L3 - Math Info Année **2018-19**
Algorithmique mathématique 1 Université de Bordeaux

TD 4 : Séries de Fourier

Exercice 1.

Calculer les coefficients de Fourier $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ de

$$f\colon x \mapsto \cos^3(x)\,.$$

Exercice 2.

Soit f la fonction 2π-périodique telle que

$$f(x) = x(\pi - x)(\pi + x)\,, \qquad -\pi \leq x \leq \pi\,.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier $(a_n(f))_{n\geq 0}$ et $(b_n(f))_{n\geq 1}$.
2. Déduire la valeur des sommes

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}\,.$$

Exercice 3.

On fixe a tel que $0 < a \leq \pi/2$ et on définit la fonction 2π-périodique impaire f_a par

$$f_a(x) = 1\,,\ (0 < x < 2a) \qquad f_a(x) = 0\,,\ (2a \leq x \leq \pi)\,.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier $(a_n(f))_{n\geq 0}$ et $(b_n(f))_{n\geq 1}$.
2. Déduire la valeur des sommes

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{\sin^4(na)}{n^2}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3(na)}{n}\,.$$

Exercice 4.

Soit f la fonction définie sur $\{a \in \mathbf{R} \colon |a| \neq 1\} \times \mathbf{R}$ par

$$f(a,x) = \ln(1 - 2a\cos(x) + a^2)\,.$$

Pour x fixé, déterminer le développement en série entière de la dérivée partielle de f par rapport à a. En déduire la série de Fourier de la fonction $x \mapsto f(a,x)$, où $a \neq \pm 1$ est fixé.

Exercice 5.

Soit $a \in \mathbf{R}$ et f une fonction 2π-périodique, $C^{0,\mathrm{m}}$, vérifiant :

$$f(x) = \cos(ax)\,, \qquad (-\pi \leq x \leq \pi)\,.$$

1. Déterminer $(a_n(f))_{n\geq 0}$ et $(b_n(f))_{n\geq 1}$.
2. Déduire que si $t \neq k\pi$ (pour tout $k \in \mathbf{Z}$), on a

$$\operatorname{cotan} t = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\,.$$

Exercice 6.

Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction 2π-périodique telle que f' existe et est continue sur $]0, 2\pi[$. Montrer que la série de Fourier de f' s'obtient à partir de celle de f par dérivation terme à terme.

Exercice 7.

Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 2π-périodique, $C^{0,\mathrm{m}}$. On suppose f nulle sur l'intervalle $]-\pi, 0[$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)^2 = \frac{a_0(f)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)^2 \,.$$

En supposant en outre que f coïncide avec sa série de Fourier sur $]0, \pi[$, montrer que l'on a sur cet intervalle :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(f) \sin(nx) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos(nx) \,.$$

Exercice 8.

Soit f une fonction 2π-périodique, $C^{0,\mathrm{m}}$ sur $\mathbf{R}$. Pour tout entier p, on pose

$$f_p(x) = f(px) \,.$$

1. Déterminer les coefficients $c_n(f_p)$ en fonction des coefficients $c_n(f)$ lorsque p ne divise pas n.
2. Supposons que p divise n. Montrer que $c_n(f_p) = 0$:
   (a) en utilisant la formule de Parseval,
   (b) par un calcul direct.