Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

Le Manach Florian

10 décembre 2013

Introduction

Après avoir étudié les fonctions à variable réelle, on s'intéresse naturellement à l'étude de fonctions à variable complexe et notamment à leur dérivabilité que l'on définira de manière analogue à la dérivabilité sur $\mathbb{R}$. Mais contrairement aux résultats sur les fonctions à variable réelle, la $\mathbb{C}$-dérivabilité d'une fonction entraîne une grande régularité de celle-ci. De telles fonctions seront appelées fonctions holomorphes. La juxtaposition des préfixes grecs *holo* (« entier ») et *morphos* (« forme ») traduit une notion de rigidité : « la forme reste entière ».

Notations
Dans tout ce document Ω désignera un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.
Pour $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ on notera $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z-a| < r\}$, $\mathbb{D}_r = D(0,r)$ et $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1$.

Chapitre 1

Holomorphie : définitions et théorie de Cauchy

1.1 Définition et caractérisation des fonctions holomorphes

Définition 1.1.1 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $z \in \Omega$.*
On dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z si et seulement si

$$\lim_{\substack{\omega \to z \\ \omega \in \Omega \setminus \{z\}}} \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega} \quad \textit{existe.}$$

Dans ce cas on note $f'(z)$ cette limite.

Définition 1.1.2 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$.*
On dit que f est holomorphe sur Ω si et seulement si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω.
Dans ce cas on obtient la fonction $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ que l'on appelle fonction dérivée de f.
On notera $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.
Une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ est dite entière.

Exemple 1.1.3
1) $z \mapsto z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2) $z \mapsto \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.
3) $z \mapsto \overline{z}$ n'est holomorphe sur aucun ouvert de $\mathbb{C}$.
En effet pour $h \in \mathbb{C}^*$, on a $\frac{\overline{z+h}-\overline{z}}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$. Or $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{\overline{h}}{h} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \in i\mathbb{R}^*}} \frac{\overline{h}}{h} = -1$.

Proposition 1.1.4 *La somme, le produit et la composée de fonctions holomorphes sont holomorphes.*
Plus précisément si $(f, g) \in \mathcal{H}(\Omega)^2$ alors
- *$f + g \in \mathcal{H}(\Omega)$ et on a $(f + g)' = f' + g'$;*
- *$fg \in \mathcal{H}(\Omega)$ et on a $(fg)' = f'g + fg'$.*

Et si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f(\Omega) \subset \Omega'$ et $g \in \mathcal{H}(\Omega')$ alors
- *$(g \circ f) \in \mathcal{H}(\Omega)$ et on a $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$.*

La démonstration de cette proposition peut se faire de la même manière que pour les fonctions à variable réelle. On peut aussi utiliser la caractérisation suivante.

On va maintenant identifier $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ et caractériser la notion de $\mathbb{C}$-dérivabilité grâce à la notion de $\mathbb{R}$-différentiabilité.

Proposition 1.1.5 *(Conditions de Cauchy-Riemann)*
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $z \in \Omega$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) *f est $\mathbb{C}$-dérivable en z ;*

(ii) *f est $\mathbb{R}$-différentiable en z et $df(z)$ est $\mathbb{C}$-linéaire ;*

(iii) *f est $\mathbb{R}$-différentiable en z et $\frac{\partial}{\partial x} f(z) + i\frac{\partial}{\partial y} f(z) = 0$;*

(iv) *f est $\mathbb{R}$-différentiable en z et $\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}f(z) = \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Im}f(z)$ et $\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Im}f(z) = -\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Re}f(z)$.*

De plus si l'une de ces conditions est vérifiée on a $df(z) = f'(z)id_{\mathbb{C}}$ et
$f'(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(z) - i\frac{\partial}{\partial y} f(z)\right) = \frac{\partial}{\partial x} f(z) = -i\frac{\partial}{\partial y} f(z)$.

Démonstration :
$(i) \Rightarrow (ii)$: Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en z alors on a quand ω tend vers z, $f(\omega) = f(z) + f'(z)(\omega - z) + o(\omega - z)$. Ainsi f est $\mathbb{R}$-différentiable en z et $df(z) = f'(z)id_{\mathbb{C}}$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: f étant $\mathbb{R}$-différentiable en z, on a $df(z)(i) = df(z)(0,1) = \frac{\partial}{\partial y} f(z)$.
Or $df(z)$ est $\mathbb{C}$-linéaire, on a donc $df(z)(i) = i\ df(z)(1) = i\frac{\partial}{\partial x} f(z)$. D'où le résultat.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: On obtient clairement le résultat en identifiant partie réelle et imaginaire.

$(iv) \Rightarrow (i)$: On a quand ω tend vers z, $f(\omega) = f(z) + df(z)(\omega - z) + o(\omega - z)$.
Or $df(z)(a + ib) = \frac{\partial}{\partial x} f(z)a + \frac{\partial}{\partial y} f(z)b$ et d'après (iv) on a $\frac{\partial}{\partial x} f(z) = -i\frac{\partial}{\partial y} f(z)$.
Ainsi $df(z)(a + ib) = \frac{\partial}{\partial x} f(z)(a + ib) = -i\frac{\partial}{\partial y} f(z)(a + ib)$. On a donc

$$\lim_{\substack{\omega \to z \\ \omega \in \Omega \setminus \{z\}}} \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega} = \frac{\partial}{\partial x} f(z) = -i\frac{\partial}{\partial y} f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(z) - i\frac{\partial}{\partial y} f(z)\right).$$

□

Corollaire 1.1.6 *Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *f est constante sur Ω ;*

(ii) $\mathrm{Re}f$ *est constante sur Ω ;*

(iii) $\mathrm{Im}f$ *est constante sur Ω ;*

(iv) $|f|$ *est constante sur Ω.*

Démonstration :
L'équivalence entre (i), (ii) et (iii) découle directement de la proposition précédente. $(i) \Rightarrow (iv)$ est évidente, il reste donc à montrer $(iv) \Rightarrow (i)$. Si $|f| = 0$ alors $f = 0$ est constant. Sinon $|f| \neq 0$ et f ne s'annule pas sur Ω. On a donc $\overline{f} = \frac{|f|^2}{f}$ est holomorphe sur Ω (car $|f|$ constant) en tant que composée de fonctions holomorphes. Ainsi $\mathrm{Re}f = \frac{f + i\overline{f}}{2}$ est holomorphe sur Ω. D'après la proposition précédente on a $\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}f(z) = \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Re}f(z) = 0$ et il vient (ii) qui est équivalente à (i).
□

1.2 Intégrale curviligne

Dans cette section, on définie les intégrales curvilignes et on étudie les propriétés de l'indice dans le but d'énoncer le théorème de Cauchy.

Définition 1.2.1 *On dit que γ est un chemin de Ω si $\gamma : [0,1] \to \Omega$ est continue sur $[0,1]$. On appelle lacet tout chemin γ vérifiant $\gamma(0) = \gamma(1)$.*

Définition 1.2.2 *Soit γ un chemin de Ω de classe C^1 par morceaux et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application continue sur Ω. On définit l'intégrale de f le long de γ par*

$$\int_\gamma f = \int_0^1 (f \circ \gamma)\gamma'.$$

Dans les calculs on notera $\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z$ au lieu de $\int_\gamma f$.

Définition 1.2.3 *Soit γ un chemin de Ω de classe C^1 par morceaux. L'indice de γ est la fonction Ind_γ définit sur $\mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$ par*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\xi - z}\, \mathrm{d}\xi.$$

Proposition 1.2.4 *Soit γ un chemin de Ω de classe C^1 par morceaux.*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1]), \quad \mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$$

Démonstration :
Sans perte de généralité, on peut supposer que γ est C^1 sur $[0,1]$.
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$, posons ϕ le fonction définie sur $[0,1]$ par

$$\phi(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, \mathrm{d}s\right).$$

Montrons que $\phi(1) = 1$ ce qui nous donnera le résultat.
La fonction ϕ est dérivable sur $[0,1]$ et on a

$$\phi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\, \phi(t).$$

Ainsi la fonction $\frac{\phi}{\gamma - z}$ est dérivable sur $[0,1]$ et est de dérivée nulle. On en conclut qu'elle est constante sur $[0,1]$ et on a

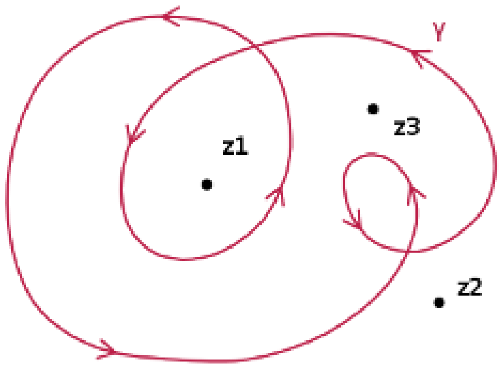
$$\frac{\phi(0)}{\gamma(0) - z} = \frac{\phi(1)}{\gamma(1) - z} = \frac{\phi(1)}{\gamma(0) - z}$$

car γ est un lacet. Ceci entraîne que $\phi(1) = \phi(0) = 1$.
Or $e^w = 1$ si et seulement si $w \in 2i\pi\mathbb{Z}$, ainsi on a que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, \mathrm{d}s \in \mathbb{Z}.$$

□

Exemple 1.2.5 *Graphiquement l'indice d'un lacet γ en un point z peut se voir comme le « nombre de tour » de γ autours du point z.*
Par exemple sur le dessin suivant on a $Ind_\gamma(z_1) = 2$, $Ind_\gamma(z_3) = 1$, $Ind_\gamma(z_2) = 0$.



Proposition 1.2.6 *Soit γ un chemin de Ω de classe C^1 par morceaux.*
Ind_γ *est constante sur chaque composante connexe de de $\mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$.*

1.3 Théorie de Cauchy et développement en série entière

Le théorème suivant est fondamentale. Il justifie la grande régularité des fonctions holomorphes. En effet on peut déterminer la valeur d'une fonction holomorphe en un point en connaissant sa valeur sur un lacet « entourant » le point. Cela implique que le comportement d'une fonction holomorphe autours d'un point (même très loin de ce point) est directement influencé par la valeur de la fonction en ce point.

Théorème 1.3.1 *(de Cauchy)*
Soit γ un chemin de Ω de classe C^1 par morceaux et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. On a alors

$$\forall z \in \Omega \setminus \gamma([0,1]), \quad f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi.$$

Du théorème de Cauchy on en déduit une caractérisation des fonctions holomorphes : Le théorème de Morera.

Théorème 1.3.2 *(de Morera)*
Soit f une application continue sur Ω. On a alors

$$f \in \mathcal{H}(\Omega) \Longleftrightarrow \forall (a,b,c) \in \Omega^3, \quad \int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0$$

Dans ce qui suit nous allons établir l'équivalence entre les fonctions holomorphes et les fonctions analytiques. Cette deuxième classe de fonctions sera plus facile à étudier (sur certain point).

Définition 1.3.3 *Un fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite analytique sur Ω si elle est développable en série entière au voisinage de chaque point. C'est-à-dire que pour tout $a \in \Omega$, il existe un voisinage U de a dans Ω et il existe $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout $z \in U$*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Théorème 1.3.4 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$.*
On a que f est holomorphe sur Ω si et seulement si f est analytique sur Ω.

Démonstration :
Supposons que f soit analytique sur Ω. Soit $a \in \Omega$, montrons que f est $\mathbb{C}$-dérivable en a ce qui équivaut à ce que g soit $\mathbb{C}$-dérivable en 0 avec $g : z \mapsto f(z+a)$.
Dans un voisinage de 0 on a

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Ainsi

$$\frac{g(z)-g(0)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} a_n z^{n-1} \underset{z\to 0}{\longrightarrow} a_1$$

Ceci prouve que f est analytique sur Ω.

Supposons maintenant que f soit holomorphe sur Ω. Soit $a \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$.
Posons $\gamma : t \mapsto a + re^{2i\pi t}$.
D'après le théorème de Cauchy, on a pour tout $z \in D(a,r)$,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{2i\pi t})}{a - z + re^{2i\pi t}} re^{2i\pi t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{2i\pi t})}{re^{2i\pi t}} \frac{1}{1+\frac{a-z}{re^{2i\pi t}}} re^{2i\pi t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{2i\pi t})}{re^{2i\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-z)^n}{r^n e^{2in\pi t}} re^{2i\pi t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (a-z)^n \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{2i\pi t})}{r^n e^{2in\pi t}}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Ces égalités viennent d'une part du fait que $|a-z| < r$ et d'autre part du fait que la série $\sum \frac{(a-z)^n}{r^n e^{2in\pi t}}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.
Ainsi on vient de montrer que f se développe en série entière en a ce qui conclut la preuve. $\square$

Corollaire 1.3.5 *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$.*
Plus précisément, si $a \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset \Omega$ alors il existe $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall z \in D(a,r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ et on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-a)^{n-k}.$$

On vient donc de montrer dans cette partie c'est que toute fonction holomorphe est analytique. Ce résultat est puissant et non trivial à montrer puisqu'il utilise le théorème de Cauchy. Cela justifie bien que la dérivabilité sur $\mathbb{C}$ implique une plus grande régularité que la dérivabilité sur $\mathbb{R}$. En effet la fonction $t \mapsto e^{-\frac{1}{t^2}}\ \chi_{\,]0,\infty[}(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.
De plus ce résultat nous permettra de montrer plus facilement certaine propriété des fonctions holomorphes comme le théorème des zéros isolés.

Chapitre 2

Propriétés des fonctions holomorphe

2.1 Relations entre coefficients et intégrale

Proposition 2.1.1 *Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $a \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$.*
Posons le lacet $\gamma : t \mapsto a + re^{2i\pi t}$. Alors on a

$$\forall z \in D(a,r),\ \forall n \in \mathbb{N},\quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\ \mathrm{d}\xi$$

De plus il existe $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall z \in D(a,r)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ et on a

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\ \mathrm{d}\xi$$

Le théorème de Cauchy nous permet d'exprimer les dérivées d'une fonction holomorphe en un point grâce à la valeur de la fonction sur un lacet autours du point. Cela nous permet de contrôler les dérivées d'une fonction holomorphe grâce au théorème suivant.

Théorème 2.1.2 *(Inégalité de Cauchy)*
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $a \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup\{f(z),\ |z-a| = r\}.$$

Théorème 2.1.3 *(de Liouville)*
Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Alors f est bornée sur $\mathbb{C}$ si et seulement si f est constante sur $\mathbb{C}$.

Démonstration :
D'après l'inégalité de Cauchy on a pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, $|f'(a)| \leq \frac{1}{r}\sup\{f(z),\ |z-a| = r\}$. Or f est bornée sur $\mathbb{C}$ donc quand r tend vers $+\infty$ on obtient $f'(a) = 0$ ceci pour tout $a \in \mathbb{C}$. Ainsi f est constante sur $\mathbb{C}$. □

Ce théorème a de nombreuses applications importantes. Nous allons en retenir deux fondamentales : le théorème de D'Alembert-Gauss ainsi qu'une propriété sur le spectre d'un opérateur linéaire sur un $\mathbb{C}$ espace de Banach.

Théorème 2.1.4 *(de D'Alembert-Gauss)*
Tout polynôme non constant à coefficient dans $\mathbb{C}$ admet une racine complexe.

Démonstration :
Soit P un polynôme non constant à coefficient dans $\mathbb{C}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. La fonction P étant holomorphe sur $\mathbb{C}$ et sans zéro, on a que la fonction $\frac{1}{P}$ est entière. D'après le théorème de Liouville $\frac{1}{P}$ est bornée sur $\mathbb{C}$. Ceci est absurde car $\deg(P) \geq 1$ donc $|P(z)|$ tend vers l'infini quand $|z|$ tend vers l'infini. Ainsi P admet une racine complexe. $\square$

Proposition 2.1.5 *Le spectre d'un opérateur linéaire sur un $\mathbb{C}$ espace de Banach est non vide.*

Démonstration :
Soit T un opérateur linéaire sur X un $\mathbb{C}$ espace de Banach.
On note $\rho(T) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } (zI - T) \text{ soit inversible}\}$.
Soit $\varphi \in X'$ une forme linéaire continue sur X et $g : z \mapsto \varphi((zI - T)^{-1})$ définie sur $\rho(T)$.

Nous allons montrer que g est holomorphe sur $\rho(T)$. Ainsi si $\rho(T) = \mathbb{C}$ on obtiendrait une absurdité par le théorème de Liouville.
Soit $(\lambda, \mu) \in \rho(T)^2$, on a par l'équation de la résolvante

$$\begin{aligned} g(\lambda) - g(\mu) &= \varphi((\lambda I - T)^{-1} - (\mu I - T)^{-1}) \\ &= (\mu - \lambda)\varphi((\lambda I - T)^{-1}(\mu I - T)^{-1}) \end{aligned}$$

Or l'application $\mu \mapsto (\mu I - T)^{-1}$ est continue sur $\rho(T)$, donc on obtient que

$$\frac{g(\lambda) - g(\mu)}{\lambda - \mu} \underset{\mu \to \lambda}{\longrightarrow} -\varphi((\lambda I - T)^{-2}).$$

Ceci prouve que g est holomorphe $\rho(T)$.
Raisonnons maintenant par l'absurde et supposons que $\rho(T) = \mathbb{C}$ (et donc que le spectre de T est vide). Par le théorème de Liouville, on a que g est bornée sur $\mathbb{C}$.
Or pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$zg(z) = \varphi(z(zI - T)^{-1}) = \varphi\left(\left(I - \frac{1}{z}T\right)^{-1}\right) \underset{|z| \to \infty}{\longrightarrow} \varphi(I).$$

Ainsi $g(z)$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini et comme g est constante on a que $g = 0$ ceci pour tout $\varphi \in X'$. C'est absurde car $T^{-1} \neq 0$ et donc le théorème d'Hahn-Banach nous assure l'existence d'une forme linéaire continue sur X qui vérifie $g(0) = \varphi(T^{-1}) \neq 0$. $\square$

2.2 Principe du maximum et lemme de Schwartz

Théorème 2.2.1 *(Principe du Maximum)*
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $a \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. On a alors

$$\forall z \in D(a,r), \quad |f(z)| \leq \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a + re^{i\theta})|.$$

De plus le cas d'égalité est obtenu si et seulement si f est constante sur $D(a,r)$.

Corollaire 2.2.2 *Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $a \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$.*
Si f ne s'annule pas sur $D(a,r)$ alors on a

$$\forall z \in D(a,r), \quad |f(z)| \geq \min_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a + re^{i\theta})|.$$

Démonstration :
Il suffit de considérer le fonction $\frac{1}{f}$ qui est holomorphe sur $D(a,r)$ et d'appliquer le principe du maximum. $\square$

Lemme 2.2.3 *(de Schwarz)*
Soit f holomorphe sur $\mathbb{D}$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que
- *pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|f(z)| \leq 1$;*
- *0 est un zéro d'ordre m de f, c'est à dire $\forall k < m$, $f^{(k)}(0) = 0$ et $f^{(m)}(0) \neq 0$.*

Alors on a
(i) pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|f(z)| \leq |z|^m$;
(ii) $f^{(m)}(0) \leq m!$.

De plus, si on a égalité dans (i) pour un $z_0 \in \mathbb{D}^*$ ou dans (ii) alors

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \quad \textit{tel que} \quad \forall z \in \mathbb{D},\ f(z) = e^{i\theta} z^m.$$

Démonstration :
Soit $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = \frac{f(z)}{z^m}$ si $z \neq 0$ et $g(0) = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$. La fonction g est holomorphe sur $\mathbb{D}$ car 0 est un zéro d'ordre m de f (on peut le voir en développant f en série entière sur $\mathbb{D}$). En fait g est l'unique fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ vérifiant $f(z) = z^m g(z)$.

Pour tout $r \in]0,1[$ et pour tout $z \in \partial\mathbb{D}_r$ on a $|g(z)| \leq \frac{1}{r^n}$ ceci car $|f(z)| \leq 1$ et $z \neq 0$.
D'après le principe du maximum on obtient que pour tout $z \in \mathbb{D}_r$, $|g(z)| \leq \frac{1}{r^n}$.
Soit maintenant $z \in \mathbb{D}$ et $r > |z|$. On a donc $|g(z)| \leq \frac{1}{r^n}$ et en faisant tendre r vers 1 on obtient que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|g(z)| \leq 1$. Ainsi de par la définition de g on obtient (i) et (ii).

Maintenant supposons qu'il existe un $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $z_0 \neq 0$ et $|f(z_0)| = |z_0|$ ou que $f^{(m)}(0) = m!$. Dans ces deux cas il existe $z_1 \in \mathbb{D}$ tel que $|g(z_1)| = 1$ en prenant $z_1 = z_0$ dans le premier cas et $z_1 = 0$ dans le second. La fonction g atteint donc son maximum dans $\mathbb{D}$, et par le principe du maximum g est constante sur $\mathbb{D}$. De plus $|g| = 1$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $g(z) = e^{i\theta}$, d'où le résultat. $\square$

Corollaire 2.2.4 *(Inégalité de Borel-Carathéodory)*
Soit f une fonction entière vérifiant $f(0) = 0$. On a alors pour tout $R > 0$,

$$\sup\{|f(z)|,\ |z| \leq R\} \leq 2 \sup\{\mathrm{Re}(f(z)),\ |z| \leq 2R\}.$$

Démonstration :
Soit $R > 0$ et $M = \sup\{\mathrm{Re}(f(z)),\ |z| \leq 2R\}$, posons g l'application définie sur $\mathbb{D}$ par

$$g(z) = \frac{f(2Rz)}{2M - f(2Rz)}.$$

Pour $|z| \leq 2R$ on a

$$|2M - f(z)|^2 = 4M^2 - 4M\mathrm{Re}(f(z)) + |f(z)|^2 \geq |f(z)|^2$$

donc la fonction g est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et vérifie $g(0) = 0$ et $|g(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.
Ainsi grâce au lemme de Schwarz on obtient que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|g(z)| \leq |z|$ ce qui entraîne que pour tout $z \in D(0,R)$, on a

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{2R}|2M - f(z)| \leq \frac{|z|}{2R}(2M + |f(z)|) \leq 2M\frac{|z|}{2R - |z|} \leq 2M.$$

On obtient donc que $\sup\{|f(z)|,\ |z| \leq R\} \leq 2M = 2\sup\{\mathrm{Re}(f(z)),\ |z| \leq 2R\}$ $\square$

2.3 Principe des zéros isolés

Théorème 2.3.1 *(Principe des zéros isolés)*
Soit Ω un ouvert connexe et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Si f est non nulle, alors l'ensemble des zéros de f est sans points d'accumulations dans Ω.
De plus pour $a \in \Omega$ si $f(a) = 0$ alors il existe un voisinage V_a de a, $n \in \mathbb{N}$ et $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tel que $g(a) \neq 0$ et

$$f(z) = (z-a)^n g(z).$$

Un tel entier n est unique et on dit que a est un zéro d'ordre n de f.

Remarque
Le théorème est faux si Ω n'est pas connexe. Par exemple si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec Ω_1 et Ω_2 deux ouverts non vides qui vérifient $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$ alors la fonction f qui vérifie $f(\Omega_1) = \{0\}$ et $f(\Omega_2) = \{1\}$ est holomorphe et ne vérifie pas le principe des zéros isolés.

Corollaire 2.3.2 *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors l'ensemble de ses zéros est au plus dénombrable.*

Démonstration :
Soit (K_n) une suite exhaustive de compacts pour Ω (voir le début de la preuve du théorème de Montel 2.4.3). Dans chaque compact K_n, la fonction f admet un nombre fini de zéro. En effet car sinon on considère la suite infini des zéros distincts de f dans K_n qui admet une sous-suite qui converge (car K_n compact) ce qui est absurde car les zéros de f sont isolés. Ainsi comme $\Omega = \bigcup_n K_n$, le nombre de zéros de f est au plus dénombrable. $\square$

Théorème 2.3.3 *(Principe du prolongement analytique)*
Soit Ω un ouvert connexe et $(f, g) \in \mathcal{H}(\Omega)^2$.
Si A est un sous ensemble de Ω ayant un point d'accumulation dans Ω alors

$$f_{|A} = g_{|A} \iff f = g.$$

Corollaire 2.3.4 *Si Ω est un ouvert connexe et si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ admet un maximum local alors f est constante sur Ω.*

Exemple 2.3.5 *(et contre exemple)*
- *Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$, alors $f = id_{|\mathbb{D}}$;*
- *Par contre $f : z \mapsto \sin\left(\frac{2\pi}{z}\right)$ vérifie $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$ mais f est non nulle sur $\mathbb{C}^*$ car $f(4) = 1$.*

Application :

Proposition 2.3.6 *Soit $(a_n) \in]1, +\infty[^{\mathbb{N}}$ qui vérifie $\lim a_n = +\infty$. Posons pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{a_n - x} \end{array}.$$

On a alors que $F = Vect(\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\})$ est dense dans $C^0([0,1]) = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}$.

Démonstration :
Rappelons tout d'abord que F est dense dans $C^0([0,1])$ si et seulement si toute forme linéaire continue sur $C^0([0,1])$, nulle sur F est nulle sur $C^0([0,1])$. Ce résultat vient de la version géométrique du théorème de Hahn Banach.

Soit φ une forme linéaire continue sur $C^0([0,1])$ nulle sur F.
Posons ϕ la fonction définie sur $\mathbb{D}$ par

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi((id_{[0,1]})^k) z^k.$$

La fonction ϕ est bien définie car pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|\varphi((id_{[0,1]})^k)| \leq ||\varphi||$ donc la série entière a un rayon de convergence supérieur à 1. De plus ϕ est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\phi\left(\frac{1}{a_n}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi((id_{[0,1]})^k) \frac{1}{(a_n)^k} \\
&= \varphi\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{id_{[0,1]}}{a_n}\right)^k\right) \\
&= \varphi\left(\frac{a_n}{a_n - id_{[0,1]}}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ceci car $a_n > 1$. Or $\lim a_n = +\infty$, donc l'ensemble des zéros de ϕ admet un point d'accumulation en 0. Par le principe des zéros isolés on en déduit que ϕ est nulle sur $\mathbb{D}$. Ainsi φ est nulle sur l'ensemble des polynôme qui est dense dans $C^0([0,1])$ donc par continuité $\varphi = 0$ ce qui conclut cette démonstration. □

2.4 Suites et intégrales de fonctions holomorphes

Théorème 2.4.1 *(de Weierstrass)*
Soit $(f_n) \in \mathcal{H}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction f. On a alors que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et que (f'_n) converge uniformément sur tout compact de Ω vers f'.

Exemple 2.4.2 *(Fonction ζ de Riemann)*
La fonction $\zeta : z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ est holomorphe sur $D_\zeta = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 1\}$.

Théorème 2.4.3 *(de Montel)*
Soit $(f_n) \in \mathcal{H}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout compact K de Ω,

$$\exists M > 0,\ \forall z \in K,\ |f(z)| \leq M.$$

Alors il existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tel que (f_n) converge uniformément sur tout compact de Ω vers f.

Démonstration :
Commençons par construire (K_n) une suite exhaustive de compacts pour Ω, c'est-à-dire une suite (K_n) qui vérifie

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n est un compact de Ω ;

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$;

(iii) $\Omega = \bigcup_{n \geq 0} K_n$.

Il suffit de prendre $K_n = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq n \ \text{ et } \ \mathrm{d}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq 2^{-n}\}$.

On va ensuite utiliser le théorème d'Ascoli appliqué à la suite (f_k) sur le compact K_n.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est continue (car holomorphe) sur le compact K_n et pour tout $x \in K_n$, l'ensemble $\{f_k(x),\ k \in \mathbb{N}\}$ est bornée car (f_k) est uniformément bornée sur K_n.
Montrons que la suite (f_k) est équicontinue sur K_n.

Soit $x \in K_n$, il existe δ tel que $B(x, \delta) \subset K_{n+1}$ car $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$. De plus d'après l'hypothèse du théorème il existe $C > 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall z \in K_{n+1},\ |f_k(z)| \leq C$.
Soit $\varepsilon > 0$, posons $\alpha = \min\left(\frac{\delta\varepsilon}{2C}, \frac{\delta}{2}\right) > 0$.
Pour tout $y \in B(x, \alpha)$ et $k \in \mathbb{N}$ on a par la formule de Cauchy pour le lacet $\gamma : t \mapsto x + \delta e^{2i\pi t}$ que

$$\begin{aligned}
|f_k(x) - f_k(y)| &= \left|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f_k(\xi)}{\xi - x} - \frac{f_k(\xi)}{\xi - y}\right| \\
&= \left|\frac{x-y}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f_k(\xi)}{(\xi - x)(\xi - y)}\right| \\
&\leq \frac{|x-y|}{2\pi}\frac{2\pi\delta C}{\frac{\delta^2}{2}} \\
&\leq \frac{2C}{\delta}\alpha \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

En effet on a pour $t \in [0, 1]$, on a
- $|f_k(\gamma(t))| \leq C$;
- $|\gamma(t) - x| = \delta$;
- $|x - y| \leq \alpha \leq \frac{\delta}{2}$;
- $|\gamma(t) - y| \geq |\delta e^{2i\pi t}| - |x - y| \geq \frac{\delta}{2}$.

Ainsi on a

$$\forall x \in K_n,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall y \in B(x, \alpha) \cap K_n,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \ |f_k(x) - f_k(y)| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite (f_k) est équicontinue sur K_n.
On en déduit d'après le théorème d'Ascoli qu'il existe $\varphi_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f_{\varphi_n(k)})_k$ converge uniformément sur K_n.

On va maintenant utiliser le procédé diagonal pour extraire une suite de (f_k) qui converge uniformément sur tous les K_n. Pour cela on construit par récurrence une suite de fonctions strictement croissantes (ψ_n) qui vérifie $\psi_0 = \varphi_0$ et pour $n > 0$, ψ_n telle que $(f_{\psi_0 \circ \cdots \circ \psi_{n-1} \circ \psi_n(k)})_k$ converge uniformément sur K_n (l'existence vient de ce qui précède).
Maintenant si on pose $\psi(k) = \psi_0 \circ \cdots \circ \psi_k(k)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_{\psi(k)})$ est une sous suite de $(f_{\psi_0 \circ \cdots \circ \psi_{n-1} \circ \psi_n(k)})_k$ qui converge uniformément sur K_n. Ainsi $(f_{\psi(k)})$ converge uniformément sur tout les K_n. On notera f sa limite simple sur Ω. La fonction f est holomorphe sur Ω par le théorème de Weierstrass.

Pour finir la démonstration prenons K un compact quelconque de Ω, on a $\mathrm{d}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$ car $K \subset \Omega$ et Ω est ouvert. Ainsi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{d}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 2^{-n}$ et donc $K \subset K_n$.
De plus $(f_{\psi(k)})$ converge uniformément vers f sur K_n donc sur K. D'où le résultat. □

Théorème 2.4.4 *(d'holomorphie sous l'intégrale)*
Soit (X, T, μ) un espace mesuré et soit $F : X \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant

(i) $\forall z \in \Omega,\ x \mapsto F(x,z)$ *est mesurable ;*

(ii) $\forall x \in X,\ z \mapsto F(x,z)$ *est holomrphe sur* Ω *;*

(iii) pour tout compact K *de* Ω, $\exists g \in L^1(X,\mu)$ *tel que* $\forall (x,z) \in X \times K,\ |F(x,z)| \leq g(x)$.

Alors la fonction $f : z \mapsto \int_X F(x,z)\ \mathrm{d}\mu(x)$ *est holomorphe sur* Ω*. De plus pour tout* $z \in \Omega$, $f'(z) = \int_X \frac{\partial}{\partial z} F(x,z)\ \mathrm{d}\mu(x)$.

Exemple 2.4.5 *(Fonction* Γ *d'Euler)*
La fonction $\Gamma : z \mapsto \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t$ *est holomorphe sur* $D_\Gamma = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

Chapitre 3

Fonctions méromorphes et applications des théorèmes d'inversion

3.1 Méromorphie et théorème des résidus

Définition 3.1.1 *Soit $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$.*
On dit que a est un pôle de f d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ si $g : z \mapsto (z-a)^m f(z)$ est holomorphe sur Ω et vérifie $g(a) \neq 0$.

Définition 3.1.2 *On dit que f est méromorphe sur Ω s'il existe un ensemble $A \subset \Omega$ vérifiant*

(i) f est holomorphe sur $\Omega \setminus A$;

(ii) A n'a pas de points d'accumulation dans Ω (i.e. $\forall x \in \Omega, \exists \varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap A \subset \{x\}$) ;

(iii) pour tout $a \in A$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que x soit un pôle de f d'ordre m.

De plus l'ensemble A est unique et on le note A_f.
On note $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω.

Exemple 3.1.3 *Si $(f, g) \in \mathcal{H}(\Omega) \times (\mathcal{H}(\Omega) \setminus \{0\})$ alors $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}(\Omega)$.*

Exemple 3.1.4 *(Prolongement de la fonction Γ d'Euler)*
La fonction $\Gamma : z \mapsto \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Démonstration :
La définition de Γ a bien un sens car pour $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(z) > 0$, l'application $f : t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. En effet f est continue sur $]0, +\infty[$ et $|t^{z-1}e^{-t}| = t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t}$ donc $f(t) \underset{0}{=} o(t^{\mathrm{Re}(z)-1})$ et $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

D'après la remarque précédente on observe que le domaine de Γ est limité par l'intégrabilité de f en 0. On écrit donc $\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t$ et on s'intéresse à la première intégrale.
En utilisant la définition de l'exponentielle, on a pour $t > 0$ et $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(z) > 0$,

$$f(t) = t^{z-1}e^{-t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{z+k-1}$$

et ensuite il vient que

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{z+k-1}\ \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{z+k-1}\ \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k}.\end{aligned}$$

On justifie l'interversion de la somme et de l'intégrale dans la deuxième égalité par le théorème de convergence dominée de Lebesgue appliqué aux sommes partielles $S_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} t^{z+k-1}$. En effet on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est mesurable (car continue) sur $]0,+\infty[$, la suite S_n converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers f et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$

$$|S_n(t)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{\mathrm{Re}(z)+k-1}}{k!} \leq t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^t$$

avec $t \mapsto t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^t$ qui est intégrable sur $]0,1]$ car $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Ainsi on a montré que pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(z) > 0$,

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t. \tag{3.1}$$

Posons

$$\Gamma_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} \quad \text{et} \quad \Gamma_2(z) = \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t.$$

On remarque tout d'abord que $\Gamma_1(z)$ peut être définie pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ car si l'on note $d = \min(|z+k|, k \in \mathbb{N}) > 0$ on a $\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} \right| \leq \frac{e}{d}$.
L'intégrale Γ_2 peut être définie sur $\mathbb{C}$ tout entier car f est continue sur $[1,+\infty[$ et $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
On notera encore Γ la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ par la formule (1).

Montrons que Γ_1 est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ et que Γ_2 est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

On a $\Gamma_1 = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} g_k$ avec $g_k : z \mapsto \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k}$. Les fonctions g_k sont holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \{-k\}$, donc, d'après le théorème de Weierstrass appliqué aux sommes partielles S_n, on a que Γ_1 est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$. En effet si K est un compact de $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ et $d = \mathrm{dist}(K, -\mathbb{N}) > 0$, on a pour tout $z \in K$, $\sum_{k=0}^{+\infty} |\frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k}| \leq \frac{e}{d}$, d'où la convergence uniforme de la suite S_n sur tout compact K de $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.
Par un même raisonnement on montre que pour tout $k \in -\mathbb{N}$, $z \mapsto (z-k)\Gamma_1(z)$ est holomorphe au voisinage de k et vaut $\frac{(-1)^k}{(-k)!}$ en k. Ceci montre que les pôles de Γ_1 sont simples et nous donne qu'un équivalent de Γ_1 en k est $\frac{(-1)^k}{(z-k)(-k)!}$.

Pour Γ_2 on utilise le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale. Soit $F : \mathbb{C} \times [1,+\infty[\to \mathbb{C}$ définie par $F(z,t) = t^{z-1}e^{-t}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $F(z,\cdot)$ est continue sur $[1,+\infty[$, pour tout

$t \in [1, +\infty[$, $F(\cdot, t)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et pour tout $R > 0$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq R$, pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a $|F(z,t)| \leq t^{\mathrm{Re}(z)-1} e^{-t} \leq t^{R-1} e^{-t}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc Γ_2 est bien entière.

Ces deux résultats nous permettent de conclure, à savoir que Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les pôles, tous simples, sont les entiers négatifs. On a pour tout $k \in -\mathbb{N}$,

$$\Gamma(z) \underset{k}{\sim} \frac{(-1)^k}{(z-k)(-k)!}.$$

□

Proposition 3.1.5 *Soit $a \in \Omega$ et $f \in \Omega \setminus \{a\}$ tel que a soit un pôle de f d'ordre m.*
Alors il existe un unique $(c_k)_{1 \leq k \leq m} \in \mathbb{C}^m$ tel que $c_m \neq 0$ et tel que l'application

$$z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω.
On appelle alors résidu de f en a le coefficient c_1 que l'on note $Res(f,a)$.

Le prochain théorème est un théorème fondamentale des fonctions méromorphes. Il permet notamment de calculer de nombreuse intégrale de façon élémentaire.

Théorème 3.1.6 *(des résidus)*
Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et γ un lacet C^1 par morceaux de $\Omega \setminus A_f$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$.
On a alors,

$$\int_\gamma f = 2i\pi \sum_{a \in A_f} \mathrm{Ind}_\gamma(a) Res(f,a).$$

Proposition 3.1.7 *Soit $(g,h) \in \mathcal{H}(\Omega)^2$ tel que $h \neq 0$ et $f = \frac{g}{h}$. Alors on a $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et pour $a \in A_f$ d'ordre m on a*

$$Res(f,a) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial}{\partial z^{m-1}} \left[\frac{(z-a)^m g(z)}{h(z)} \right]_{z=a}.$$

Applications :
i) Calcul d'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t &= \frac{\pi}{2} \ ; \\
\int_0^\infty \frac{1}{1+t^n} \,\mathrm{d}t &= \frac{\pi}{n \sin(\frac{\pi}{n})} \ ; \\
\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad \text{pour } 0 < \mathrm{Re}(z) < 1 \ ; \\
\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} &= \sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Démonstration :
Nous allons uniquement montrer la dernière égalité.
Le théorème des résidus (ou le théorème de Cauchy) nous donne d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_\gamma \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} \,\mathrm{d}z = 2i\pi \binom{2n}{n}$$

avec γ définie sur $[0,\pi]$ par $\gamma(t)=e^{it}$.
On en déduit que
$$\binom{2n}{n} \leq \left|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}}\ \mathrm{d}z\right| \leq (1+1)^{2n} \leq 4^n$$
ce qui montre que la série $\sum \binom{2n}{n}5^{-n}$ converge. De plus la série
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+z)^{2n}}{5^n z^{n+1}}$$
converge normalement sur $\partial\mathbb{D}$ ce qui nous donne que
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{(1+z)^{2n}}{5^n z^{n+1}}\ \mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+z)^{2n}}{5^n z^{n+1}}\ \mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{-5}{z^2-3z+1}\ \mathrm{d}z.\end{aligned}$$
Or $z^2-3z+1=\left(z-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(z-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ et $0<\frac{3-\sqrt{5}}{2}<1<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, donc par le théorème de Cauchy
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{-5}{z^2-3z+1}\ \mathrm{d}z = \frac{-5}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{5}.$$
Ceci conclut la preuve. □

ii) Transformées de Fourier

Proposition 3.1.8 *Soit $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ prolongeable en une fonction g méromorphe au voisinage de $\{z\in\mathbb{C},\quad \mathrm{Im}(z)\geq 0\}$. Si $g(z) \underset{|z|\to\infty}{=} O(\frac{1}{z})$ et si g a un nombre fini de pôles et est sans pôle réel[1] alors on a pour tout $\xi>0$,*
$$\mathcal{F}(f)(\xi) = 2i\pi \sum_{a\in A_g^+} Res(z\mapsto g(z)e^{i\xi z}, a)$$
avec $A_g^+ = A_g\cap\{z\in\mathbb{C},\quad \mathrm{Im}(z)>0\}$ et
$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{it\xi}\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration :
Nous allons utiliser le théorème des résidus appliquer à la fonction $z\mapsto g(z)e^{i\xi z}$ sur le contour γ_R défini par $\gamma_R=\gamma_R^1\cdot\gamma_R^2$ avec
$$\gamma_R^1 : \begin{array}{ccc}[-R,R] & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ t & \longmapsto & t\end{array}$$
$$\gamma_R^1 : \begin{array}{ccc}[0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ \theta & \longmapsto & Re^{i\theta}\end{array}.$$

1. La proposition reste vraie sans cette dernière condition

Pour R assez grand le contour γ_R entoure tous les pôles de g ayant une partie imaginaire strictement positive car le nombre de pôles de g est en nombre fini. Ainsi le théorème des résidus nous donne que

$$\int_{\gamma_R} g(z)e^{i\xi z}\ \mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{a\in A_g^+} Res(z \mapsto g(z)e^{i\xi z}, a)$$

Or on a que

$$\int_{\gamma_R} g(z)e^{i\xi z}\ \mathrm{d}z \quad = \quad \int_{-R}^{R} g(t)e^{i\xi t}\ \mathrm{d}t + \int_0^{\pi} g(Re^{i\theta})e^{i\xi Re^{i\theta}} iRe^{i\theta}\ \mathrm{d}\theta.$$

La première intégrale tend, quand R tend vers l'infini, vers $\mathcal{F}(f)(\xi)$. Montrons alors que la seconde tend vers 0 quand R tend vers l'infini. On a d'abord que

$$\left|\int_0^{\pi} g(Re^{i\theta})e^{i\xi Re^{i\theta}} iRe^{i\theta}\ \mathrm{d}\theta\right| \quad \leq \quad \int_0^{\pi} |Rg(Re^{i\theta})|e^{-\xi R\sin(\theta)}\ \mathrm{d}\theta.$$

Ensuite il existe $M > 0$ tel que pour tout $\theta \in [0, \pi]$ on ait $|Rg(Re^{i\theta})| \leq M$, ceci car $g(z) = O(\frac{1}{z})$. Ainsi on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\pi} g(Re^{i\theta})e^{i\xi Re^{i\theta}} iRe^{i\theta}\ \mathrm{d}\theta\right| \quad &\leq \quad M\int_0^{\pi} e^{-\xi R\sin(\theta)}\ \mathrm{d}\theta \\
&\leq \quad M\left(\int_0^{1/\sqrt{R}} 1\ \mathrm{d}\theta + \int_{1/\sqrt{R}}^{\pi-1/\sqrt{R}} e^{-\xi R\sin(1/R)}\ \mathrm{d}\theta + \int_{\pi-1/\sqrt{R}}^{\pi} 1\ \mathrm{d}\theta\right) \\
&\leq \quad M\left(\frac{2}{\sqrt{R}} + (\pi - \frac{2}{\sqrt{R}})e^{-\xi R\sin(1/\sqrt{R})}\right)
\end{aligned}$$

ceci car pour $\theta \in [0, \pi]$, on a $\xi R\sin(\theta) \geq 0$ et pour $\theta \in \left[\frac{1}{\sqrt{R}}, \pi - \frac{1}{\sqrt{R}}\right]$, on a $\sin(\theta) \geq \sin(\frac{1}{\sqrt{R}})$. Or $R\sin(\frac{1}{\sqrt{R}}) \underset{\infty}{\sim} \sqrt{R}$, ainsi l'intégrale tend bien vers 0 quand R tend vers l'infini, d'où le résultat.
□

Exemple 3.1.9

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}.$$

Démonstration :
Soit $f : t \mapsto 1 + t^2$. La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et se prolonge en la fonction $g : z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ qui méromorphe sur $\mathbb{C}$, qui admet un nombre fini de pôle (i et $-i$) qui sont non réel. Ainsi d'après la proposition précédente on a pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \quad &= \quad \frac{1}{2}\ \mathrm{Re}(\mathcal{F}(f)(x)) \\
&= \quad \frac{1}{2}\ \mathrm{Re}(2i\pi\ Res(z \mapsto g(z)e^{ixz}, i)) \\
&= \quad \frac{1}{2}\ \mathrm{Re}(2i\pi\ \left(z \mapsto \frac{(z-i)e^{ixz}}{1+z^2}\right)(i)) \\
&= \quad \frac{1}{2}\ \mathrm{Re}\left(2i\pi\ \frac{e^{-x}}{2i}\right) \\
&= \quad \frac{\pi}{2}e^{-x}.
\end{aligned}$$

De plus pour $x = 0$, $\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$, et si $x < 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{0} \frac{\cos(-xu)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(-xu)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{2}e^{x}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

3.2 Inverse de fonctions holomorphes et représentations conformes

Théorème 3.2.1 *(d'inversion locale)*
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $z \in \Omega$. Si $f'(z) \neq 0$ alors il existe V un voisinage de z tel que $f(V)$ soit ouvert et tel que f induise une bijection de V dans $f(V)$, d'inverse holomorphe.

Lemme 3.2.2 *Si f est holomorphe et injective sur Ω alors f' ne s'annule pas sur Ω.*

Théorème 3.2.3 *(d'inversion globale)*
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ injective sur Ω. On a alors que $f(\Omega)$ est ouvert et que f est bijective d'inverse holomorphe sur $f(\Omega)$.

Théorème 3.2.4 *(de l'application ouverte)*
Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors f est ouverte (ie pour tout ouvert U de Ω, $f(U)$ est ouvert).

Théorème 3.2.5 *(Représentation conforme de Riemann)*
Si U et V sont deux ouverts strictes, simplement connexes alors il existe $f : U \to V$ telle que $f \in \mathcal{H}(U)$, f soit bijective et $f^{-1} \in \mathcal{H}(V)$.

Définition 3.2.6 *On appelle automorphisme de Ω toute bijection holomorphe de Ω dans Ω d'inverse holomorphe.*
On note $Aut(\Omega)$ l'ensemble des automorphismes de Ω.

Proposition 3.2.7 *Le groupe des automorphismes du disque est égal au groupe $\{\phi_{\lambda,a},\ a \in \mathbb{D},\ \lambda \in \mathbb{U}\}$ des transformations de Moëbius définies par :*

$$\begin{aligned}
\phi_{\lambda,a} : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D} \\
z &\mapsto \lambda\frac{z-a}{1-\overline{a}z}.
\end{aligned}$$

Démonstration :
Montrons d'abord que l'ensemble des transformations de Moëbius est un sous groupe de $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.
Soit $(a, z) \in \mathbb{D}^2$ et $\lambda \in \mathbb{U}$, on a

$$\begin{aligned}
1 - |\phi_{\lambda,a}(z)|^2 &= \frac{(1-\overline{a}z)(1-a\overline{z}) - (z-a)(\overline{z}-\overline{a})}{(1-\overline{a}z)(1-a\overline{z})} \\
&= \frac{1+|a|^2|z|^2 - |z|^2 - |a|^2}{|1-\overline{a}z|^2} \\
&= \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2} > 0.
\end{aligned}$$

On a donc bien $\phi_{\lambda,a}(z) \in \mathbb{D}$.
Soit $(a,b) \in \mathbb{D}^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{U}^2$, on a

$$\begin{cases} \phi_{1,0} = id_{\mathbb{D}} \\ \phi_{\mu,b} \circ \phi_{\lambda,a} = \phi_{\eta,c} \quad \text{avec} \quad \eta = \mu\frac{\lambda+\overline{a}b}{1+\lambda a\overline{b}} \text{ et } c = \frac{\lambda a+b}{\lambda+\overline{a}b} \\ \phi_{\lambda,a} \text{ est bijectif et on a } (\phi_{\lambda,a})^{-1} = \phi_{\overline{\lambda},-\lambda a} \end{cases}$$

En effet, on a pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} \phi_{\mu,b} \circ \phi_{\lambda,a}(z) &= \mu\frac{\lambda\frac{z-a}{1-\overline{a}z} - b}{1-\overline{b}\lambda\frac{z-a}{1-\overline{a}z}} \\ &= \mu\frac{\lambda(z-a) - b(1-\overline{a}z)}{1-\overline{a}z-\overline{b}\lambda(z-a)} \\ &= \mu\frac{(\lambda+\overline{a}b)z - (\lambda a+b)}{1+\lambda a\overline{b} - z(\overline{a}+\overline{b}\lambda)} \\ &= \mu\frac{\lambda+\overline{a}b}{1+\lambda a\overline{b}}\,\frac{z-\frac{\lambda a+b}{\lambda+\overline{a}b}}{1-\frac{\overline{a}+\lambda\overline{b}}{1+\lambda a\overline{b}}z}. \end{aligned}$$

On vérifie que $|\lambda+\overline{a}b|^2 = |1+\lambda a\overline{b}|^2$ et que $\frac{\lambda a+b}{\lambda+\overline{a}b} = \phi_{\overline{\lambda},-\lambda a}(b)$, ce qui nous assure que $\eta \in \mathbb{U}$ et que $c \in \mathbb{D}$.
Pour finir on vérifie facilement que $\phi_{\lambda,a} \circ \phi_{\overline{\lambda},-\lambda a} = \phi_{\overline{\lambda},-\lambda a} \circ \phi_{\lambda,a} = id_{\mathbb{D}}$.

En remarquant que les transformations de Moëbius sont holomorphes sur $\mathbb{D}$, on obtient ainsi que l'ensemble des transformations de Moëbius est un sous groupe de $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Soit $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Si on pose $g = \phi_{1,f(0)} \circ f$, on a que $g(0) = 0$ et $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. On peut donc appliquer le lemme de Schwarz à g et à g^{-1} ce qui nous donne pour $z \in \mathbb{D}$ que

$$|g(z)| \leq |z| \quad \text{et} \quad |g^{-1}(g(z))| \leq |g(z)|$$

On obtient donc pour $z \neq 0$ le cas d'égalité dans le lemme de Schwarz, ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{U}$ tel que $g = \phi_{\lambda,0}$.

Finalement $f = (\phi_{1,f(0)})^{-1} \circ g = (\phi_{1,f(0)})^{-1} \circ \phi_{\lambda,0}$ est une transformation de Moëbius, ce qui conclut la démonstration. □