

LE PARADOXE DE BANACH-TARSKI.

SUJET PROPOSÉ PAR LAURENT BESSIÈRES

Ce sujet a été pris et
n'est plus disponible

Présentation : Le théorème de Banach-Tarski (1924) affirme qu'il est possible de découper une boule unité de \mathbb{R}^3 en un nombre fini de morceaux et, après les avoir déplacé par des isométries (affines) de \mathbb{R}^3 , de les réassembler de manière à former *deux* boules unités disjointes.

Cet énoncé se généralise à \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, mais pas au plan \mathbb{R}^2 . Le "paradoxe" disparaît une fois conçu que les morceaux ne sont pas mesurables. La construction utilise de manière cruciale l'axiome du choix et l'existence d'un groupe libre non abélien d'isométries de \mathbb{R}^3 .

Pré-requis : Notions élémentaires de théorie des groupes, géométrie vectorielle.

Bibliographie :

- Stan Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, Cambridge university press.
- Karl Stromberg, *The Banach-Tarski paradox*, dans The American Mathematical Monthly, Vol. 86, No. 3 (Mar., 1979), pp. 151-161.

Ce sujet a été pris et n'est plus disponible

Exponentielles itérées

Yuri Bilu

Projet tutoré L3 2020/21

De la même manière que pour la notation bien connue

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n, \quad \prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdots a_n,$$

on peut désigner

$$\mathbf{E}_{k=1}^n a_k = a_1^{a_2^{\dots^{a_n}}}.$$

Rappelons qu'on peut définir les sommes et les produits infinis en tant que limites :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k, \quad \prod_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n a_k.$$

De la même façon on peut définir

$$\mathbf{E}_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{k=1}^n a_k = a_1^{a_2^{\dots^{a_n}}}.$$

On sait bien que la condition nécessaire (mais pas suffisante) pour la convergence de la somme infinie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ est $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. De même, la condition nécessaire (mais pas suffisante) pour la convergence du produit infini $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ est $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 1$.

En particulier, il est bien évident que la somme infinie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a = a + a + \dots + a + \dots$$

(dont tous les termes sont égaux à un certain $a \neq 0$) diverge. De même, le produit infini

$$\prod_{k=1}^{\infty} a = a \cdot a \cdots a \cdots$$

(dont tous les termes sont égaux à un certain $a \neq 1$) diverge.

Vu tout ça, il est bien surprenant que l'exponentielle itérée infinie

$$\mathbf{E}_{k=1}^{\infty} a = a^{a^{\dots^{a^{\dots}}}}$$

converge pour certains $a \neq 1$. Par exemple, pour $a = \sqrt{2}$ on a

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots}}}} = 2.$$

L'objectif de ce projet est d'étudier les exponentielles itérées infinies et leur convergence, voir [1] (je dispose du texte de cet article). Aucun pré-requis (sauf le cours d'analyse de la deuxième année) n'est imposé.

Références

- [1] D. F. Barrow, Infinite Exponentials, *Amer. Math. Monthly* **43** (1936), 150–160.

Le théorème de Lüroth

Yuri Bilu

Projet tutoré L3 2020/21

Soit K un corps commutatif et soit $K(t)$ le corps de fonctions rationnelles sur K d'une seule variable t . Le théorème classique de Lüroth affirme que tout sous-corps de $K(t)$, contenant K (sauf K lui-même) est également un corps de fractions rationnelles : si

$$K \subsetneq L \subseteq K(t)$$

alors $L = K(u)$ pour un certain $u \in L$.

L'objectif de ce projet est d'étudier ce théorème, ainsi que une généralisation due à Igusa et Samuel.

Références

- [1] P. SAMUEL, Some remarks on Lüroth's theorem, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A. Math.* **27** (1953), 223–224.
- [2] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra*, Vol. I and II, Springer-Verlag, New York, 1991.

Ce sujet a été pris et n'est plus disponible

Sujet projet tutoré, Licence 3

2020/2021

Le polygone régulier à 17 côtés

Encadrant : Olivier Brinon

E-mail : `olivier.brinon@math.u-bordeaux.fr`

Description:

On a vu (mais pas démontré) en cours que le polygone régulier à 17 côtés est constructible à la règle et au compas : cela résulte de la formule

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = \frac{\sqrt{17} - 1 + \sqrt{2(17 - \sqrt{17})} + \sqrt{2(\sqrt{17} + 3)(2\sqrt{17} - \sqrt{2(17 - \sqrt{17})})}}{16}.$$

Le but du TER est de comprendre comment on trouve cette formule, et d'en déduire une construction explicite à la règle et au compas. Chemin faisant, on se familiarisera avec les extensions cyclotomiques (leur théorie de Galois, sommes de Gauss, etc).

Références:

[1] Tauvel , *Corps commutatifs et théorie de Galois*, Calvage et Mounet.

Nombre de solutions modulo p de certaines équations polynômiales

Sujet proposé par Olivier Brinon
olivier.brinon@math.u-bordeaux.fr

Soient p un nombre premier, a_1, \dots, a_n des entiers non divisibles par p et

$$F(X_1, \dots, X_n) = a_1 X_1^{d_1} + \dots + a_n X_n^{d_n} \in \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_n]$$

Notons $N(F, p)$ le nombre d'éléments $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$ tels que $F(x_1, \dots, x_n) = 0$. Le but est de montrer la majoration (due à Weil) :

$$|N(F, p) - p^{n-1}| < C(F)p^{\frac{n}{2}}$$

(où $C(F)$ est une constante qui ne dépend que de F). C'est un cas particulier d'un résultat très profond.

Référence : Z. Borevitch, I. Chafarevitch, *Théorie des nombres*. Jacques Gabay (1993), 489p.

Ce sujet a été pris et
n'est plus disponible

Intégrale de Henstock-Kurzweil

proposé par

Vincent Bruneau et Tassilo Fuchs

L'intégrale au sens de Henstock-Kurzweil a été développée dans la première moitié du XXème siècle. Plusieurs définitions équivalentes en ont été données, la définition donnée par Kurweil en 1957 ressemble à celle de l'intégrale de Riemann. Pourtant cette intégrale vérifie des propriétés « agréables » de l'intégrale de Lebesgue, tels les théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone, et permet d'intégrer encore d'avantages de fonctions que l'intégrale de Lebesgue. En particulier elle permet d'intégrer toutes les dérivées, contrairement à l'intégrale de Lebesgue ou de Riemann (pourquoi ?).

Le travail proposé consiste à étudier l'intégrale de Henstock-Kurzweil (sa définition, donner des preuves d'existence dans certains cas), comparer ses propriétés avec les autres théories de l'intégration (chercher des exemples et contre exemples), afin de tenter de répondre entre-autres à la question : Si l'intégrale de Henstock-Kurzweil est plus générale que l'intégrale de Lebesgue, pourquoi n'est-elle pas d'avantage répandue dans l'enseignement universitaire ?

Les références seront un livre faisant un état de l'art sur le sujet [4], ainsi qu'un article d'un auteur qui défendait l'utilisation de cette intégrale dans les cours universitaires [1] et un livre du même auteur [2]. Le document [3] pourra aussi être utilisé.

Références

- [1] Robert G. Bartle. Return to the riemann integral. 1996.
- [2] Robert G. Bartle. *A Modern Theory of Integration*. Graduate Studies in Mathematics. 32. American Mathematical Society. ISBN 978-0-8218-0845-0., 2001.
- [3] J.-P. Demailly. Théorie élémentaire de l'intégration : l'intégrale de kurzweil-henstok. <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/kurzweil.pdf>, 2011.
- [4] D. S. Kurtz et C. W. Swartz. *Theories Of Integration, The integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and McShane*. Series in Real Analysis- Vol. 13, World Scientific, New Jersey, London, Singapore, Beijing, Shanghai, Hong Kong, Taipei, Chenna., 2012.

Sujet Projet tuteuré L3 (Marie-Line CHABANOL)

Le problème du collectionneur

Vous avez peut-être déjà essayé de collectionner des objets (figurines, cartes, etc)... Combien de temps cela prend-il de récupérer une collection complète d'objets si on suppose qu'on les récupère de manière aléatoire? Et si on veut deux collections complètes, qu'est-ce que cela change?

But : Le but sera de voir ce qu'on peut dire de la loi de ce temps (espérance, variance...), pour diverses modélisations. On pourra aussi s'intéresser à diverses variantes du problème. On pourra aussi faire diverses expérimentations numériques.

Bibliographie : <https://images.math.cnrs.fr/Petite-collection-d-informations-utiles-pour-collectionneur-compulsif.html>

Page wikipedia "*Coupon collector's problem*"

Et les références qui y sont mentionnées, par exemple :

I. Adler, S. Oren et S.M. Ross, The coupon-collector's problem revisited, J. Appl. Probab. 40 (2003), no. 2, 513—518.

P. Erdős ; A. Rényi On a classical problem of probability theory (1961)

Ainsi que *D. Zeilberger. How Many Singles, Doubles, Triples, Etc., Should The Coupon Collector Expect ? (2001)*

Prérequis : un goût pour les probabilités discrètes et l'analyse. Groupe mixte MathInfo/MathFonda bienvenu

Contact : *Marie-Line.Chabanol@u-bordeaux.fr*

LE THÉORÈME DE PERRON-FROBENIUS ET LES MODÈLES MATRICIELS POUR L'ÉTUDE DES POPULATIONS

JEAN-MARC COUVEIGNES

RÉSUMÉ. Le théorème de Perron-Frobenius garantit qu'une matrice admet une valeur propre dominante et simple, sous certaines hypothèses de positivité des coefficients. Ce théorème a de nombreuses applications pour l'étude des systèmes à temps discret, en particulier pour la dynamique des populations

RÉFÉRENCES

- [1] Hal CASWELL et Shripad TULJAPURKAR : *Matrix methods for population analysis*. in *Structured-Population Models in Marine, Terrestrial, and Freshwater Systems*. Springer US, 1997.
- [2] R.B. BAPAT et T.E.S. RAGHAVAN : *Nonnegative Matrices and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

JEAN-MARC COUVEIGNES, UNIV. BORDEAUX

Email address: Jean-Marc.Couveignes@u-bordeaux.fr

COMPLÉMENTS ET CONTRE-EXEMPLES EN TOPOLOGIE

SUJET PROPOSÉ PAR ANDREA FANELLI

Description. Ce projet consiste à approfondir les notions vues au cours de topologie, en étudiant des constructions et des résultats classiques. Le but est aussi d'étudier des exemples bizarres et pathologiques en topologie générale. Voici quelques sujets possibles.

- (i) Produits infinis et Théorème de Tyconoff;
- (ii) Espaces normaux et Théorème de prolongement de Tietze;
- (iii) Groupes topologiques.

Prérequis. Notions élémentaires de topologie.

Niveau. L3

Références.

John L. Kelley, *General Topology*, Springer.

Lynn Arthur Steen, J. Arthur Seebach Jr., *Counterexamples in Topology*, Springer.

Email address: `andrea.fanelli.1@u-bordeaux.fr`

D'étranges variables aléatoires...

Encadrant : Alexandre Genadot

E-mail : `Alexandre.Genadot@math.u-bordeaux.fr`

Description: On se propose de lire l'article (pédagogique) de D. Rizzolo intitulé "Strange uniform random variable" (*) qui s'intéresse au fait que deux variables aléatoires peuvent avoir la même loi tout en étant très différentes, à tel point par exemple que leurs images peuvent être d'intersection vide.

Etudier cet article sera notamment l'occasion de travailler les notions d'ensembles et de fonctions mesurables, de mesure de Lebesgue, de (re)-voir comment l'on construit n'importe quelle variable aléatoire à partir de la loi uniforme, ou encore de (re)-voir la construction d'ensembles non mesurables.

(*) :<https://arxiv.org/pdf/1301.7148.pdf>

Découpage d'un carré en triangles de même aire

Encadrant : Vincent Koziarz

E-mail : vincent.koziarz@math.u-bordeaux.fr

Ce sujet a été pris et n'est plus disponible

Description: On se propose de trouver à quelle condition sur le nombre de triangles, il est possible de découper un carré en triangles de même aire. La réponse à ce problème a été donnée par P. Monsky en 1970. Bien que l'énoncé soit élémentaire, elle nécessite l'introduction d'un outil assez sophistiqué, à savoir la théorie des valuations sur un corps. Le reste du raisonnement repose sur des arguments combinatoires assez simples.

Si les personnes qui choisissent ce sujet sont motivées, on pourra aborder le cas général (traité par E. A. Kasimatis) des polygones réguliers que l'on voudrait découper en triangles de même aire.

Références:

- [1] E. A. Kasimatis, *Dissections of regular polygons into triangles of equal areas*, Discrete Comput. Geom. 4 (1989), 375-381
- [2] S. Lang, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics 211, Springer-Verlag, 2002 (existe aussi en Français)
- [3] P. Monsky, *On dividing a square into triangles*, Amer. Math. Monthly 77 (1970), 161-164

Le théorème de Mozes et le pavage de Robinson

Encadrant : Philippe Thioullien

E-mail : `Philippe.Thioullien@math.u-bordeaux.fr`

Description: Un pavage consiste à recouvrir tout le plan par une famille finie de tuiles, bord-à-bord, en respectant certaines contraintes d'alignement des bords. Un pavage substitutif est obtenu par point fixe d'un découpage de chaque tuile en sous tuiles de sorte que par un facteur homothétique on reforme le pavage initial. Un pavage à règles locales finies est un pavage dans lequel un nombre fini de recollement bord-à-bord est interdit. Le théorème de Mozes affirme que tout pavage substitutif peut être vu comme un pavage à règles locales finies pourvu qu'on décore chaque tuile en respectant un nombre fini de règle d'appariement.

Outils mathématiques: Combinatoire, géométrie du plan.

Étapes du stage :

- (1) Se familiariser avec les notions de pavage dans le livre de Radin [Radin1999].
- (2) Lire les articles de Mozes [Mozes1989] et de Robinson [Robinson1971] en s'aidant du mémoire de Barbieri et des articles plus récents de [GoodmanStrauss1998] et de [Ollinger2008]
- (3) Illustrer le mémoire à l'aide de pavage généré automatiquement par logiciel : utiliser par exemple Python.

Bibliographie :

- Barbieri2014 S. Barbieri. Subshifts genrados por sustituciones multidimensionales. Mémoire 2014.
- GoodmanStrauss1998 C. Goodman-Strauss. Matching rules and substitution tilings. *Annals of Mathematics*, 147(1), 181-223, 1998.
- Mozes1989 S. Mozes. Tilings, substitution systems and dynamical systems generated by them. *Journal d'Analyse Mathématique*, 53(1), 139-186, 1989.
- Ollinger2008 N. Ollinger. Two-by-two substitution systems and the undecidability of the domino problem. In *Proceedings of the 4th conference on Computability in Europe: Logic and Theory of Algorithms*, pages 476-485. Springer-Verlag, 2008.
- Radin1999 Charles Radin. *Miles of Tiles*. Student Mathematical Library, American Mathematical Society (1999).
- Robinson1971 R. Robinson. Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane. *Inventiones Mathematicae*, 12, 177-209, 1971.

Théorème des zéros de Hilbert

Dajano Tossici¹

Soit k un corps algébriquement clos. On sait que, par définition, tout polynôme à une variable admet une solution dans k . Le Théorème des zéros de Hilbert nous dit qu'en effet même un système de polynômes à n variables admettent toujours une solution dans k^n , à condition que l'idéal engendré par ces polynômes dans $k[x_1, \dots, x_n]$ ne contienne pas l'unité.

Autrement dit, si on prend un idéal propre de $k[x_1, \dots, x_n]$ et on appelle $V(I)$ l'ensemble des zéros communs à tous les polynômes dans I alors $V(I)$ est non-vide. Et en fait le Théorème des zéros de Hilbert est encore plus précis car nous dit précisément qui est l'idéal des polynômes qui s'annulent sur $V(I)$. Si I est premier on trouve que cet idéal est exactement I . On remarque que le résultat est faux sur \mathbb{R} par exemple. Si on prend $I = (x^2 + y^2) \subseteq \mathbb{R}[x, y]$ alors $V(I) = \{(0, 0)\}$ mais x s'annule en zero et il n'appartient pas à I .

Il s'agit d'un Théorème classique qui est à la base de la géométrie algébrique moderne.

Références

[AM] ATIYAH, MACDONALD, *Introduction to commutative algebra*.

1. dajano.tossici@u-bordeaux.fr, bureau 361 IMB