DS

7/11/2018. Durée : 1h30

Aucun document, aucun appareil électronique autorisé. Le sujet contient 4 exercices. Ils sont indépendants, à l'exception de la question 3 de l'ex. 3 et de la question 2 de l'ex. 4 qui utilisent l'ex. 2. On rédigera **lisiblement** *et on justifiera les réponses avec soin.*

[Barème indicatif : Ex 1 : 4,5=1,5+1,5+1,5, Ex2 : 2,5, Ex3 : 6=1+3+2, Ex 4 : 7=1,5+1,5+2,5+1,5]

Dans tout le sujet, si A est une partie d'un ensemble X, on note $\mathbf{1}_A$ la *fonction indicatrice de* A définie sur X par $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ si $x \in X \setminus A$.

Exercice 1. Soit $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. On considère :

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{Z} \colon \forall n \geq 1\,,\ 2n \in A \text{ si et seulement si } 2n+1 \in A\}\,.$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{Z}$. *Dans la suite, on munit $\mathbb{Z}$ de la tribu $\mathcal{T}$.*
2. Soit $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'application définie par $f(n) = n + 2$. Montrer que f est une bijection mesurable.
3. Montrer que la réciproque f^{-1} de f n'est pas mesurable.

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $g \colon X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction mesurable (on munit $\mathbb{R}_{\geq 0}$ de la tribu borélienne associée à sa topologie standard). Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu(\{x \in X \colon g(x) > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X g \, \mathrm{d}\mu\,.$$

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ une fonction *à valeurs positives*. On fixe $\varepsilon > 0$ et on souhaite montrer qu'il existe $E \in \mathcal{T}$ tel que

$$\mu(E) < \infty \qquad \text{et} \qquad \int_E f \, \mathrm{d}\mu > \int_X f \, \mathrm{d}\mu - \varepsilon\,.$$

1. Pour $n \geq 1$, on note $E_n = \{x \in X \colon f(x) > 1/n\}$. Justifier que $E_n \in \mathcal{T}$ pour tout $n \geq 1$.
2. Pour $n \geq 1$ on note f_n la fonction définie sur X par $f_n(x) = f(x)\mathbf{1}_{E_n}(x)$. Montrer qu'il existe $n_0 \geq 1$ tel que :
$$\int_X f_{n_0} \, \mathrm{d}\mu > \int_X f \, \mathrm{d}\mu - \varepsilon\,.$$
3. Conclure en utilisant l'exercice 2.

Exercice 4. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On se donne une application mesurable $f \colon X \to \mathbb{R}$ (on munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne associée à sa topologie standard) et une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{T}$. On suppose :

$$\int_X |\mathbf{1}_{A_n} - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0 \qquad (n \to \infty)\,.$$

1. Montrer que $\{x \in X \colon |f(x)| > 2\} \subset \{x \in X \colon |\mathbf{1}_{A_n}(x) - f(x)| > 1\}$.
2. En déduire, en utilisant l'exercice 2, que l'on a μ-presque partout $|f(x)| \leq 2$.
3. Montrer que $\int_X |f - f^2| \, \mathrm{d}\mu = 0$. (On pourra écrire $f - f^2 = (f - \mathbf{1}_{A_n}) - (f^2 - \mathbf{1}_{A_n})$ puis utiliser l'inégalité triangulaire et la question 2).
4. Déduire qu'il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que l'égalité $f = \mathbf{1}_A$ soit vraie μ-presque partout.

FIN

Correction disponible sur `www.math.u-bordeaux.fr/~fjouve001` à partir de 14h environ le 7/11.