Approximations diophantiennes métriques

Sujet de TER
Directeur: Yuri Bilu

année 2018/19

Le théorème classique de Dirichlet affirme que pour tout nombre réel irrationnel α il existe une infinité de rationnels p/q tels que $|\alpha - p/q| < 1/q^2$. Borel (1909) a montré que l'exposant 2 du théorème de Dirichlet ne peut pas être amélioré pour presque tout (au sens de Lebesgue) réel α. Dans ce TER nous étudierons le remarquable théorème de Khintchine sur l'inégalité $|\alpha - p/q| < \psi(q)/q$ avec une fonction générale ψ.

Aucune connaissance de l'intégration de Lebesgue n'est demandée pour travailler sur ce sujet.

References

[1] J. W. S. Cassels, *An introduction to Diophantine approximation*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics **35**, New York, Cambridge University Press, 1957.

[2] V. G. Sprindzhuk, *Metric theory of Diophantine approximations*, John Wiley & Sons, New York, 1979.

Sommes hypergéométriques

Sujet proposé par Arnaud Jehanne
`arnaud.jehanne@math.u-bordeaux.fr`

On utilise souvent des identités de la forme

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \quad \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1, \; ...$$

On peut aussi montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} kk! = (n+1)! - 1$$

mais si l'on veut trouver une telle expression pour $\sum_{k=0}^{n} k!$, on se heurte à un problème.

Nous nous intéressons à de telles sommes $\sum_{k=0}^{n} t_k$, où (t_k) est une suite *hypergéométrique*, ce qui signifie qu'il existe des polynômes P et Q non nuls tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$Q(k)t_{k+1} = P(k)t_k.$$

Il s'agit d'étudier l'algorithme de Gosper, qui permet de savoir s'il existe une écriture similaire à celle des exemples ci-dessus pour $\sum_{k=0}^{n} t_k$, et la calcule.

On pourra ensuite étudier l'algorithme de Zeilberger. Cet algorithme s'applique à un autre type de sommes souvent rencontrées : des sommes de termes $f(n,k)$ hypergéométriques en n et k, prises sur leurs bornes naturelles. Par exemple : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, ou bien (plus compliqué) $\sum_k (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \frac{(3n)!}{n!^3}$.

Dans ce mémoire, il s'agira d'expliquer les algorithmes rencontrés et de les implémenter sur sage.

Références.

$A = B$, M. Petkovšek, H. S. Wilf, D. Zeilberger.
Concrete Mathematics , R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik.
Modern Computer Algebra, J. von zur Gathen, J. Gerhard.

Nombres premiers dans les progressions arithmétiques

Sujet proposé par Florent Jouve
florent.jouve@math.u-bordeaux.fr

Étant donné des entiers a et b premiers entre eux, le théorème de Dirichlet affirme qu'il existe une infinité de nombres premiers $p \equiv a(\mathrm{mod}\ b)$. Le but de ce projet est l'étude d'une preuve d'une version forte de cette assertion, à savoir :

$$\sum_{\substack{p \leq x,\, p \text{ premier} \\ p \equiv a(\bmod b)}} \frac{1}{p} = \frac{1}{\varphi(b)} \log\log x + O_b(1)\,, \qquad (x \geq 3)$$

où φ désigne la fonction indicatrice d'Euler. La méthode de preuve mélange des considérations élémentaires sur les groupes $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^\times$ et des outils d'analyse permettant en particulier l'étude cruciale de la fonction

$$L(s,\chi) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}\,, \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

où le *caractère de Dirichlet* χ est obtenu par prolongement b-périodique d'un morphisme de groupe $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$.

Références

- A. J. Hildebrand : *Introduction to analytic number theory*, disponible en ligne : https://faculty.math.illinois.edu/~hildebr/ant/.
- B. Veklych : *A one-formula proof of the nonvanishing of L-functions of real characters at 1.* Amer. Math. Monthly 122 (2015), no. 5, 484–485. Disponible en ligne : https://arxiv.org/abs/1412.5162.

Projets TER
L3 Maths. Fonda, 2018

L'équation de Laplace et l'étude de fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}^d$.

Description: L'une des équations en dérivées partielles les plus classiques est l'équation de Laplace

$$\Delta u = f, \tag{1}$$

où Δ est le laplacien, et f est une fonction continue qui tend vers zero suffisamment vite à l'infini. Si $f = 0$, l'équation devient

$$\Delta u = 0, \tag{2}$$

et elle décrit alors les fonctions qu'on appelle les fonctions harmoniques. Le but de ce projet est d'obtenir une formule intégrale (de Poisson) pour la solution de l'équation (1) et d'étudier les propriétés élémentaires de solutions de (2).

Bibliographie: Evans, L. Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics, vol. 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

Contact: S. Kupin, `skupin@math.u-bordeaux.fr`, bat. A33, bureau 377.

Pseudospectre d'une matrice

Franck Sueur
franck.sueur@math.u-bordeaux.fr

Pour n entier naturel non nul, A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$ on appelle ε-pseudospectre de A l'ensemble des nombres complexes λ tels que la norme de l'inverse de $A - \lambda Id$ vérifie $\|(A - \lambda Id)^{-1}\| > \varepsilon^{-1}$, avec la convention que $\|(A - \lambda Id)^{-1}\| = +\infty$ si λ est une valeur propre. Le but de ce projet est l'étude des propriétés essentielles du ε-pseudospectre. On verra en particulier pourquoi cette notion est particulièrement pertinente pour l'étude des matrices non normales, c'est-à-dire qui ne commutent pas avec leur adjoint. On pourra par exemple consulter le livre: Trefethen, L. N., Embree, M. (2005). Spectra and pseudospectra: the behavior of nonnormal matrices and operators. Princeton University Press.

Théorie du contrôle et théorème de Silverman-Meadows

Franck Sueur
franck.sueur@math.u-bordeaux.fr

Dans ce projet, on se propose d'étudier quelques propriétés élémentaires issues de la théorie du contrôle des systèmes d'équations différentielles, qui consiste à choisir astucieusement un second membre de façon à conduire la solution du système d'une donnée initiale prescrite à une donnée finale également prescrite. On comparera notamment plusieurs preuves d'un théorème de Silverman et Meadows sur la controllabilité des systèmes linéaires. On pourra par exemple consulter le livre: Coron, J. M. (2007). Control and nonlinearity (No. 136). American Mathematical Soc..

Equations différentielles ordinaires et changement de variable quadratique en temps

Franck Sueur
franck.sueur@math.u-bordeaux.fr

Dans ce projet, on se propose d'étudier une observation récente de Brenier et Duan qui établit un lien entre des équations différentielles ordinaires d'ordres différents (1 et 2) à l'aide d'un changement de variable quadratique en temps. Il s'agira de comprendre la section 1.1, et l'appendice 1, de l'article: Brenier, Y., Duan, X. (2018). From conservative to dissipative systems through quadratic change of time, with application to the curve-shortening flow. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 227(2), 545-565.

La géométrie de $SL_2(\mathbb{R})$

Franck Sueur
franck.sueur@math.u-bordeaux.fr

Dans ce projet, on se propose d'étudier la géométrie du groupe $SL_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles de dimension 2, en particulier la structure riemannienne qui permet de définir la notion de géodésique dans ce groupe. Roberts, J., Shkoller, S., Sideris, T. C. (2018). Affine motion of 2d incompressible fluids and flows in SL$(2, \mathbb{R})$. arXiv preprint arXiv:1811.07781.

Point fixe de Nash-Moser

Franck Sueur
franck.sueur@math.u-bordeaux.fr

Dans ce projet, on se propose d'étudier une version simple d'un théorème du à John Nash qui étend le théorème d'inversion locale à une échelle d'espaces de Banach. On pourra par exemple consulter la section 3.6 du livre: Alazard, T. (2017). Analyse et équations aux Dérivées Partielles.
http://talazard.perso.math.cnrs.fr/cours.pdf

Le système des points vortex

Franck Sueur
franck.sueur@math.u-bordeaux.fr

Dans ce projet, on se propose d'étudier un système d'équations différentielles ordinaires appelé système des points vortex qui régit l'évolution de la position de N points dans le plan qui intéragissent à distance. Ce système est un modèle simplifié pour l'évolution de fluides incompressibles bi-dimensionnels dans le cas d'un nombre fini de tourbillons ponctuels, introduit par Helmoltz au dix-neuvième siècle puis étudié notamment par Kirchhoff, Poincaré et par Lord Kelvin. Dans ce projet, nous allons voir comment on peut appliquer un résultat d'algèbre, le théorème de Bézout, pour borner le nombre de configurations stationnaires, c'est-à-dire de solution s indépendantes du temps du système des points vortex. On s'appuiera sur la Section 3 de l'article: Miot E., Le système de N tourbillons ponctuels. Journées X-UPS 2015.
http://www.math.polytechnique.fr/xups/textes-provisoires15/miot.pdf

Géodésiques dans le groupe de matrices $SL(3; \mathbb{R})$

Franck Sueur

franck.sueur@math.u-bordeaux.fr

Dans ce projet, on se propose d'étudier l'existence de géodésiques dans le groupe $SL(3;\mathbb{R})$ des matrices 3×3 dont le déterminant est 1. On verra en particulier que ces géodésiques sont données par l'équation différentielle:

$$A''(t) = \frac{\mathrm{Tr}(A'(t)A(t)^{-1})^2}{\mathrm{Tr}(A(t)^{-\top}A(t)^{-1})}\, A(t)^{-\top},$$

que l'on étudiera. On pourra par exemple consulter l'article: Sideris, T. C. (2017). Global existence and asymptotic behavior of affine motion of 3D ideal fluids surrounded by vacuum. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 225(1), 141-176.

Bifurcations de systèmes d'équations différentielles

Franck Sueur
franck.sueur@math.u-bordeaux.fr

Dans ce projet, on se propose de s'initier à l'étude des bifurcations de systèmes d'équations différentielles avec paramètre c'est-à-dire à un changement brutal des solutions du système lorsque le paramètre traverse une valeur critique. On s'intéressera notamment à la bifurcation noeud-col et à la bifurcation de Hopf. On pourra par exemple consulter la section 8.5 du livre: Benzoni-Gavage, S. (2014). Calcul différentiel et équations différentielles-2e éd.: Cours et exercices corrigés. Dunod.

Théorie de Floquet

Franck Sueur
franck.sueur@math.u-bordeaux.fr

Dans ce projet, on se propose d'étudier comment la théorie de Floquet permet de réduire l'étude des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques aux équations à coefficients constants. On pourra par exemple consulter la section 6.5 du livre: Benzoni-Gavage, S. (2014). Calcul différentiel et équations différentielles-2e éd.: Cours et exercices corrigés. Dunod.

Réduction de Lyapunov-Schmidt

Franck Sueur
franck.sueur@math.u-bordeaux.fr

Dans ce projet, on se propose d'étudier comment la méthode de Lyapunov-Schmidt permet de résoudre des problèmes non-linéaires auxquels le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas directement. On pourra par exemple consulter la section 8.3 du livre: Benzoni-Gavage, S. (2014). Calcul différentiel et équations différentielles-2e éd.: Cours et exercices corrigés. Dunod.

Point fixe de Nash-Moser
Franck Sueur
franck.sueur@math.u-bordeaux.fr

Dans ce projet, on se propose d'étudier une version simple d'un théorème de John Nash qui étend le théorème d'inversion locale à une échelle d'espaces de Banach. Il s'agit d'une élaboration du schéma de Newton qui permet de résoudre l'équation $\Phi(u) = 0$ lorsque l'inverse de $\Phi'(0)$ n'est pas bornée. Cette méthode construit une solution u de $\Phi(u) = 0$ comme la limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = u_n - R_n\Phi'(u_n)\Phi(u_n)$ où R_n est un opérateur régularisant. On pourra par exemple consulter la section 3.6 du livre: Alazard, T. (2017). Analyse et équations aux Dérivées Partielles.
http://talazard.perso.math.cnrs.fr/cours.pdf

Inégalité de Sobolev logarithmique

Sujet proposé par Philippe Thieullen
`philippe.thieullen@u-bordeaux.fr`

Objectif du mémoire : On s'intéresse au comportement asymptotique en temps infini d'une chaîne de Markov. On étudiera plus précisément sous quelles conditions la convergence vers l'équilibre est exponentielle. On traitera de nombreux exemples : marche aléatoire sur le cercle discret, permutations aléatoires du groupe symétrique. Le stage permettra d'introduire par l'intermédiaire d'exemples variés les différents points suivant : notion de chaîne de Markov, notion de d'inégalité logarithmique de Sobolev et d'hypercontractitvité, calculs explicites des constantes des inégalité log-Sobolev pour de nombreux exemples.

On s'appuiera sur l'article d'exposition de P. Diaconis, L Saloff-Coste, à la fois complet et simple puisque se limitant au cas des espaces finis. L'objectif du stage est donc d'aborder une approche moderne des problèmes de convergences des chaînes de Markov par l'intermédiaire de multiples exemples. Le mémoire consistera à rédiger proprement les preuves des résultats présentés en insistant particulièrement sur les exemples.

Connaissances requises : Avoir un niveau de connaissance L2 en probabilité, (aucune connaissance sur les chaînes de Markov n'est requise).

Bibliographie :

P. Diaconis, L Saloff-Coste, Logarithmic inequalities for finite Markov chains, The Annals of Applied Probability, Vol. 6, No. 3 (1996), 695-750.