $(G : N)$.
   (a) Montrer que l'ordre de $\pi(a)$ dans le groupe quotient G/N divise $(G : N)$ et m.
   (b) Déduire que $a \in N$.
3. En utilisant la question 2, montrer que $\mathcal{A}_4$ n'admet pas de sous-groupe d'indice 2.
4. Donner la liste des éléments d'ordre 2 de $\mathcal{A}_4$ et montrer que $\mathcal{A}_4$ admet un sous-groupe H d'indice 3.
5. Montrer que le sous-groupe H est distingué dans $\mathcal{A}_4$. Trouver un ensemble de représentants pour le quotient $\mathcal{A}_4/H$.
6. Pour chaque diviseur $d \geq 1$ de l'ordre de $\mathcal{A}_4$, dire s'il existe un sous-groupe d'indice d dans $\mathcal{A}_4$ et donner, le cas échéant, un exemple de tel sous-groupe.

<u>Exercice 3.</u> (Examen de session 2, L2 17-18)

Le but de cet exercice est de donner un exemple de groupe non abélien dont tous les sous-groupes sont distingués. On rappelle que pour un groupe quelconque G noté multiplicativement, le *centre* de G est l'ensemble $\{x \in G \colon \forall y \in G\,, xy = yx\}$.

On considère le produit cartésien $H = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ que l'on munit de la loi $\star$ définie par

$$(a,b) \star (c,d) = (a + (-1)^b c, b + d)\,,$$

où, pour $b \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, la quantité $(-1)^b$ est définie comme étant égale à $(-1)^{b_0}$, où b_0 est un entier quelconque dont la classe modulo 4 est b.

1. Le groupe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ est-il cyclique ? Si oui, donner la liste de ses générateurs.
2. Montrer que $(H, \star)$ est un groupe. Quel est son élément neutre ? Quel est son ordre ?
3. Le groupe $(H, \star)$ est-il abélien ? Justifier.
4. Montrer que l'élément $(2, 2)$ est dans le centre de H.
5. On note K le sous-groupe de H engendré par l'élément $(2, 2)$. Montrer que K est un sous-groupe distingué de H. Quel est l'ordre du groupe quotient H/K ?
6. Montrer que le groupe quotient H/K n'est pas abélien.
   [On pourra par exemple considérer la classe modulo K des éléments $(1, 0)$ et $(0, 1)$ de H.]
7. Montrer que la classe de $(0, 2)$ modulo K est l'unique élément d'ordre 2 de H/K, et que cet élément est dans le centre de H/K.
8. Déduire que tous les sous-groupes de H/K sont distingués.