**L3 - Math Info** Année **2018-19**
Algorithmique mathématique 1 Université de Bordeaux

# TP 4 : Résultants

**Exercice 1.** (*Intersections de courbes algébriques*)

1. On considère les polynômes à coefficients rationnels en deux variables
$$f(x,y) = (y^2+6)(x-1) - y(x^2+1)\,, \qquad g(x,y) = (x^2+6)(y-1) - x(y^2+1)$$
Dans `SAGE`, on utilise la commande `x, y = QQ['x, y'].gens()` pour définir `x` et `y` comme les générateurs de l'anneau des polynômes à deux indéterminées sur $\mathbf{Q}$. À l'aide de la commande `f.resultant(g,y)`, qui calcule le résultant par rapport à la variable $y$ de $f$ et $g$, déterminer l'ensemble solution :
$$S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = g(x,y) = 0\}\,.$$
[On pourra utiliser la syntaxe `f.subs(x=a)` pour assigner la valeur $a$ à $x$ dans l'expression $f$, ainsi que la fonction `factor` pour trouver des racines]. Donner une interprétation géométrique à cet ensemble.
2. Représenter graphiquement les courbes données par $f=0$ et $g=0$ sur une même fenêtre graphique $-10 \leqslant x \leqslant 10$ et $-10 \leqslant y \leqslant 10$ (voir `implicit_plot` et `show`).
3. Déterminer les points d'intersection à coordonnées rationnelles de la courbe donnée par l'équation $y^2 = x^3 + 2x + 1$ et du cercle de centre $(3,11)$ et de rayon 13. Représenter sur une même fenêtre graphique la courbe et le cercle.
4. On considère la courbe donnée paramétriquement par :
$$f(t) = \frac{t}{1+t^3}\,, \qquad g(t) = \frac{t^2}{1+t^3}\,.$$
Montrer que cette paramétrisation est régulière (i.e. $f'(t)$ et $g'(t)$ n'ont pas de zéro commun ; utiliser `diff`, `derivative`). Donner une équation cartésienne de cette courbe puis la représenter graphiquement. [Pour tracer la courbe, on comparera `implicit_plot` et `parametric_plot`.]

**Exercice 2.** (*Courbe duale et tangentes multiples*)

Étant donné une courbe algébrique plane donnée par une équation cartésienne :
$$C_f \colon f(x,y) = 0\,,$$
où $f(X,Y) \in \mathbb{Q}[X,Y]$, on appelle *courbe duale* $\mathcal{D}(C_f)$ associée à $C_f$ l'ensemble des points $(a,b)$ tels que $y = ax+b$ est l'équation d'une tangente à $C_f$. Si l'on note $\gamma_{a,b}(t) = (t, at+b)$, un système d'équations définissant la courbe duale est
$$\mathcal{D}(C_f)\colon \begin{cases} f\big(\gamma_{a,b}(t)\big) = 0\,, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(\gamma_{a,b}(t)\big) = 0\,. \end{cases}$$
La courbe de Trott est la courbe plane $\mathcal{T}$ d'équation
$$144(x^4+y^4) - 225(x^2+y^2) + 350x^2y^2 + 81 = 0.$$

1. Tracer avec `SAGE` la courbe de Trott dans la fenêtre graphique $[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5$.

On souhaite estimer le nombre de droites tangentes à $\mathcal{T}$ en au moins deux points.

2. Donner une équation cartésienne pour la courbe duale à la courbe de Trott. [Pour cela on pourra introduire l'anneau $\mathbf{Q}[x,y,a,b]$ (par une commande analogue à celle de l'exercice prédécent). Pour projeter dans $\mathbf{Q}[a,b]$ un polynôme $P$ ne dépendant que de $a$ et $b$, on utilisera la commande `QQ['a, b'](P)`.]

3. Tracer la courbe duale à la courbe de Trott avec `SAGE` dans la fenêtre graphique $[-5, 5] \times [-5, 5]$. Utiliser l'option `plot_points` pour un tracé plus précis.
4. Utiliser une lecture graphique pour dénombrer le nombre de tangentes en au moins 2 points à $\mathcal{T}$ (attention aux tangentes verticales : elles ne sont pas représentées par la courbe duale).

**Exercice 3.** (*Recherche de polynôme annulateur*)

1. Soient $f$ et $g$ deux polynômes non constants à coefficients rationnels. On fixe une racine complexe $\alpha$ (resp. $\beta$) de $f$ (resp. $g$). Donner (sans utiliser `SAGE`) en fonction de $\alpha$ et $\beta$ une racine du polynôme en la variable $z$ :
$$s(z) = \mathrm{res}_x(f(x), g(z-x)) \,.$$
2. En utilisant la question précédente, déterminer un polynôme non nul à coefficients rationnels s'annulant en $\gamma := \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}i$. Est-ce le polynôme à coefficents rationnels de degré minimal s'annulant en $\gamma$ ?
3. Avec les notations de la questions 1, on considère maintenant le polynôme en $z$ :
$$\mathrm{res}_x\big(f(x), x^{\deg(g)} g(z/x)\big) \,.$$
Utiliser ce polynôme pour un bon choix de $f$ et $g$ pour déterminer un polynôme annulateur de $(1 + \sqrt[7]{2})\sqrt{2 + \sqrt{5}}$. Est-il de degré minimal ?