LE PARADOXE DE BANACH-TARSKI.

SUJET PROPOSÉ PAR LAURENT BESSIÈRES

Présentation :

Informellement, le paradoxe de Banach-Tarski (1924) affirme qu'on peut découper une balle de ping-pong en morceaux et réassembler ces morceaux de manière à obtenir deux balles de poing-pong identiques. Formellement, le théorème dit que la sphère unité $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ admet une partition finie

$$S^2 = \bigcup_{i=1,\ldots,n} U_i,$$

pour laquelle il existe des isométries $g_1, \ldots, g_n$ de $\mathbf{R}^3$ tel que

$$\bigcup_{i=1,\ldots,n} g_i(U_i) = A \cup B,$$

où A et B sont des parties disjointes isométriques à S^2.

Un énoncé semblable est valable pour les boules fermées de $\mathbf{R}^3$, et plus généralement toutes les parties bornées d'intérieur non vide de $\mathbf{R}^3$ exhibent de telles propriétés paradoxales.

Le paradoxe apparent est qu'en déplaçant les U_i par des isométries, opération qui préserve le volume, on obtient un volume total double ! Une seule conclusion logique : les U_i ne sont pas mesurables. L'intéret de ce "paradoxe" est donc d'exhiber des ensembles non mesurables de S^2 et de $\mathbf{R}^3$. Il est impossible de visualiser ces ensembles, qu'on peut penser comme un éparpillement de points, pas du tout connexe (ils ont en fait une infinité non dénombrable de composantes connexes). Leur construction utilise de manière cruciale l'axiome du choix et l'existence d'un groupe libre non abélien d'isométries de $\mathbf{R}^3$.

Pré-requis : Notions élémentaires de théorie des groupes, géométrie vectorielle.
Idées clés : Action de groupe, groupe libre, groupe d'isométries de $\mathbf{R}^3$, axiome du choix.

Références

- Stan Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, Cambridge university press.
- Pierre de la Harpe, *Mesures finiment additives et paradoxes*, dans Panoramas et Synthèses 18, 39-61, 2004.
- Karl Stromberg, *The Banach-Tarski paradox*, dans The American Mathematical Monthly, Vol. 86, No. 3 (Mar., 1979), pp. 151-161.

Les nombres de Bernoulli

Yuri Bilu

Projet tutoré L3 2019/20

Les nombres de Bernoulli B_n est une suite remarquable de nombres rationnels qui apparaît partout en mathématiques. Le but de ce projet est d'étudier les propriétés principales des nombres de Bernoulli ainsi que leurs applications :

— formule sommatoire d'Euler-Maclaurin ;
— évaluation des sommes $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$;
— etc.

Références

[1] T. M. Apostol, A primer on Bernoulli Numbers and Polynomials, *Mathematics Magazine* **81** (2008), 178–190 [1].

[2] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, toute édition.

[3] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Belin, 2008.

1. disponible en pdf

Sums and Integrals

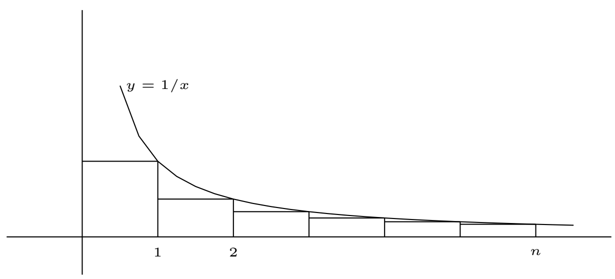
Yuri Bilu

Projet tutoré L3 2019/20

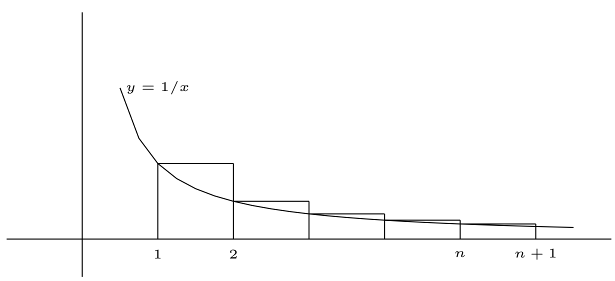
La série infinie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ est une source importante d'exemples dans l'analyse mathématique. Notons S_n sa somme partielle :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Comme le montrent les images ci-dessous, $\log(n+1) \leq S_n \leq 1 + \log n$. En particulier, nous avons $S_n = \log n + O(1)$. Peut-on en dire plus ?



$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log n$



$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \log(n+1)$

Voici deux autres questions.

1. Soit $g(n)$ le nombre de présentations de n comme somme de deux carrés. Par exemple :
   — $g(2) = 1$, la seule présentation étant $2 = 1^2 + 1^2$;
   — $g(5) = 2$, les présentations étant $5 = 1^2 + 2^2 = 2^2 + 1^2$;

— $g(3) = 0$;
— $g(25) = 4$, car $25 = 2^2 + 3^2 = 3^2 + 2^2 = 0^2 + 5^2 = 5^2 + 0^2$.

Quelle est la valeur moyenne de $g(n)$? La réponse $\pi/4$ est assez amusante.

2. On appelle une paire (m, n) *primitive* si $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$. Par exemple, la paire $(4, 9)$ est primitive, mais $(6, 15)$ ne l'est pas, car $\mathrm{pgcd}(6, 15) = 3$.

   On choisi une paire d'entiers au hasard. Quelle est la probabilité de choisir une paire primitive ? La réponse $6/\pi^2$ est également amusante.

Les réponses à toutes ces questions nécessitent des approximations des sommes avec les intégrales. Diverses méthodes et applications de cette technique seront étudiées dans ce projet.

Décomposition en somme de deux et quatre carrés

Jean-Paul Cerri
jean-paul.cerri@math.u-bordeaux.fr

Un célèbre théorème attribué à Fermat affirme qu'un nombre premier est somme de deux carrés si et seulement s'il est congru à 1 modulo 4. Ce théorème permet de caractériser les entiers naturels sommes de deux carrés. Par ailleurs, on sait depuis les travaux de Lagrange que tout entier naturel est somme de quatre carrés. Ce TER a plusieurs objectifs.

- S'approprier plusieurs preuves du théorème de Fermat, en particulier celle de Dedekind qui s'appuie sur le caractère euclidien de $\mathbb{Z}[i]$, celle qui utilise un lemme dû à Thue et la preuve en une phrase de Zagier ;
- En déduire la caractérisation des entiers sommes de deux carrés ;
- S'approprier une ou deux preuves du théorème de Lagrange, en particulier celle qui utilise les quaternions d'Hurwitz : ce sera l'occasion de voir comment certains concepts algébriques classiques s'étendent au cadre non commutatif.

Pour compléter cette approche théorique, les étudiants pourront être invités à élaborer un algorithme "efficace" de décomposition d'un premier congru à 1 modulo 4 en somme de deux carrés, voire, si le temps le permet, à aller plus loin en traitant algorithmiquement le cas général des deux carrés et le problème des quatre carrés.

Enfin, en cas d'avancement spectaculaire du travail, on pourra aussi s'intéresser au nombre de solutions de la décomposition en somme de deux ou quatre carrés d'un entier donné.

Des références adaptées aux besoins des étudiants seront données au cours de la première rencontre.

Sujets Projets tuteurés
L3 Parcours Mathématiques Fondamentales et/ou MathInfo
(Marie-Line.Chabanol@u-bordeaux.fr)

1. **Combien de cycles dans une permutation ?**
   Combien y a-t-il de permutations ayant un nombre de cycles donné ? Si on prend une permutation au hasard, combien de cycles aura-t-elle "en moyenne" ? On verra plusieurs approches pour ces questions, en particulier la notion de "record" d'une permutation sera introduite.
   Bibliographie : X. Caruso, I. Kortchemski *Statistiques du nombre de cycles d'une permutation Revue de Math. Spé. 121-4 (2011)*
   http ://xavier.toonywood.org/papers/publis/cycles.pdf
   Prérequis : un peu de familiarité avec les permutations et un goût a priori pour les probabilités (même si aucune familiarité avec celles-ci n'est requise au début)
   Contact : *Marie-Line.Chabanol@u-bordeaux.fr*

2. **Méthode probabiliste et graphes**
   Il est parfois difficile de montrer l'existence d'un objet ayant une certaine propriété ; mais on arrive paradoxalement parfois plus facilement à montrer que si on prend un objet au hasard, il a cette propriété avec une probabilité strictement positive. Cette approche, qui a pris le nom de"méthode probabiliste", a été en particulier très efficace pour des problèmes en théorie des graphes, notamment des problèmes de coloration de graphes. Elle peut également parfois être ensuite utilisée pour donner lieu à un algorithme explicite de construction d'un objet : on parle alors de dérandomisation.
   Bibliographie : *Aigner et Ziegler : Raisonnements divins, chapitre 40* (peut dépendre des éditions)
   James Zhou : The method of conditional probabilities : derandomizing the probabilistic method
   http ://math.uchicago.edu/ may/REU2018/REUPapers/Zhou,James.pdf
   Prérequis : un goût pour les mathématiques discrètes en général et un goût a priori pour les probabilités (même si aucune familiarité avec celles-ci n'est requise)
   Contact : *Marie-Line.Chabanol@u-bordeaux.fr*

COMPLÉMENTS ET CONTRE-EXEMPLES EN TOPOLOGIE

SUJET PROPOSÉ PAR ANDREA FANELLI

Description. Ce projet consiste à approfondir les notions vues au cours de topologie, en étudiant des constructions et des résultats classiques. Le but est aussi d'étudier des exemples bizarres et pathologiques en topologie générale. Voici quelques sujets possibles.

(i) Compactifications de Alexanfroff et de Stone-Čech ;
(ii) Complétion d'un espace métrique ;
(iii) Prébases et Théorème d'Alexander ;
(iv) Produits infinis et Théorème de Tyconoff.

Prérequis. Notions élémentaires de topologie.

Niveau. L3

Référence.

Lynn Arthur Steen, J. Arthur Seebach Jr., *Counterexamples in Topology*, Springer.

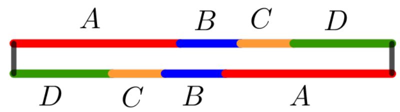
Email address: andrea.fanelli.1@u-bordeaux.fr

Echanges d'intervalles

Sujet proposé par Elise Goujard

`elise.goujard@math.u-bordeaux.fr`

Un échange d'intervalle est une transformation de l'intervalle $[0, 1]$ consistant à diviser l'intervalle en plusieurs sous-intervalles et à les permuter. C'est une exemple de système dynamique.



Le but du projet est d'étudier l'orbite du point 0 par cette transformation, dans différents cas.

Dans un premier temps on étudiera le cas de deux intervalles où la transformation est conjuguée à une rotation du cercle (critère d'équidistribution de Weyl).
Le but du projet est de montrer les théorème de Keane donnant des conditions suffisantes pour la densité des orbites. Des notions de dynamique comme l'ergodicité et la minimalité seront abordées. On cherchera également à construire des exemples illustrant les différents résultats.

On pourra appuyer l'étude sur des expériences numériques à l'aide du programme `flatsurf` de `Sage` :
https ://www.labri.fr/perso/vdelecro/flatsurf.html.

On pourra également étudier les liens entre échanges d'intervalles, billards polygonaux et surfaces de translation.

Le projet s'appuiera sur une partie du mini-cours de Jean-Christophe Yoccoz.
https ://www.college-de-france.fr/media/jean-christophe-yoccoz/UPL8726_yoccoz05.pdf

Le problème de Kakeya sur un corps fini

Sujet proposé par Florent Jouve
florent.jouve@math.u-bordeaux.fr

Le problème de Kakeya est une question datant du début du XXème siècle et pouvant se formuler de la façon suivante : quelle est l'aire minimale balayée lorsque l'on fait faire un tour complet à une aiguille de longueur unité dans le plan ? Parmi les nombreuses variantes et raffinements de ce problème figure la question suivante, appelée conjecture de Kakeya sur les corps finis : soient F un corps fini, $n \geq 1$, et E une partie de F^n contenant une droite dans chaque direction possible, alors $|E| \geq c_n |F|^n$ pour une constante c_n ne dépendant que de n. Cette conjecture a été résolue en 2008 par Z. Dvir ; la preuve, particulièrement simple et élégante, repose sur une généralisation du fait bien connu que tout polynôme à coefficients dans un corps K a un nombre de racines dans K (comptées avec multiplicité) inférieur à son degré.

Le travail proposé consiste en l'étude et la compréhension de la preuve de Dvir, ainsi que (si le temps le permet) d'autres applications de la stratégie de Dvir.

Références

- Z. Dvir : *On the size of Kakeya sets in finite fields*, J. AMS, Vol. 22, No 4, (2009), 1093–1097.
- T. Tao : *Dvir's proof of the finite field Kakeya conjecture*, https://terrytao.wordpress.com/2008/03/24/dvirs-proof-of-the-finite-field-kakeya-conjecture/.

Éléments de théorie algébrique des graphes

Gilles Zémor
zemor@math.u-bordeaux.fr

Le spectre d'un graphe est le spectre de sa matrice d'adjacence. Il permet de donner énormément d'information structurelle sur le graphe, en particulier il nous dit si le graphe a des bonnes propriétés d'*expansion*, c'est-à-dire si le rapport entre le nombre d'arêtes qui sépare un ensemble de sommets A de son complémentaire $\overline{A}$ et le minimum $\min(A, \overline{A})$ est élevé. Nous aborderons cette théorie et l'illustrerons par quelques exemples de constructions algébriques de graphes ayant des propriétés locales et globales remarquables.

Références

[1] N. Biggs, Algebraic Graph Theory, 1974,1993.

[2] S. Hoory, N. Linial, A. Wigderson, *Expander graphs and their applications,* Bulletin of the AMS, Oct. 2006, pp. 439–561.