DS

6/11/2017. Durée : 1h30

Aucun document, aucun appareil électronique autorisé. Le sujet contient une question de cours et 2 exercices indépendants. On rédigera **lisiblement** *et on justifiera les réponses avec soin.*

Question de cours. [Barême indicatif : 2 points]

Justifier (soigneusement) qu'il existe au plus un entier naturel a dont l'écriture décimale a au plus 3 chiffres et dont le reste dans la division euclidienne par 9 (resp. par 11, par 13) est égal à 4 (resp. égal à 2, égal à 7) ? (On ne demande pas de calculer explicitement a.)

Exercice 1. [Barême indicatif : 2+1+2 points]

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_n - 6u_{n-1} = 4^n\,, \ n \geq 1\,. \end{cases}$$

1. On considère la série génératrice $U(X) = \sum_{n\geq 0} u_n X^n$ associée à $(u_n)_{n\geq 0}$. Montrer que
$$U(X) = \frac{7-24X}{(1-6X)(1-4X)}\,.$$
2. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{7-24X}{(1-6X)(1-4X)}$ en éléments simples.
3. Déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \geq 0$.

Exercice 2. [Barême indicatif : 1+2+1+2+2+1,5+2+1,5 points]

On considère l'ensemble
$$\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] := \{a + ib\sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Z}\}\,,$$
où $i \in \mathbb{C}$ vérifie $i^2 = -1$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un anneau.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on note $\bar{z}$ son conjugué. On définit l'application $\lambda\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ par $\lambda(z) = z\bar{z}$.

2. Montrer que $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est inversible si et seulement si $\lambda(z) = 1$.
3. Déterminer le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.
4. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $\lambda(z - (a + ib\sqrt{2})) < 1$.
5. Déduire que l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est euclidien relativement à λ.
   [On pourra partir de $x, y \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, avec $y \neq 0$, et appliquer la question précédente à $z = x/y$.]
6. Déterminer des éléments $u, v \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ tels que $2u + (-3 + 2i\sqrt{2})v = 1$ puis justifier que l'idéal I de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ engendré par 2 et $-3 + 2i\sqrt{2}$ est principal et en donner un générateur.
7. Soit $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ tel que $\lambda(z)$ est un nombre premier. Montrer que z est irréductible dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.
8. Donner la factorisation de $z = 11$ en produit d'irréductibles dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

FIN

Correction disponible sur `www.math.u-bordeaux.fr/~fjouve001` à partir de 14h environ le 6/11.