Examen

19/12/2018. Durée : 3h

Aucun document, aucun appareil électronique autorisé. Le sujet contient 3 exercices indépendants.
On rédigera **lisiblement** *et on justifiera les réponses avec soin.*

[Barême indicatif : Ex1 : $\simeq$ 8 points , Ex2 : $\simeq$ 7 points, Ex3 : $\simeq$ 5 points.]

Dans tout le sujet, si A est une partie d'un ensemble X, on note $\mathbf{1}_A$ la *fonction indicatrice de* A définie sur X par $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ si $x \in X \setminus A$.

Exercice 1.

On munit l'intervalle $]0, \infty[$ de la mesure de Lebesgue. On note $\mathscr{L}^1(]0, \infty[)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions intégrables relativement à l'espace mesuré ainsi défini.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2} \cos(xt)$ est élément de $\mathscr{L}^1(]0, \infty[)$.

On considère la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} \cos(xt)\,\mathrm{d}t\,.$$

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une expression intégrale pour $f'(x)$.
3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' + \frac{x}{2}y = 0$.
   [On aura recours à une intégration par parties.]
4. En admettant que $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, déduire une expression de f n'utilisant pas le symbole $\int$.

Dans la suite de cet exercice, on souhaite démontrer que l'intégrale $J = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ a bien pour valeur $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ comme admis dans la question 4. On considère pour cela la fonction

$$g\colon]0, \infty[\times]0, \infty[\to \mathbb{R}\,, \qquad (x, y) \mapsto y\mathrm{e}^{-y^2(1+x^2)}\,.$$

5. Justifier soigneusement la série d'égalités :

$$\int_{]0,\infty[\times]0,\infty[} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4} = \int_0^\infty y\mathrm{e}^{-y^2}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2x^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,.$$

6. En utilisant un changement de variable, montrer que :

$$\int_0^\infty y\mathrm{e}^{-y^2}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2x^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = J^2\,,$$

   puis conclure.

Exercice 2.

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction f_n définie sur $]0, \infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{(1 + x^2)(1 + x^n)^{1/n}}\,.$$

On note $\mathscr{L}^1(]0, \infty[)$ l'espace des fonctions intégrables relativement à la mesure de Lebesgue restreinte à $]0, \infty[$. On étudie dans cet exercice l'existence et la valeur de la limite suivante :

$$L = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

1. Justifier que $f_n \in \mathscr{L}^1(]0,\infty[)$ pour tout $n \geq 1$.
2. En séparant les cas $0 < x \leq 1$ et $x > 1$, calculer $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
   [On pourra utiliser la formule $(1+A)^\alpha = \exp(\alpha \ln(1+A))$ valable pour $A > -1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.]
3. Calculer $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.
   [Déterminer d'abord la valeur de a, b, c tels que $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.]
4. Montrer que la limite L existe et calculer sa valeur.

Exercice 3.

Soit $d \geq 1$ un entier. On munit $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}_{\geq 0}$ de leur tribu de Borel respective. On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et on se donne $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction mesurable.

1. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on définit :
$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^d \colon 2^{k-1} < f(x) \leq 2^k\}\,.$$
   Montrer que chaque E_k est une partie mesurable de $\mathbb{R}^d$.
2. Montrer que l'on a :
$$\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} E_k = \{x \in \mathbb{R}^d \colon f(x) > 0\}\,, \qquad \text{et} \qquad i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset\,.$$
3. Pour tout entier $n \geq 0$, on considère la fonction en escaliers :
$$F_n = \sum_{k=-n}^{n} 2^k \mathbf{1}_{E_k}\,.$$
   Justifier que la limite ponctuelle $F = \lim_{n\to\infty} F_n$ est bien définie, mesurable, et qu'on a, en tout point $x \in \mathbb{R}^d$:
$$\frac{1}{2}F(x) \leq f(x) \leq F(x)\,.$$
4. Montrer que $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \lambda(E_k) < \infty$.

FIN

Correction disponible sur `www.math.u-bordeaux.fr/~fjouve001` à partir de 9h environ le 20/12.