TD 1 : Anneaux

À l'exception de l'exercice 2, les anneaux considérés dans cette feuille sont commutatifs.

Exercice 1.
Montrer qu'un anneau intègre fini A est nécessairement un corps.

Exercice 2.
Un élément x d'un anneau R (non nécessairement commutatif) est dit *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x^k = 0$. On fixe un anneau R et on note $\mathrm{Nil}(R)$ l'ensemble de tous ses éléments nilpotents.

1. Montrer que $\mathrm{Nil}(R)$ est inclus dans tous les idéaux premiers de R
2. Supposons R commutatif. Montrer que $\mathrm{Nil}(R)$ est un idéal de R. Cette propriété reste-t-elle vraie si R n'est pas supposé commutatif ?
3. Dans le cas où $R = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ (matrices 2×2 à coefficients complexes), que vaut $\mathrm{Nil}(R)$?
4. Soit $x \in \mathrm{Nil}(R)$. Montrer que $1 - x$ est inversible.
5. Déduire que si R est commutatif, la somme d'un nilpotent et d'un inversible de R est inversible.

Exercice 3.
On considère $A := \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + ib\sqrt{5} \colon a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que A est un anneau.
2. En factorisant 6 dans A de deux manières différentes, montrer que A n'est pas factoriel. [On justifiera que les deux factorisations données sont *vraiment* différentes.]
3. Montrer que si $a + ib\sqrt{5} \mid c + id\sqrt{5}$ dans A alors $a^2 + 5b^2 \mid c^2 + 5d^2$ dans $\mathbb{Z}$.
4. Montrer que ± 1 sont les seuls inversibles de A.
5. Montrer que 3 est irréductible dans A, mais que 3 n'engendre pas un idéal premier de A.
6. Quels sont les diviseurs communs dans A de $x = 9$ et $y = 3(2 + i\sqrt{5})$?
7. Montrer que x et y n'admettent pas de pgcd dans A.

Exercice 4.
En considérant l'idéal $(2, X)$ (plus petit idéal contenant 2 et X) de l'anneau $A = \mathbb{Z}[X]$, montrer que A n'est pas un anneau principal.

Exercice 5. Soit A un anneau principal et $a, b \in A \setminus \{0\}$. Montrer que :

1. il y a coïncidence entre $\mathrm{pgcd}(a, b)$ et générateur de l'idéal (a, b).
2. il y a coïncidence entre $\mathrm{ppcm}(a, b)$ et générateur de l'idéal $(a) \cap (b)$.
3. il y a dans l'anneau factoriel $A = \mathbb{C}[X, Y]$ des éléments irréductibles a et b tels que $(a) \neq (b)$ mais $(a, b) \neq A$.

Exercice 6. (*entiers de Gauss*)
On note $\mathbb{Z}[i] := \{a + ib \colon a, b \in \mathbb{Z}\}$, et pour tout élément $z = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$, on note $\mathrm{N}(z) := a^2 + b^2$ la *norme* de z.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau et que pour tout $z, z' \in \mathbb{Z}[i]$, on a $\mathrm{N}(zz') = \mathrm{N}(z)\mathrm{N}(z')$.
2. Montrer qu'un élément $z \in \mathbb{Z}[i]$ est inversible si et seulement si $\mathrm{N}(z) = \pm 1$. Déduire quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
3. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est *euclidien* : précisément montrer que pour tout a, b de $\mathbb{Z}[i]$, $b \neq 0$, il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $a = bq + r$, avec $\mathrm{N}(r) < \mathrm{N}(b)$.
4. Donner la factorisation de 13 en produit d'irréductibles dans $\mathbb{Z}[i]$.