DS

25/10/2018. Durée : 1h30

Aucun document, aucun appareil électronique autorisé. Le sujet contient 2 exercices indépendants.

Exercice 1.

Étant donné un anneau A (commutatif et unitaire), on note $A^\times$ le groupe des éléments inversibles de A et on considère le sous-groupe suivant de $\mathrm{GL}_2(A)$:

$$\mathrm{Aff}(A) = \left\{ M_{x,y} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in A^\times, y \in A \right\}.$$

1. On étudie dans cette question quelques propriétés de $\mathrm{Aff}(A)$ satisfaites pour tout anneau A.
   (a) Montrer que $\{M_{1,y} \colon y \in A\}$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aff}(A)$ puis déduire que $\mathrm{Aff}(A)$ est isomorphe à un produit semi-direct $A \rtimes A^\times$. (On ne demande pas de déterminer l'action par automorphismes associée.)
   (b) Montrer que $\mathrm{Aff}(A)$ est un groupe résoluble.
2. Dans cette question $A = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. On note $\mathrm{Aff}(5)$ le groupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.
   (a) En remarquant que $M_{2,1}$ n'appartient pas au sous-groupe de $\mathrm{Aff}(5)$ engendré par $M_{2,0}$, donner le nombre de 2-Sylow de $\mathrm{Aff}(5)$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique sous-groupe d'ordre 5 dans $\mathrm{Aff}(5)$ et que $M_{1,1}$ engendre ce sous-groupe.
   (c) Montrer que tout élément de $\mathrm{Aff}(5)$ dont l'ordre est une puissance de 2 est conjugué à un élément du sous-groupe engendré par $M_{2,0}$.
3. Dans cette question $A = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ où p est un nombre premier fixé. On rappelle que le groupe $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^\times$ est cyclique et on note $\mathrm{Aff}(p^2)$ le groupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$.
   (a) On considère l'application $\varphi\colon \mathrm{Aff}(p^2) \to (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^\times$ définie par $M_{x,y} \mapsto x^p$. Montrer que φ est un morphisme de groupes et déterminer l'ordre n de $\ker\varphi$ en fonction de p.
   (b) Montrer que $\ker\varphi$ est l'unique sous-groupe de $\mathrm{Aff}(p^2)$ d'ordre n.
4. Dans cette question $A = k$ est un corps *fini* à $q \geq 3$ éléments. On fixe un diviseur premier p de $q-1$.
   (a) Justifier que le sous-groupe $H = \{M_{x,0} \colon x \in k^\times\}$ de $\mathrm{Aff}(k)$ admet un unique p-Sylow P et que P est également un p-Sylow de $\mathrm{Aff}(k)$.
   (b) Montrer que le normalisateur $N(P)$ de P dans $\mathrm{Aff}(k)$ est égal à H.
   (c) Déduire le nombre de p-Sylow de $\mathrm{Aff}(k)$.

Exercice 2.

On désigne par S_4 le groupe des permutations de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$. Dans S_4 on considère :

$$V_4 = \{\mathrm{Id}, (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}.$$

1. Justifier que V_4 est un sous-groupe distingué dans S_4.
2. On définit $H = \{\sigma \in S_4 \colon \sigma(4) = 4\}$. Justifier que S_4 est produit semi-direct de H et V_4.

Dans la suite de l'exercice on cherche à décrire le morphisme $\psi\colon H \to \mathrm{Aut}(V_4)$ tel que $S_4 = V_4 \rtimes_\psi H$.

3. On note $\tau_1 = (12)(34)$ et $\tau_2 = (13)(24)$. Montrer que l'application

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to V_4\,, \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mapsto \tau_1^{\varepsilon_1}\tau_2^{\varepsilon_2}$$

induit un isomorphisme de groupes $\gamma\colon \mathrm{Aut}(V_4) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

4. Calculer l'image des permutations (12) et (123) par $\gamma \circ \psi$. Pour les applications linéaires cherchées, on donnera les matrices relativement à la base canonique du $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
5. Justifier que $\gamma \circ \psi$ est entièrement déterminé par sa valeur en (12) et (123).

FIN

Correction disponible sur `www.math.u-bordeaux.fr/~fjouve001` à partir de 19h environ le 25/10.