Cyclicité et conjecture de Wiener

Le Manach Florian

Sous la direction de Mohamed Zarrabi

8 juin 2015

Introduction

Nous allons dans ce mémoire étudier la notion de cyclicité dans les espaces $l^p(\mathbb{Z})$ et $L^p(\mathbb{R})$ avec $p \in [1, \infty[$. Une suite de $l^p(\mathbb{Z})$ (resp. une fonction de $L^p(\mathbb{R})$) est dite cyclique dans $l^p(\mathbb{Z})$ lorsque que le sous-espace vectoriel engendré par ses translatés est dense dans $l^p(\mathbb{Z})$.

En 1932 Norbert Wiener s'intéressa à la cyclicité et caractérisa les vecteurs cycliques dans $l^p(\mathbb{Z})$ (resp. $L^p(\mathbb{R})$) pour $p = 1$ et $p = 2$:

— une suite $c \in l^1(\mathbb{Z})$ est cyclique dans $l^1(\mathbb{Z})$ si et seulement si la fonction $\hat{c} : t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$ ne s'annule pas sur le cercle $\mathbb{T}$;

— une suite $c \in l^2(\mathbb{Z})$ est cyclique dans $l^2(\mathbb{Z})$ si et seulement si la fonction $\hat{c}$ ne s'annule pas sur un ensemble de mesure de Lebesgue non nulle.

Dans les deux cas on remarque que c est cyclique si et seulement si l'ensemble $Z_{\hat{c}}$ des zéros de $\hat{c}$ est «petit» (vide pour $p = 1$ et de mesure nulle pour $p = 2$). Ainsi Wiener conjectura que ce résultat devait rester vrai pour $1 < p < 2$ avec la notion de «$Z_{\hat{c}}$ petit» à définir et qui doit se situer entre $Z_{\hat{c}} = \varnothing$ et $Z_{\hat{c}}$ de mesure nulle.

La caractérisation de la cyclicité dans $l^p(\mathbb{Z})$ est à priori un problème difficile. Il existe cependant un cas facile dans lequel la cyclicité se caractérise grâce à l'ensemble $Z_{\hat{c}}$: c'est le cas $p > 2$. Une suite c est cyclique dans $l^p(\mathbb{Z})$ avec $p > 2$ si et seulement si $Z_{\hat{c}}$ ne supporte aucune distribution non nulle à coefficients de Fourier dans $l^q(\mathbb{Z})$ avec $q = \frac{p}{p-1}$. Cette condition n'est cependant pas facile à vérifier.

En 1951 Arne Beurling détermina une condition suffisante à la cyclicité dans $l^p(\mathbb{Z})$: si la dimension de Hausdorff de $Z_{\hat{c}}$ est inférieure à $\frac{2(p-1)}{p}$ avec $1 < p < 2$ alors c est cyclique dans $l^p(\mathbb{Z})$.

En 1957 Carl S. Herz détermina une condition nécessaire sous une hypothèse plus forte : si $\hat{c}$ est assez régulière, par exemple ε-höldérienne pour $\varepsilon > 0$ et si c est cyclique dans $l^p(\mathbb{Z})$ alors $Z_{\hat{c}}$ ne supporte aucune distribution non nulle à coefficients de Fourier dans $l^q(\mathbb{Z})$ avec $q = \frac{p}{p-1}$.

Ces conditions ne sont pas nécessaires et suffisantes mais elles renforcèrent la conjecture de Wiener. En 2011 Nir Lev et Alexander Olevskii ont infirmé la conjecture de Wiener en démontrant que pour tout $p \in]1, 2[$, on peut trouver deux suites u et v de $l^p(\mathbb{Z})$ dont l'une est cyclique dans $l^p(\mathbb{Z})$ et l'autre non et telles que $\hat{u}$ et $\hat{v}$ ont les même zéros.

Nous allons commencer par présenter les théorèmes de Wiener et les principales propriétés de la cyclicité dans les espaces $l^p(\mathbb{Z})$. Ensuite nous présenterons la preuve de Lev et Olevskii qui infirme la conjecture de Wiener. Dans cette partie nous introduirons les ensembles de Helson qui jouerons un rôle capital. Nous terminerons par adapter les résultats sur les espaces $l^p(\mathbb{Z})$ aux espaces $L^p(\mathbb{R})$.

Sommaire

Chapitre 1

Cadre de l'étude

1.1 Notations

Toutes les fonctions seront considérées à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On note

— $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$;
— $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{T}$ et pour $f \in C(\mathbb{T})$, $||f||_\infty = \max\limits_{t\in\mathbb{T}}(|f(t)|)$;
— Pour $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{T}}$ on note $Z_f = \{t \in \mathbb{T},\ f(t) = 0\}$.
— $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{T}$;
— Pour $p \in [1, \infty[$, $l^p(\mathbb{Z}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^p < \infty\}$ et $||(u_n)||_{l^p} = \left(\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$;
— On note λ la mesure de Lebesgue normalisé sur $\mathbb{T}$. On utilisera également $\mathrm{d}t$ pour désigner la mesure de Lebesgue normalisé sur $\mathbb{T}$ à la place de $\mathrm{d}\lambda(t)$.
— Pour $p \in [1, \infty[$, $L^p(\mathbb{T}) = \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{T}},\ \int_{\mathbb{T}} |f|^p \,\mathrm{d}\lambda < \infty\}$ et on note pour $f \in L^p(\mathbb{T})$, $||f||_{L^p} = (\int_{\mathbb{T}} |f|^p \,\mathrm{d}\lambda)^{\frac{1}{p}}$;
— Pour $n \in \mathbb{Z}$, $e_n : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $e_n(t) = e^{int}$.
— On note $\mathcal{P}(\mathbb{T}) = \mathbb{C}[e_1, e_{-1}]$ l'ensemble des polynômes trigonométriques (fonctions de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{C}$) et $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) = \{P \in \mathcal{P}(\mathbb{T}),\ \forall t \in \mathbb{T}\ P(t) \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des polynômes trigonométriques réels. De plus pour $P \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ on appelle degré de P et l'on note $\deg(P)$ l'entier $\max(\min(n \in \mathbb{N},\ e_n P \in \mathbb{C}[e_1]), \min(n \in \mathbb{N},\ e_{-n} P \in \mathbb{C}[e_{-1}]))$.
— Pour un espace vectoriel E et $A \subset E$, on note $\mathrm{Vect}(A)$ le plus petit sous-espace vectoriel contenant A.
— Pour $\varepsilon \geq 0$, on note $\mathrm{Lip}_\varepsilon(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{C},\ \exists C > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{T},\ |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\varepsilon\}$.
— Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{E}(x)$ la partie entière de x.

1.2 Distributions sur $\mathbb{T}$

Nous allons ici introduire la notion de distribution sur le cercle.
On note $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{T}$. On munit $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ de la famille de semi-norme $\mathcal{N}_k$, $k \in \mathbb{N}$ définie par

$$\mathcal{N}_k(\varphi) = \sum_{n=0}^{k} ||\varphi^{(n)}||_\infty.$$

On définit ainsi une topologie sur $\mathcal{D}(\mathbb{T})$. On note alors $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$ le dual topologique de $\mathcal{D}(\mathbb{T})$.
On appelle distribution sur le cercle tout élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$. On caractérise les distributions sur le cercle comme étant les formes linéaires T définies sur $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ et vérifiant

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \exists C > 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}),\ | < T, \varphi > | \leq C \sum_{k=0}^{N} ||\varphi^{(k)}||_\infty. \tag{1.1}$$

On appelle alors ordre de T le plus petit entier N vérifiant (1.1).

On note $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ l'espace des mesures sur le cercle qui est le dual topologique de l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ des fonctions continues sur $\mathbb{T}$. Il y a équivalence entre les notions de mesure sur le cercle et de distribution sur le cercle d'ordre 0.
On note $\mathcal{M}_\mathbb{R}(\mathbb{T})$ l'ensemble des mesures réelles signées sur le cercle, c'est-à-dire le dual topologique du $\mathbb{R}$-espace $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{T}$ à valeurs réelles.
Un exemple important est que toute fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ définit la mesure $[f] : \varphi \mapsto \int_\mathbb{T} f\varphi \, \mathrm{d}\lambda$.
On rappelle que dans toute la suite, on notera pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, $\int_\mathbb{T} f(t) \, \mathrm{d}t$ au lieu de $\int_\mathbb{T} f \, \mathrm{d}\lambda$.
Ainsi $\mathrm{d}t$ désignera la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$.

On peut alors définir les coefficients de Fourier d'une distribution sur le cercle. Ces coefficients ont une place très importante dans l'étude de ces distributions car les coefficients de Fourier d'une distribution sur le cercle caractérisent entièrement cette distribution. On rappelle que l'on note e_n l'application définie sur $\mathbb{T}$ par $e_n(t) = e^{int}$.

Définition 1.2.1. *Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$.*
On définit le n-ième coefficient de Fourier de T par $\hat{T}(n) = < T, e_{-n} >$.

La proposition qui suit est une identification fondamentale entre les distributions sur le cercle et les suites à croissance polynomiale.

Proposition 1.2.2. *Pour toute suite $(u_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{Z}$ vérifiant*

$$\exists k \in \mathbb{N},\ \exists C > 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}^*,\ |u_n| \leq C|n|^k \tag{1.2}$$

il existe une unique distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{T}(n) = u_n$.
Réciproquement si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ alors la suite $(\hat{T}(n))$ vérifie (1.2).
De plus on a pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$,

$$< T, \varphi > = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{T}(n) \ \hat{\varphi}(-n).$$

En particulier, une distribution sur le cercle est déterminée par ses coefficients de Fourier.

Démonstration :
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ vérifiant (1.2).
Supposons qu'il existe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{T}(n) = u_n$. Notons N l'ordre de T.
Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$, en notant $S_n[\varphi]$ la somme partielle de la série de Fourier [1] de φ, on a que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$ la suite $(S_n[\varphi]^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{T}$ vers $\varphi^{(k)}$. Ainsi

$$< T, \varphi > = < T, \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(-n)\ e_{-n} > = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(-n)\ \ < T, e_{-n} > = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\ \hat{\varphi}(-n).$$

Ceci montre, en cas d'existence, l'unicité de T.
Posons alors l'application T définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ par

$$T(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\ \hat{\varphi}(-n).$$

Montrons que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ et que $\hat{T}(n) = u_n$.
Comme φ est de classe C^∞ on a pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $|\hat{\varphi}(n)| \leq \frac{1}{|n|^{k+2}}\ ||\varphi^{(k+2)}||_\infty$.
Ainsi $T(\varphi)$ est bien défini et on a

$$|T(\varphi)| \leq |u_0|\ ||\varphi||_\infty + C||\varphi^{(k+2)}||_\infty \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n|^2} \leq \max(|u_0|, 4C)(||\varphi||_\infty + ||\varphi^{(k+2)}||_\infty).$$

Ceci montre que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$. De plus on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\hat{T}(n) =< T, e_{-n} > = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k\ \widehat{e_{-n}}(-k) = u_n$$

Réciproquement soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$. On note N l'ordre de T.
La distribution T vérifie alors (1.1). De plus pour $n \in \mathbb{Z}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, on a $||e_n^{(k)}||_\infty \leq |n|^k$. Ainsi

$$|\hat{T}(n)| \leq C \sum_{k=0}^{N} |n|^k \leq C(N+1)|n|^N.$$

$\square$

Notation : Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$, on écrira $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{T}(n)\ e_n$. On notera aussi $\hat{T}$ la suite $(\hat{T}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Remarque
Si $T \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ alors la suite $(\hat{T}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée. La réciproque est fausse. On appelle pseudo-mesure toute distribution à coefficients de Fourier bornés.

Nous allons maintenant définir la notion de support d'une distribution sur le cercle.

Définition 1.2.3. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$.*
On dit T est nulle sur $A \subset \mathbb{T}$ si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$ à support inclus dans A on a $< T, \varphi >= 0$.
On appelle support de T, que l'on note $\mathrm{supp}(T)$*, le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel T est nulle.*

Remarque
Pour justifier l'existence d'un plus grand ouvert sur lequel T est nulle, il suffit de prendre la réunion de tous les ouverts sur lesquels T est nulle et de remarquer que si T est nulle sur Ω_i pour $i \in I$ alors T est nulle sur $\bigcup_{i\in I} \Omega_i$. En effet, prenons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$ à support dans $\bigcup_{i\in I} \Omega_i$. Comme

1. On définit la série de Fourier de φ par $\sum \hat{\varphi}(n)e_n$

$\mathrm{supp}(\varphi)$ est compact, $\mathrm{supp}(\varphi)$ est contenu dans une réunion fini de Ω_j, $j \in J$. Ainsi par un théorème de partition de l'unité, il existe des fonctions χ_j à support dans Ω_j telles que $\sum\limits_{j \in J} \chi_j = 1$ sur $\mathrm{supp}(\varphi)$. On a alors

$$< T, \varphi > = < T, \sum_{j \in J} \chi_j \varphi > = \sum_{j \in J} < T, \chi_j \varphi > = 0$$

ce qui prouve que T est nulle sur la réunion des Ω_i.

Nous finissons cette partie en énonçant deux propriétés usuelles sur les distributions sur $\mathbb{R}$ qui sont également valables pour les distributions sur le cercle. Nous ne démontrerons pas ici ces résultats car leur preuve est identique sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{T}$.

Proposition 1.2.4. *Si $T \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ alors pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ vérifiant* $\mathrm{supp}(T) \subset Z_\varphi$ *on a* $< T, \varphi >= 0$.

Proposition 1.2.5. *Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ et* $\mathrm{supp}(T)$ *est fini, disons* $\mathrm{supp}(T) = \{a_i,\ i \in [\![1, N]\!]\}$ *alors il existe $M \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_{k,n}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$ tel que*

$$T = \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=0}^{M} \lambda_{k,n}\ \delta_{a_k}^{(n)}.$$

1.3 L'espace $A_p(\mathbb{T})$

Nous avons, dans la première partie, vu que l'on pouvait identifier une distribution sur le cercle par ses coefficients de Fourier via la proposition 1.2.2. Nous allons, tout au long de ce mémoire, nous intéresser aux distributions dont la suite des coefficients de Fourier apparient à $l^p(\mathbb{Z})$.

Définition 1.3.1. *Soit $p \in [1, \infty]$. On définit $A_p(\mathbb{T}) = \{S \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}),\ (\hat{S}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in l^p(\mathbb{Z})\}$.*
On note $A(\mathbb{T})$ l'espace $A_1(\mathbb{T})$ que l'on appelle l'algèbre de Wiener.
Pour $S \in A_p(\mathbb{T})$ on note $||S||_{A_p} = ||\hat{S}||_{l^p}$.

Proposition 1.3.2. *Soit $p \in [1, \infty]$,*

(i) l'espace $A_p(\mathbb{T})$ est un espace vectoriel isomorphe à $l^p(\mathbb{Z})$;
(ii) l'espace $(A_p(\mathbb{T}), ||\cdot||_{A_p})$ est un espace de Banach ;
(iii) si $p \leq q$ alors $A_p(\mathbb{T}) \subset A_q(\mathbb{T})$;
(iv) si $p < \infty$ alors $A_p(\mathbb{T})'$, le dual topologique de $A_p(\mathbb{T})$, s'identifie à $A_q(\mathbb{T})$ avec $q = \frac{p}{p-1}$.

Démonstration :
Tous ces résultats découle du fait que l'application

$$\begin{array}{cccc} \phi : & A_p(\mathbb{T}) & \longrightarrow & l^p(\mathbb{Z}) \\ & S & \longmapsto & (\hat{S}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}.$$

est un isomorphisme isométrique et des propriété de $l^p(\mathbb{Z})$. □

Remarque
Pour $S \in A_p(\mathbb{T})$ et $T \in A_q(\mathbb{T})$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on notera $< S, T >_{p,q}$ ou plus simplement $< S, T >$ le produit de dualité entre S et T défini par

$$< S, T >_{p,q} = < S, T > = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{S}(n)\hat{T}(-n).$$

Ainsi si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}) \subset A_q(\mathbb{T})$ on a bien égalité entre le produit de dualité $< S, \varphi >_{p,q}$ et la valeur $< S, \varphi >$ de la distribution S appliqué à φ.

Si $p \in [1, 2]$ alors $A_p(\mathbb{T})$ est un espace de fonctions. En plus d'être un espace de fonction, $A(\mathbb{T})$ est une algèbre de fonctions continues, ce qui sera utile pour montrer le premier théorème de Wiener. On rappelle que si $u \in l^1(\mathbb{Z})$ et $v \in l^p(\mathbb{Z})$ alors on note $u*v$ le produit de convolution entre u et v définie par

$$(u * v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}.$$

On a alors $u * v \in l^p(\mathbb{Z})$ et $||u * v||_{l^p} \leq ||u||_{l^1}||v||_{l^p}$.

Proposition 1.3.3. *Pour tout $p \in [1, 2]$, $A_p(\mathbb{T})$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{T})$.*
De plus $A_2(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T})$.

Démonstration :
Soit $p \in [1, 2]$ et $S \in A_p(\mathbb{T})$. On a donc $\hat{S} \in l^p(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z})$.
Soit pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$S_N = \sum_{n=-N}^{N} \hat{S}(n)e_n.$$

La suite (S_N) est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{T})$ car $\hat{S} \in l^2(\mathbb{Z})$ et car la famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est orthonormale dans $L^2(\mathbb{T})$ donc pour tout $M \leq N$ on a

$$\left\| \sum_{n=M}^{N} \hat{S}(n) e_n \right\|_{L^2}^2 = \sum_{n=M}^{N} |\hat{S}(n)|^2.$$

Soit f la limite de (S_N) dans $L^2(\mathbb{T})$. On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\widehat{[f]}(n) = \hat{f}(n) = \hat{S}(n)$.
Donc $S = [f] \in L^2(\mathbb{T})$ d'après la proposition (1.2.2). [2]
Réciproquement si $f \in L^2(\mathbb{T})$ on a par l'égalité de Parseval que $f \in A_2(\mathbb{T})$ et $||f||_{A_2} = ||f||_{L^2}$.
□

Proposition 1.3.4. *L'espace $A(\mathbb{T})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.*
De plus $||\cdot||_{A_1}$ est une norme d'algèbre.

Démonstration :
Tout d'abord $A(\mathbb{T})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. En effet la série de Fourier de $f \in A(\mathbb{T})$ converge normalement donc on a

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)\ e_n \in \mathcal{C}(\mathbb{T}).$$

De plus si $f, g \in A(\mathbb{T})$, on a

$$fg = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)\ e_n \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n)\ e_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)\hat{g}(n-k)\ e_n.$$

Donc on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{fg}(n) = (\hat{f} * \hat{g})(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)\hat{g}(n-k)$.
Or $\hat{f} * \hat{g} \in l^1(\mathbb{Z})$, ainsi $fg \in A(\mathbb{T})$ et de plus on a

$$||fg||_{A_1} = ||\hat{f} * \hat{g}||_{l^1} \leq ||f||_{A_1} ||g||_{A_1}.$$

□

Proposition 1.3.5. *Soit $g \in A(\mathbb{T}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$. On a*

$$||g||_\infty \leq ||g||_{A_1} \leq ||g||_\infty + 2||g'||_\infty. \tag{1.3}$$

Démonstration :
La première inégalité vient de l'inégalité triangulaire et du fait que g est égale à sa série de Fourier. Pour la seconde on remarque d'abord que

$$|\hat{g}(0)| = \left| \int_{\mathbb{T}} g(t)\ \mathrm{d}t \right| \leq ||g||_\infty.$$

De plus on a d'une part par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et d'autre part par l'égalité de Parseval que

$$\left(\sum_{n \neq 0} |\hat{g}(n)| \right)^2 \leq \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right) \left(\sum_{n \neq 0} n^2 |\hat{g}(n)|^2 \right) \leq \frac{\pi^2}{3}\ ||g'||_{L^2}^2 \leq \frac{\pi^2}{3} ||g'||_\infty^2 \leq 4||g'||_\infty^2.$$

Ainsi

$$||g||_{A_1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(n)| \leq ||g||_\infty + 2||g'||_\infty.$$

□

2. On rappelle que $[f]$ désigne la distribution associée à f. Par la suite on pourra noter f au lieu de $[f]$.

La régularité de $A(\mathbb{T})$ permet de construire plusieurs opérations sur $A(\mathbb{T}) \times A_p(\mathbb{T})$.

Définition 1.3.6. *Pour $f \in A(\mathbb{T})$ et $S \in A_p(\mathbb{T})$ on définit le produit $fS \in A_p(\mathbb{T})$ par*

$$fS = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\hat{f} * \hat{S})(n)\ e_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\hat{S}(n-k) \right) e_n.$$

De plus on a

$$||fS||_{A_p} = ||\hat{f} * \hat{S}||_{l^p} \leq ||f||_{A_1}||S||_{A_p}.$$

Remarque
Si $p \in [1,2]$, le produit fS définit ci-dessus correspond au produit entre les fonctions f et S. En effet si $f \in A(\mathbb{T})$ et $g \in A_p(\mathbb{T})$ avec $p \in [1,2]$ alors, en notant $S_m(f) = \sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k)e_k$ la somme partielle de la série de Fourier de f, on a pour $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{S_m(f)g}\ (n) = \sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k)\ \widehat{e_k g}(n) = \sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k)\hat{g}(n-k).$$

Or

$$||S_m(f)g - fg||_{A_p} \leq ||S_m(f) - f||_{A_1}||g||_{A_p} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{S_m(f)g}\ (n) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{fg}(n)$. Ainsi

$$\begin{aligned} \widehat{fg}(n) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k)\hat{g}(n-k) \\ &= (\hat{f} * \hat{g})(n). \end{aligned}$$

Le produit par un élément de $A(\mathbb{T})$ est «compatible» avec la dualité dans le sens de la propriété suivante.

Proposition 1.3.7. *Soit $f \in A(\mathbb{T})$, $S \in A_p(\mathbb{T})$ et $T \in A_q(\mathbb{T})$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On a*

$$< fS, T > = < S, fT > .$$

Démonstration :
Cela vient de l'associativité du produit de convolution. En effet on a

$$< S, fT > = \left(\hat{S} * (\hat{f} * \hat{T})\right)(0) = \left((\hat{S} * \hat{f}) * \hat{T}\right)(0) = < fS, T > .$$

$\square$

Définition 1.3.8. *Pour $S \in A_p(\mathbb{T})$ et $T \in A_q(\mathbb{T})$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on définit le produit de convolution $S * T \in A(\mathbb{T})$ par*

$$S * T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{S}(n)\hat{T}(n)\ e_n.$$

De plus on a par l'inégalité de Hölder

$$||S * T||_{A_1} \leq ||S||_{A_p}||T||_{A_q}.$$

Remarque
Si $p \in [1,2]$, $S \in A_p(\mathbb{T})$ et $f \in A(\mathbb{T})$ alors le produit de convolution $f * S$ définit ci-dessus correspond au produit de convolution entre les fonction f et S.
En effet si $f \in A(\mathbb{T})$ et $g \in A_p(\mathbb{T})$ avec $p \in [1,2]$ alors, en utilisant le théorème de Fubini, on a pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
(\widehat{f * g})(n) &= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} f(x-y)g(y)\ \mathrm{d}y e^{-inx}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} f(x-y)e^{-in(x-y)}g(y)e^{-iny}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x \\
&= \hat{f}(n)\hat{g}(n).
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Théorèmes de Wiener

2.1 Vecteurs cycliques

Définition 2.1.1. *Soit* $p \in [1, \infty[$.
On dit que $(c_n) \in l^p(\mathbb{Z})$ *est cyclique dans* $l^p(\mathbb{Z})$ *si* $\mathrm{Vect}\{(c_{n+k})_{n\in\mathbb{Z}},\ k \in \mathbb{Z}\}$ *est dense dans* $l^p(\mathbb{Z})$.
On dit que $S \in A_p(\mathbb{T})$ *est cyclique dans* $A_p(\mathbb{T})$ *si* $\mathrm{Vect}\{e_k S,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *est dense dans* $A_p(\mathbb{T})$.

Remarques
On a $\mathrm{Vect}\{e_k S,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{PS,\ P \in \mathcal{P}(\mathbb{T})\}$.
La fonction 1 est cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$. En effet pour $S \in A_p(\mathbb{T})$, la suite des sommes partielles

$$S_N = \sum_{n=-N}^{N} \hat{S}(n) e_n \quad \xrightarrow[N\to\infty]{||\cdot||_{A_p}} \quad S.$$

Proposition 2.1.2. *Soit* $p \in [1, \infty[$ *et* $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$.
S *est cyclique dans* $A_p(\mathbb{T})$ *si et seulement si la suite* $(\hat{S}(n))$ *est cyclique dans* $l^p(\mathbb{Z})$.

Démonstration :
D'après la proposition (1.3.2), les espaces $(A_p(\mathbb{T}), ||\cdot||_{A_p})$ et $(l^p(\mathbb{Z}), ||\cdot||_{l^p})$ sont isomorphes et isométriques par l'application $\phi : S \mapsto \hat{S}$.
De plus pour $n \in \mathbb{Z}$ on a $\widehat{e_k S}(n) = < S, e_{k-n} > = \hat{S}(n-k)$.
On obtient donc le résultat. □

Proposition 2.1.3. *Soit* $p \in [1, \infty[$ *et* $f \in A(\mathbb{T})$.
La fonction f *est cyclique dans* $A_p(\mathbb{T})$ *si et seulement s'il existe une suite* $(P_n) \in \mathcal{P}(\mathbb{T})^{\mathbb{N}}$ *de polynômes trigonométriques telle que*

$$||1 - P_n f||_{A_p} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration :
Le sens direct est évident vu que $1 \in A_p(\mathbb{T})$.
Réciproquement, soit $g \in A_p(\mathbb{T})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ tel que

$$||g - Q||_{A_p} \leq \varepsilon.$$

De plus on a par hypothèse que

$$||Q - QP_n f||_{A_p} \leq ||Q||_{A_1} ||1 - P_n f||_{A_p} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait

$$||g - QP_n f||_{A_p} \leq ||g - Q||_{A_p} + ||Q - QP_n f||_{A_p} \leq 2\varepsilon$$

ce qui montre le résultat. □

2.2 Théorèmes de Wiener ($p = 1$ et $p = 2$)

Norbert Wiener a caractérisé en 1932 les fonctions cycliques de $A_p(\mathbb{T})$ pour $p = 1$ et $p = 2$ grâce à l'ensemble des zéros de ces fonctions. En effet pour qu'une fonction soit cyclique (pour $p = 1$ ou $p = 2$) il faut qu'elle est un ensemble de zéros petit (pour $p = 1$ vide et pour $p = 2$ de mesure de Lebesgue nulle).
Le point clef de ce théorème réside dans le lemme suivant (appelé théorème de Wiener). Nous allons montrer ce lemme en utilisant la démonstration de D.J. Newman qui repose sur l'utilisation d'une série absolument convergent dans l'algèbre de Banach $A(\mathbb{T})$.

Lemme 2.2.1. *Si $f \in A(\mathbb{T})$ ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$ alors f est inversible dans $A(\mathbb{T})$.*

Démonstration :
Plaçons-nous dans l'algèbre de Banach $A(\mathbb{T})$. L'idée est d'écrire $\frac{1}{f}$ comme une série absolument convergente de $A(\mathbb{T})$. Formellement $\frac{1}{f} = \sum (1-f)^n$ mais à priori cette série ne converge pas. Nous allons donc montrer qu'il existe $P \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ tel que la série $\frac{1}{P}\sum\limits_{n\geq 0}\left(\frac{P-f}{P}\right)^n$ converge absolument et sa limite sera $\frac{1}{f}$.

Construisons ainsi le polynôme trigonométrique P.
Par hypothèse la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$ donc posons $\varepsilon = \min |f| > 0$ car f est continue sur le compact $\mathbb{T}$. De plus comme $f \in A(\mathbb{T})$, f est égale à sa série de Fourier. Ainsi en prenant une somme partielle d'indice suffisamment grand il existe $P \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ tel que $||f - P||_{A_1} \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
Considérons la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(P-f)^{n-1}}{P^n} \tag{2.1}$$

et montrons qu'elle converge absolument dans $A(\mathbb{T})$ en utilisant la propriété 1.3.5.
Pour tout $t \in \mathbb{T}$, on a $|P(t)| \geq |f(t)| - |P(t) - f(t)| \geq \varepsilon - ||f - P||_{A_1} \geq \frac{2}{3}\varepsilon$. Ainsi

$$\left\|\frac{1}{P^n}\right\|_\infty \leq \left(\frac{3}{2\varepsilon}\right)^n.$$

De plus $\left(\frac{1}{P^n}\right)' = \frac{-nP'}{P^{n+1}}$ donc

$$\left\|\left(\frac{1}{P^n}\right)'\right\|_\infty \leq n||P'||_\infty \left(\frac{3}{2\varepsilon}\right)^{n+1}.$$

Ainsi en utilisant la proposition 1.3.5 on obtient

$$\left\|\frac{1}{P^n}\right\|_{A_1} \leq \left(1 + \frac{3n||P'||_\infty}{\varepsilon}\right)\left(\frac{3}{2\varepsilon}\right)^n.$$

De plus comme $||\cdot||_{A_1}$ est une norme d'algèbre d'après la proposition 1.3.4 on obtient

$$\left\|\frac{(P-f)^{n-1}}{P^n}\right\|_{A_1} \leq ||f - P||_{A_1}^{n-1}\left\|\frac{1}{P^n}\right\|_{A_1} \leq \frac{\varepsilon + 3n||P'||_\infty}{2^n} \cdot \frac{3}{\varepsilon^2}$$

ce qui démontre que la série (2.1) converge absolument dans $A(\mathbb{T})$.
Ainsi en remarquant que $f = \left(1 - \frac{P-f}{P}\right)P$ on obtient que f est inversible dans $A(\mathbb{T})$ car

$$\left(1 - \frac{P-f}{P}\right)P\sum_{n\geq 1}\frac{(P-f)^{n-1}}{P^n} = 1.$$

$\square$

Remarque
Ce théorème peut aussi être démontré en utilisant la théorie de Gelfand et la notion d'idéal maximal dans les algèbres de Banach.

Voici le premier théorème de Wiener qui caractérise les vecteurs cycliques de $A(\mathbb{T})$ grâce à leurs zéros.

Théorème 2.2.2. *(de Wiener pour $p = 1$)*
Une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ est cyclique dans $A(\mathbb{T})$ si et seulement si f ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$.

Démonstration :
Soit $f \in A(\mathbb{T})$ et $E_f = \mathrm{Vect}\{e_k f,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
S'il existe $t_0 \in \mathbb{T}$ tel que $f(t_0) = 0$ alors on a $E_f \subset \{h \in A(\mathbb{T}),\ h(t_0) = 0\}$.
Ainsi $\overline{E_f} \subset \{h \in A(\mathbb{T}),\ h(t_0) = 0\} \neq A(\mathbb{T})$ car $||\cdot||_\infty \leq ||\cdot||_{A_1}$ et car $\{h \in A(\mathbb{T}),\ h(t_0) = 0\}$ est fermé pour la norme infini.
On obtient donc si f est cyclique alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$.

Réciproquement, supposons maintenant que f ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$. D'après le lemme 2.2.1, la fonction f est inversible dans $A(\mathbb{T})$. Ainsi, en prenant les somme partielles de la série de Fourier de $\frac{1}{f}$, il existe une suite de polynômes trigonométriques (P_n) qui vérifie

$$\left\| \frac{1}{f} - P_n \right\|_{A_1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi on a

$$||1 - P_n f||_{A_1} \leq \left\| \frac{1}{f} - P_n \right\|_{A_1} ||f||_{A_1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui montre, d'après la proposition 2.1.3, que f est cyclique dans $A(\mathbb{T})$. $\square$

Le second théorème de Wiener caractérise la cyclicité dans $A_2(\mathbb{T})$. Ce théorème utilise le fait que l'espace $L^2(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert. Nous allons d'abord montrer un résultat plus général sur les sous-espaces bi-invariants.

Définition 2.2.3. *Soit E un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{T})$.*
On dit que E est bi-invariant si E est fermé et si $e_1 E = E$, c'est-à-dire pour tout $f \in E$, on a $e_1 f \in E$ et $e_{-1} f \in E$.

Remarque
Un espace E est bi-invariant si et seulement si $E = \overline{E} = \{e_n f,\ f \in E,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Le théorème suivant caractérise les sous-espaces bi-invariants.

Théorème 2.2.4. *Un sous-espace E est bi-invariant si et seulement si il existe un ensemble mesurable A tel que $E = \{f \in L^2(\mathbb{T}),\ f|_A = 0\}$.*

Démonstration :
L'implication de droite à gauche vient du fait que l'ensemble $\{f \in L^2(\mathbb{T}),\ f|_A = 0\}$ est fermé dans $L^2(\mathbb{T})$. En effet si (f_n) converge dans $L^2(\mathbb{T})$ vers une fonction f alors il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ qui converge presque partout vers f donc si les f_n s'annule sur A alors f est nulle sur A.

Supposons que E soit un sous-espace bi-invariant.
Posons $\chi = P_E(1)$ la projection orthogonale dans $L^2(\mathbb{T})$ de la fonction constante égal à 1 sur

l'espace E. On a alors que $1-\chi$ est orthogonal à E et comme $\chi \in E$ et E est bi-invariant, on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{\mathbb{T}} (1-\overline{\chi})\chi e_n \, \mathrm{d}m = 0.$$

Ainsi $(1-\overline{\chi})\chi = 0$ dans $L^2(\mathbb{T})$ ce qui entraîne que $\chi = |\chi|^2$ presque partout sur $\mathbb{T}$. On a donc que χ prend (presque partout) les valeurs 0 ou 1. On définit alors, à un ensemble négligeable près, $A = \{t \in \mathbb{T},\ \chi(t) = 0\}$ de sorte que $\chi = \chi_{\mathbb{T}\setminus A}$.
Or, E étant bi-invariant, E est fermé et stable par multiplication de polynômes trigonométriques et comme $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$ on obtient

$$\{f\chi,\ f \in L^2(\mathbb{T})\} = \{f \in L^2(\mathbb{T}),\ f|_A = 0\} \subset E.$$

Pour l'inclusion réciproque montrons que l'orthogonal de $\{f \in L^2(\mathbb{T}),\ f|_A = 0\}$ dans E est réduit à $\{0\}$. Soit $f \in E$ tel que pour tout $g \in L^2(\mathbb{T})$ vérifiant $g|_A = 0$ on ait $\int_{\mathbb{T}} fg \, \mathrm{d}m = 0$.
On a en particulier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\int_{\mathbb{T}} fe_n\chi \, \mathrm{d}m = 0$. Or $e_n f \in E$ et $1-\chi$ est orthogonal à E donc on obtient pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{\mathbb{T}} fe_n \, \mathrm{d}m = \int_{\mathbb{T}} fe_n \, \chi \, \mathrm{d}m + \int_{\mathbb{T}} fe_n(1-\chi) \, \mathrm{d}m = 0.$$

Ainsi $f = 0$ et on a

$$E = \{f \in L^2(\mathbb{T}),\ f|_A = 0\}.$$

□

Un corollaire important du théorème précédent est le théorème de Wiener qui permet de caractériser la cyclicité dans $A_2(\mathbb{T})$.

Théorème 2.2.5. *(de Wiener pour $p = 2$)*
Une fonction $f \in A_2(\mathbb{T})$ est cyclique dans $A_2(\mathbb{T})$ si et seulement si f ne s'annule pas sur un ensemble de mesure de Lebesgue non nulle (i.e. pour tout borélien A on a $f|_A = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0$ avec λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$).

Démonstration :
On rappelle tout d'abord que, d'après la proposition 1.3.3, $A_2(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T})$ et $||\cdot||_{A_2} = ||\cdot||_{L^2}$.
Soit $f \in A_2(\mathbb{T})$. Posons $E_f = \mathrm{Vect}\{e_k f,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Par définition le sous-espace $\overline{E_f}$ est bi-invariant. Donc d'après le théorème 2.2.4, il existe un ensemble mesurable $A \subset \mathbb{T}$ tel que

$$\overline{E_f} = \{g \in L^2(\mathbb{T}),\ g|_A = 0\}.$$

Donc si f ne s'annule pas sur un ensemble de mesure non nulle alors l'ensemble A est de mesure nulle car $f \in \overline{E_f}$ et on a $\overline{E_f} = A_2(\mathbb{T})$ ce qui signifie que f est cyclique dans $A_2(\mathbb{T})$. Réciproquement si f s'annule sur un ensemble A de mesure non nulle, on a $E_f \subset \{g \in L^2(\mathbb{T}),\ g|_A = 0\}$ donc $\overline{E_f} \subset \{g \in L^2(\mathbb{T}),\ g|_A = 0\} \neq A_2(\mathbb{T})$. Ainsi f n'est pas cyclique dans $A_2(\mathbb{T})$. □

Nous venons donc d'établir une caractérisation des vecteurs cycliques dans $A(\mathbb{T})$ et $A_2(\mathbb{T})$. Une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ est cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$ si et seulement si son ensemble de zéros Z_f est petit (vide si $p = 1$ et de mesure de Lebesgue nulle pour $p = 2$). On peut alors se demander pour $f \in A(\mathbb{T})$ s'il existe pour tout $p \geq 1$ une caractérisation de la cyclicité de f dans $A_p(\mathbb{T})$ dépendant uniquement de Z_f.
Wiener pensait qu'une telle caractérisation existait mais Nir Lev et Alexander Olevskii ont démontré en 2008 qu'on ne pouvait pas caractériser les vecteurs cycliques dans $A_p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < 2$ seulement à l'aide de leurs zéros.

2.3 Résultats généraux et caractérisation pour $p > 2$

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à des conditions d'une part nécessaires et d'autre part suffisantes à la cyclicité dans $A_p(\mathbb{T})$ d'une fonction $f \in A(\mathbb{T})$. Nous verrons également une caractérisation de la cyclicité pour $p \geq 2$. On considère $f \in A(\mathbb{T})$ pour pouvoir définir l'ensemble des zéros de f qui est alors une fonction continue.

Pour cela nous allons essentiellement utiliser la dualité dans $A_p(\mathbb{T})$ via les lemmes suivants. Le premier est un corollaire immédiat du théorème de Hahn-Banach.

Lemme 2.3.1. *Soit $T \in A_p(\mathbb{T})$ et $q = \frac{p}{p-1}$.*
Le vecteur T est cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$ si et seulement si pour tout $S \in A_q(\mathbb{T}) = A_p(\mathbb{T})'$ on a

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad < S, e_n T >= 0 \quad \Rightarrow \quad S = 0.$$

Lemme 2.3.2. *Soit $p \in [1, \infty[$, $S \in A_p(\mathbb{T})$ et $f \in A(\mathbb{T})$.*
Si pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $< S, e_n f > = 0$ alors $\operatorname{supp}(S) \subset Z_f$.

Démonstration :
On remarque tout d'abord, en utilisant la proposition 1.3.7, que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$< S, e_n f > = < fS, e_n > = 0.$$

Ainsi $fS = 0$. Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$ vérifiant $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \mathbb{T} \setminus Z_f$ et montrons que $\frac{\varphi}{f} \in A(\mathbb{T})$.

Reprenons la démonstration du lemme 2.2.1. Posons $\varepsilon = \min\{|f(t)|, \ t \in \operatorname{supp}(\varphi)\} > 0$ car $\operatorname{supp}(\varphi)$ est un ensemble compact sur lequel la fonction continue f ne s'annule pas et $P \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ vérifiant $||f - P||_{A_1} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Montrons que

$$\frac{\varphi}{f} = \sum_{n \geq 1} \varphi \ \frac{(P - f)^{n-1}}{P^n}$$

avec la série qui converge absolument dans $A(\mathbb{T})$.
On a pour tout $t \in \operatorname{supp}(\varphi)$, $|P(t)| \geq \frac{2}{3}\varepsilon$ et donc

$$\left\| \frac{\varphi}{P^n} \right\|_\infty \leq ||\varphi||_\infty \left(\frac{3}{2\varepsilon} \right)^n.$$

De plus $\left(\frac{\varphi}{P^n}\right)' = \frac{\varphi'}{P^n} - n\frac{\varphi P'}{P^{n+1}}$, donc on a

$$\left\| \left(\frac{\varphi}{P^n} \right)' \right\|_\infty \leq ||\varphi'||_\infty \left(\frac{3}{2\varepsilon} \right)^n + n||\varphi P'||_\infty \left(\frac{3}{2\varepsilon} \right)^{n+1}.$$

Ceci démontre, en se reportant à la fin de la démonstration du lemme 2.2.1, que la série

$$\sum_{n \geq 1} \varphi \ \frac{(P - f)^{n-1}}{P^n}$$

converge absolument dans $A(\mathbb{T})$ vers la fonction $\frac{\varphi}{f}$ qui appartient donc à $A(\mathbb{T})$.

Ainsi

$$< S, \varphi > =< fS, \frac{\varphi}{f} > = 0$$

ce qui entraîne que la distribution S est nulle sur $\mathbb{T} \setminus Z_f$ donc $\operatorname{supp}(S) \subset Z_f$. □

Voici une première condition suffisante effective à la cyclicité : si Z_f est assez petit (fini ici) alors f est cyclique.

Proposition 2.3.3. *Soit $f \in A(\mathbb{T})$.*
Si Z_f est fini alors pour tout $p \in]1, \infty[$, f est cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$.

Démonstration :
D'après le lemme 2.3.1 prenons $S \in A_q(\mathbb{T})$ (avec $q = \frac{p}{p-1}$) vérifiant $\forall n \in \mathbb{Z}$, $< S, e_n T >= 0$ et montrons que $S = 0$.
On a, d'après le théorème 2.3.2, que $\mathrm{supp}(S) \subset Z_f$ et comme Z_f est fini on obtient par la proposition 1.2.5 que

$$S = \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=0}^{M} \lambda_{k,n} \; \delta_{a_k}^{(n)}$$

avec $Z_f = \{a_k, \; k \in [\![1, N]\!]\}$ et $\lambda_{k,n} \in \mathbb{C}$.
Supposons que $S \neq 0$ et donc qu'il existe $\lambda_{k_0,n_0} \neq 0$ et posons

$$T = \prod_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{N} (e_1 - e^{ia_k})^{M+1} \; S.$$

La distribution T appartient à $A_q(\mathbb{T})$ car $e_1 \in A(\mathbb{T})$ et $T \neq 0$ car $\{a_{k_0}\} \subset \mathrm{supp}(S)$.
De plus en utilisant les formules de dérivation d'un produit on remarque qu'il existe $(c_n) \in \mathbb{C}^{N+1}$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$,

$$< T, \varphi > \; = \; < S, \prod_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{N} (e_1 - e^{ia_k})^{M+1} \varphi > \; = \; \sum_{n=0}^{N} \lambda_{k_0,n} \; c_n \; \varphi^{(n)}(a_{k_0}).$$

Ainsi en notant $n_1 = \max(n \in [\![0, N]\!], \; c_n \lambda_{k_0,n} \neq 0)$ on a pour tout $l \in \mathbb{Z}$

$$< T, e_l > \; = \; \sum_{n=0}^{N} \lambda_{k_0,n} \; c_n \; (il)^n e^{ila_{k_0}} \; \underset{l \to \infty}{\sim} \; \lambda_{k_0,n_1} \; c_{n_1} (il)^{n_1} e^{ila_{k_0}}$$

ce qui est absurde car $T \in A_q(\mathbb{T})$ et $q < \infty$ donc $\hat{T}(-l) \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0$ mais $\lambda_{k_0,n_1} \; c_{n_1} \neq 0$.

Ainsi $S = 0$ et f est cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$ ceci pour tout $p > 1$. □

Le théorème suivant sera un outils important pour montrer qu'une fonction est cyclique ou non.

Théorème 2.3.4. *Soit $p \in]1, \infty[$ et $f \in A(\mathbb{T})$. En posant $q = \frac{p}{p-1}$, on a les assertions suivantes*

(i) Si f n'est pas cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$ alors il existe $S \in A_q(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{supp}(S) \subset Z_f$.

(ii) S'il existe $S \in A_q(\mathbb{T}) \cap \mathcal{M}(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{supp}(S) \subset Z_f$ alors f n'est pas cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$.

Démonstration :
(i) Supposons que f ne soit pas cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$. D'après le lemme 2.3.1 il existe $S \in A_q(\mathbb{T})$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad < S, e_n f >= 0 \quad \text{et} \quad S \neq 0.$$

Or d'après le théorème 2.3.2 on a $\mathrm{supp}(S) \subset Z_f$. Ceci démontre (i).

(ii) Supposons qu'il existe $S \in A_q(\mathbb{T}) \cap \mathcal{M}(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{supp}(S) \subset Z_f$. Comme S est une mesure on a d'après la proposition 1.2.4 que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $< S, e_n f >= 0$. Ainsi f n'est pas cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$ car $S \neq 0$. □

Le théorème précédent nous permet d'obtenir une caractérisation de la cyclicité ne dépendant que de Z_f pour $p \geq 2$. Ceci vient du fait que pour $p \geq 2$, le dual de $A_p(\mathbb{T})$ est un ensemble de fonctions et donc de mesures.

Corollaire 2.3.5. *Soit $p \in [2, \infty[$ et $f \in A(\mathbb{T})$. On pose $q = \frac{p}{p-1}$.*
La fonction f est cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$ si et seulement si pour tout $S \in A_q(\mathbb{T})$ on a

$$\operatorname{supp}(S) \subset Z_f \Rightarrow S = 0.$$

Démonstration :
L'implication de droite à gauche est la contraposée de l'assertion (i) du théorème 2.3.4.
Comme $p \geq 2$ on a $A_q(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{T})$ donc d'après l'assertion (ii) du théorème 2.3.4 on obtient l'implication de gauche à droite. $\square$

La proposition suivante affirme que si f admet un peu de régularité, ici on considérera que f est ε-Hölderienne pour $\varepsilon > 0$, alors la réciproque de la condition (i) du théorème 2.3.4 est vraie.

Proposition 2.3.6. *Soit $p \in]1, \infty[$ et $f \in A(\mathbb{T})$. On pose $q = \frac{p}{p-1}$.*
S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f \in \mathrm{Lip}_\varepsilon(\mathbb{T})$ et s'il existe $S \in A_q(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$ tel que $\operatorname{supp}(S) \subset Z_f$ alors f n'est pas cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$.

Démonstration :
Nous allons montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n S = 0$ avec la définition 1.3.6 du produit $f^n S$.
Une fois cela acquis on pose $m = \max(k,\ \forall p < k,\ f^p S \neq 0)$ et ainsi on a $f^{m-1} S \in A_q(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$ et $f^m S = 0$. Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$< f^{m-1} S, e_n f > = < f^m S, e_n > = 0$$

ce qui d'après le lemme 2.3.1 montre que f n'est pas cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$.

Il reste donc à montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n S = 0$.
Pour cela posons pour tout $h > 0$ la fonction triangle Δ_h définie sur $\mathbb{T}$ par

$$\Delta_h(t) = \begin{cases} -\frac{1}{h^2}|t| + \frac{1}{h} & \text{si} \quad t \in [-h, h] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que $\Delta_h \in A(\mathbb{T})$ car

$$\widehat{\Delta_h}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{4\sin\left(\frac{kh}{2}\right)^2}{k^2 h^2} & \text{si } k \neq 0 \\ \frac{1}{2\pi} & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

De plus pour tout entier k on a $\lim\limits_{h \to 0} \widehat{\Delta_h}(k) = \frac{1}{2\pi}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{Z}$ on a [1]

$$\begin{aligned}
\widehat{f^n S}(j) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f^n}(j-k) \hat{S}(k) \\
&= \lim_{h \to 0} 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f^n}(j-k) \widehat{\Delta_h}(k) \hat{S}(k) \\
&= \lim_{h \to 0} 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}} f^n(t) e^{-it(j-k)} \, \mathrm{d}t \;\; \widehat{\Delta_h}(k) \hat{S}(k) \\
&= \lim_{h \to 0} 2\pi \int_{\mathbb{T}} f^n(t) e^{-itj} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\Delta_h}(k) \hat{S}(k) e^{ikt} \right) \, \mathrm{d}t \\
&= \lim_{h \to 0} 2\pi \int_{\mathbb{T}} f^n(t) e^{-itj} S_h(t) \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

1. les interversions limite-intégrale et somme-intégrale sont justifiées par la convergence normale des séries sur le compact $\mathbb{T}$ par rapport aux paramètres h et t.

avec $S_h = \Delta_h * S$ utilisant la définition 1.3.8.

Or $\mathrm{supp}(S_h) \subset Z_f^h = \{t \in \mathbb{T},\ \exists s \in Z_f,\ |t-s| \leq h\}$.
En effet pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathbb{T} \setminus Z_f^h$, on a

$$< S_h, \varphi > = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{S}(n)\ \widehat{\Delta_h}(n)\ \hat{\varphi}(-n) =< S, \Delta_h * \varphi >$$

car $\widehat{\Delta_h}(n) = \widehat{\Delta_h}(-n)$.
De plus $\Delta_h * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$ et $\mathrm{supp}(\Delta_h * \varphi) \subset \mathrm{supp}(\varphi)^h \subset \mathbb{T} \setminus Z_f$ car $\mathrm{supp}(\Delta_h) = [-h, h]$.
Ainsi $< S_h, \varphi > = 0$ car $\mathrm{supp}(S) \subset Z_f$.

Utilisons maintenant que $f \in \mathrm{Lip}_\varepsilon(\mathbb{T})$. Il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \in Z_f^h \backslash Z_f$, $|f(t)| \leq Ch^\varepsilon$. De plus on a pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $|\widehat{\Delta_h}(k)| \leq \frac{2}{\pi}\ \frac{1}{k^2h^2}$ et pour $h < 1$, $|\widehat{\Delta_h}(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\ \frac{1}{h^2}$. Donc pour tout $t \in \mathbb{T}$ et $h < 1$ on a $|S_h(t)| \leq ||S_h||_{A_1} \leq ||\Delta_h||_{A_p}||S||_{A_q} \leq \frac{C'}{h^2}$.

Ainsi pour $n > \frac{2}{\varepsilon}$ et pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on obtient

$$|\widehat{f^nS}(j)| \leq \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{T}} |f^n(t)S_h(t)|\ \mathrm{d}t = \lim_{h\to 0} \int_{Z_f^h \backslash Z_f} |f^n(t)S_h(t)|\ \mathrm{d}t \leq \lim_{h\to 0} C^nC'h^{\varepsilon n-2} = 0.$$

On vient donc de montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^nS = 0$ ce qui démontre cette proposition d'après le premier paragraphe. $\square$

Ces propriétés peuvent laisser penser qu'il existe, aussi pour $p \in]1, 2[$, une caractérisation de la cyclicité dans $A_p(\mathbb{T})$ des fonctions $f \in A(\mathbb{T})$ qui ne dépend que de Z_f. Dans le chapitre suivant, nous montrerons qu'une telle caractérisation n'existe pas.

Chapitre 3

Cyclicité dans $A_p(\mathbb{T})$ avec $1 < p < 2$

3.1 Présentation de l'approche

L'objectif de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant qui infirme la conjecture de Wiener lorsque $p \in]1,2[$. Cette conjecture affirmait que pour $f \in A(\mathbb{T})$, l'ensemble Z_f des zéros de f caractérisait la cyclicité de f dans $A_p(\mathbb{T})$.

Théorème 3.1.1. *Pour tout $p \in]1,2[$, il existe $(f,g) \in A(\mathbb{T})^2$ tel que $Z_f = Z_g$ et tel que*

$$\begin{cases} f \text{ n'est pas cyclique dans } A_p(\mathbb{T}) \\ g \text{ est cyclique dans } A_p(\mathbb{T}) \end{cases}$$

Ce théorème est directement liée à l'existence d'un ensemble compact K vérifiant les conditions (i) et (ii) du théorème suivant.

Théorème 3.1.2. *Soit $p \in]1,2[$ et $\varepsilon > 0$. Il existe K un compact de $\mathbb{T}$ vérifiant*

(i) si $f \in A(\mathbb{T}) \cap \mathrm{Lip}_\varepsilon(\mathbb{T})$ et si f s'annule sur K alors f n'est pas cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$;

(ii) il existe $g \in A(\mathbb{T})$ s'annulant sur K et tel que g soit cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$.

La difficulté de ce résultat réside dans l'existence d'un compact K suffisamment «grand» pour avoir la condition (i) mais pas trop pour que la condition (ii) soit vérifiée. Pour cela nous allons introduire et étudier une famille particulière d'ensembles compacts : les ensembles de Helson. On appellera ensemble de Helson tout compact K tel que toute fonction définie et continue sur K est égale à la somme d'une série de Fourier absolument convergente.
On montrera alors le théorème suivant qui servira à construire le compact K du théorème 3.1.2.

Théorème 3.1.3. *Soit $q > 2$.*
Il existe un ensemble de Helson K et il existe $S \in A_q(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$ vérifiant $\mathrm{supp}(S) \subset K$.

Nous commencerons par étudier dans la première partie les ensembles de Helson. La seconde partie sera dédiée à la démonstration du théorème 3.3.1 qui est le résultat central et nouveau de l'approche de Nir Lev et Alexander Olevskii. Finalement dans une dernière partie nous démontrerons les trois théorèmes de cette partie.

3.2 Ensembles de Helson

Les ensembles de Helson ont été développés par T. Körner et R. Kaufman. Les ensembles de Helson seront des ensembles compacts trop petit pour supporter une mesure non nul de $A_q(\mathbb{T})$ mais il en existe d'assez grand pour supporter une distribution non nul de $A_q(\mathbb{T})$ pour $q > 2$. Comme définition il devront vérifier l'une des assertions de la proposition suivante.

Proposition 3.2.1. *Soit K un compact de $\mathbb{T}$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) si $f \in \mathcal{C}(K)$ alors il existe $g \in A(\mathbb{T})$, tel que $g|_K = f$;

(ii) il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ vérifiant $\operatorname{supp}(\mu) \subset K$ *on ait*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{\mu}(n)| \geq \delta_1 \int_{\mathbb{T}} |\mathrm{d}\mu|$$

(iii) il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ vérifiant $\operatorname{supp}(\mu) \subset K$ *on ait*

$$\limsup_{|n|\to\infty} |\hat{\mu}(n)| \geq \delta_2 \int_{\mathbb{T}} |\mathrm{d}\mu|$$

Démonstration :

Nous allons démonter les deux équivalences suivantes $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$. On remarque que l'implication $(iii) \Rightarrow (ii)$ est évidente car pour tout $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ on a $\limsup\limits_{|n|\to\infty} |\hat{\mu}(n)| \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{\mu}(n)|$.

$\underline{(i) \Rightarrow (ii)}$

Soit K un compact vérifiant (i) et $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ tel que $\operatorname{supp}(\mu) \subset K$. On a $\mu \in A_\infty(\mathbb{T}) = A(\mathbb{T})'$ et

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{\mu}(n)| = ||\mu||_{A_\infty} = ||\mu||_{(A_1)'} = \sup_{g\in A(\mathbb{T})} \frac{|\int_{\mathbb{T}} g \ \mathrm{d}\mu|}{||g||_{A_1}}.$$

D'autre part en voyant μ comme une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(K)$ on obtient que $||\mu||_{\mathcal{C}(K)'} = \int_K |\ \mathrm{d}\mu| = \int_{\mathbb{T}} |\ \mathrm{d}\mu|$ et donc

$$\int_{\mathbb{T}} |\ \mathrm{d}\mu| = \sup_{f\in\mathcal{C}(K)} \frac{|\int_K f \ \mathrm{d}\mu|}{||f||_\infty}.$$

Posons

$$T : \begin{array}{ccc} A(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(K) \\ g & \longmapsto & g|_K \end{array}.$$

L'application T étant un opérateur linéaire continue entre deux espaces de Banach. De plus d'après (i) l'application T est surjective. Ainsi d'après le théorème de l'application ouverte, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{C}(K)$ il existe $g \in A(\mathbb{T})$ tel que $Tg = f$ et $||g||_{A_1} \leq \frac{1}{\delta_1}||f||_\infty$. De plus comme $\operatorname{supp}(\mu) \subset K$, on a donc que pour tout $f \in \mathcal{C}(K)$ il existe $g \in A(\mathbb{T})$ tel que

$$\delta_1 \frac{|\int_K f \ \mathrm{d}\mu|}{||f||_\infty} \leq \frac{|\int_{\mathbb{T}} g \ \mathrm{d}\mu|}{||g||_{A_1}} \leq \sup_{g\in A(\mathbb{T})} \frac{|\int_{\mathbb{T}} g \ \mathrm{d}\mu|}{||g||_{A_1}}.$$

Finalement, en passant à la borne supérieur sur l'ensemble des $f \in \mathcal{C}(K)$, on obtient (ii).

$\underline{(ii) \Rightarrow (i)}$

Soit K un compact vérifiant (ii). Reprenons l'application

$$\begin{array}{rccc} T: & A(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(K) \\ & g & \longmapsto & g|_K \end{array}$$

et montrons que T est surjective ce qui impliquera (i).
L'application T étant un opérateur linéaire entre deux espaces de Banach, on peut considérer l'adjoint de T, noté T', qui est défini par

$$\begin{array}{rccc} T': & \mathcal{M}(K) & \longrightarrow & A_\infty(\mathbb{T}) \\ & \mu & \longmapsto & \mu \end{array}$$

En effet $\mathcal{M}(K) = \{\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}),\ \mathrm{supp}(\mu) \subset K\} = \mathcal{C}(K)',\ \ A_\infty(\mathbb{T}) = A(\mathbb{T})'$ et pour tout $g \in A(\mathbb{T})$ et $\mu \in \mathcal{M}(K)$ on a

$$< \mu, Tg >_{\mathcal{M}(K),\mathcal{C}(K)} = \int_{\mathbb{T}} g|_K \ \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{T}} g \ \mathrm{d}\mu = < T'\mu, g >_{\infty,1}$$

car $\mathrm{supp}(\mu) \subset K$.
Or T est continue car $||g|_K||_\infty \leq ||g||_\infty \leq ||g||_{A_1}$ et on a d'après l'hypothèse (ii) que pour tout $\mu \in \mathcal{M}(K)$

$$||T'\mu||_{A_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{\mu}(n)| \geq \delta_1 \int_K |\mathrm{d}\mu| = \delta ||\mu||_{\mathcal{M}(K)}.$$

Ainsi d'après le lemme qui suit on a bien que T est surjective et donc on obtient (i).

Lemme 3.2.2. *Soit X et Y deux espaces de Banach et $T : X \to Y$ une application linéaire continue. S'il existe $c > 0$ tel que pour tout $y' \in Y'$, $||T'y'||_{X'} \geq c||y'||_{Y'}$ alors T est surjective. De plus pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $Tx = y$ et $c||x||_X \leq 2||Tx||_Y$.*

Démonstration :
Soit $U = \{x \in X,\ ||x|| \leq 1\}$ et $TU = \{Tx,\ x \in U\}$. Comme dans la preuve de l'application ouverte nous allons d'abord montrer que $\{y \in Y,\ ||y|| \leq c\} \subset \overline{TU}$ pour ensuite montre que T est surjective (ce qui revient à montrer que $\{y \in Y,\ ||y|| \leq c\} \subset TU$).

Soit[1] $y_0 \in Y \setminus \overline{TU}$.
En considérant Y comme un espace de Banach réel il existe, d'après la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach, une forme linéaire continue $\eta' : Y \to \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in \overline{TU}$, $< \eta', y > < < \eta', y_0 >$ car $\overline{TU}$ est convexe et fermé. Posons alors pour $y \in Y$,

$$< y', y > = < \eta', y > -i < \eta', iy > .$$

Cette relation définit bien une forme linéaire (complexe) continue y' sur Y.
De plus on a pour tout $x \in U$,

$$\mathrm{Re}(< T'y', x >) = \mathrm{Re}(< y', Tx >) = < \eta', Tx > \leq < \eta', y_0 > \leq \ | < y', y_0 > | \leq ||y'||\ ||y_0||.$$

Or on a $||T'y'|| = \sup\{\mathrm{Re}(< T'y', x >),\ x \in U\} \geq c||y'||$. Ainsi, comme $y' \neq 0$, on a $||y_0|| \geq c$.

1. Si $\overline{TU} = Y$ on a immédiatement $\{y \in Y,\ ||y|| \leq c\} \subset \overline{TU}$

On vient donc d'établir que $\{y \in Y,\ ||y|| \leq c\} \subset \overline{TU}$. Soit maintenant $y \in Y$ et montrons qu'il existe $x \in X$ tel que $Tx = y$.
Considérons alors les suites $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ et $(y_n) \in Y^{\mathbb{N}}$ vérifiant $y_0 = y$ et pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \frac{c}{||y_n||} x_n \in U \\ ||y_n - Tx_n|| \leq \frac{||y_n||}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = y_n - Tx_n.$$

Une telle suite (x_n) existe car pour tout $y \in Y$ il existe $x \in U$ tel que $\left\| \frac{c}{||y||} y - Tx \right\| \leq \frac{c}{2}$.
Ainsi $||x_n|| \leq \frac{1}{c} ||y_n||$ et $||y_n|| \leq \frac{1}{2^n} ||y||$. La série $\sum x_n$ converge absolument donc, comme X est complet, posons $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$.
Finalement on obtient que $Tx = y$ car, par continuité de T, on a

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n - y_{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} Tx_n = Tx.$$

De plus

$$||x|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||x_n|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{||y||}{c\ 2^n} = \frac{2}{c} ||y||.$$

□

$\underline{(ii) \Rightarrow (iii)}$

Soit K un compact vérifiant (ii) et $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ non nulle vérifiant $\text{supp}(\mu) \subset K$.
Posons $\gamma = \int_{\mathbb{T}} |\ \mathrm{d}\mu|$ et $k = 3\ \mathrm{E}\left(\frac{4}{\delta_1^2}\right) + 2$.
Comme $\gamma > 0$ et $k \geq 2$, montrons qu'il existe $(n_j) \in \mathbb{N}^k$ tel que pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_j) \in \{-1, 1\}^k$ la mesure $\nu = \nu_\varepsilon = \left(\sum\limits_{j=1}^{k} \varepsilon_j e_{n_j} \right) \mu$ vérifie

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\nu}(n)| \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\mu}(n)| + (k-1) \limsup_{|n| \to \infty} |\hat{\mu}(n)| + \gamma. \tag{3.1}$$

Par définition $\limsup\limits_{|n| \to \infty} |\hat{\mu}(n)| = \lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{|k| \geq n} (|\hat{\mu}(k)|)$. Ainsi il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $|m| \geq l$ on ait

$$|\hat{\mu}(m)| \leq \limsup_{|n| \to \infty} |\hat{\mu}(n)| + \frac{\gamma}{k-1}. \tag{3.2}$$

Posons alors $n_1 = 0$ et pour $j \in [\![2, k]\!]$, $n_j = n_{j-1} + 2l$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} |\hat{\nu}(n)| &= \left| \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j < e_{n_j} \mu, e_{-n} > \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j \hat{\mu}(n - n_j) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{k} |\hat{\mu}(n - n_j)|. \end{aligned}$$

Or au plus un des n_j vérifie $|n - n_j| < l$ car $i \neq j \Rightarrow |n_i - n_j| \geq 2l$. Ainsi d'après (3.2) on a

$$|\hat{\nu}(n)| \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\mu}(n)| + (k-1) \limsup_{|n| \to \infty} |\hat{\mu}(n)| + \gamma$$

et on obtient (3.1) en passant à la borne supérieur sur les $n \in \mathbb{Z}$.

D'après le lemme 3.2.3 on a pour tout $t \in \mathbb{T}$,

$$\frac{1}{2^k} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^k} \left| \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j e_{n_j}(t) \right| \geq \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{2^k} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^k} \int_{\mathbb{T}} | \, \mathrm{d}\nu_\varepsilon| = \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{2^k} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^k} \left| \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j e_{n_j}(t) \right| \, | \, \mathrm{d}\mu| \; \geq \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{3}} \int_{\mathbb{T}} | \, \mathrm{d}\mu|.$$

Il existe donc $\varepsilon \in \{-1,1\}^k$ tel que pour $\nu = \nu_\varepsilon$ on ait $\int_{\mathbb{T}} | \, \mathrm{d}\nu| \geq \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{3}} \int_{\mathbb{T}} | \, \mathrm{d}\mu|$.

La mesure ν étant supportée par K, on obtient alors d'après (ii) que

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\nu}(n)| \geq \delta_1 \int_{\mathbb{T}} | \, \mathrm{d}\nu| \geq \delta_1 \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{3}} \int_{\mathbb{T}} | \, \mathrm{d}\mu|.$$

D'autre part, d'après (3.1)

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\nu}(n)| \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\mu}(n)| + (k-1) \limsup_{|n| \to \infty} |\hat{\mu}(n)| + \gamma \leq 2 \int_{\mathbb{T}} | \, \mathrm{d}\mu| + (k-1) \limsup_{|n| \to \infty} |\hat{\mu}(n)|$$

car $\gamma = \int_{\mathbb{T}} | \, \mathrm{d}\mu|$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|\hat{\mu}(n)| = |\int_{\mathbb{T}} e_{-n} \, \mathrm{d}\mu| \leq \int_{\mathbb{T}} | \, \mathrm{d}\mu|$. Ainsi

$$\limsup_{|n| \to \infty} |\hat{\mu}(n)| \geq \frac{\delta_1 \sqrt{\frac{k}{3}} - 2}{k-1} \int_{\mathbb{T}} | \, \mathrm{d}\mu|$$

ce qui donne la condition (iii) avec $\delta_2 = \frac{\delta_1 \sqrt{\frac{k}{3}} - 2}{k-1} > 0$ car $k > 3 \frac{4}{\delta_1^2}$. □

Lemme 3.2.3. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $(c_j) \in \mathbb{C}^k$. On a*

$$\frac{1}{2^k} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^k} \left| \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j c_j \right| \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |c_j|^2}.$$

Démonstration :
Notons $c.\varepsilon = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j c_j$. On a, d'après l'inégalité de Hölder avec $p = \frac{3}{2}$ et $q = 3$, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^k} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^k} |c.\varepsilon|^2 &= \frac{1}{2^k} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^k} |c.\varepsilon|^{\frac{2}{3}} \, |c.\varepsilon|^{\frac{4}{3}} \\ &\leq \left(\frac{1}{2^k} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^k} |c.\varepsilon| \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{2^k} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^k} |c.\varepsilon|^4 \right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^k} |c.\varepsilon|^2 &= \sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^k} \left(\sum_{j=1}^{k} |c_j|^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{k} \varepsilon_j \varepsilon_j c_i \overline{c_j} \right) \\
&= 2^k \sum_{j=1}^{k} |c_j|^2 \; + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{k} \left(\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^k} \varepsilon_i \varepsilon_j \right) c_i \overline{c_j} \\
&= 2^k \sum_{j=1}^{k} |c_j|^2
\end{aligned}$$

car si $i \neq j$

$$\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^k} \varepsilon_i \varepsilon_j = \sum_{\substack{\varepsilon\in\{-1,1\}^k \\ \varepsilon_i=1}} \varepsilon_j + \sum_{\substack{\varepsilon\in\{-1,1\}^k \\ \varepsilon_i=-1}} -\varepsilon_j = 0.$$

De même on peut voir que

$$\frac{1}{2^k} \sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^k} |c.\varepsilon|^4 = \sum_{j=1}^{k} |c_j|^4 + 3 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{k} |c_i|^2 |c_j|^2 \leq 3 \left(\sum_{j=1}^{k} |c_j|^2 \right)^2 .$$

Ainsi on obtient

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |c_j|^2 \right)^{\frac{3}{2}} \leq \left(\frac{1}{2^k} \sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^k} |c.\varepsilon| \right) \left(3 \left(\sum_{j=1}^{k} |c_j|^2 \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui démontre ce lemme.

□

On peut ainsi définir les ensembles de Helson.

Définition 3.2.4. *On appelle ensemble de Helson tout compact K de $\mathbb{T}$ vérifiant l'une des assertions de la proposition 3.2.1.*

Pour caractériser les ensembles de Helson on peut, dans (ii), se restreindre aux mesures réelles signées.

Lemme 3.2.5. *Soit K un compact de $\mathbb{T}$.*
L'ensemble K est de Helson si et seulement si pour tout $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ vérifiant $\operatorname{supp}(\mu) \subset K$ on a $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{\mu}(n)| \geq \delta \int_{\mathbb{T}} |\mathrm{d}\mu|$.

Démonstration :
La condition nécessaire est évidente car $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{T})$.

Réciproquement soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ vérifiant $\operatorname{supp}(\mu) \subset K$.
On décompose $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ avec $(\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})^2$. On a $\operatorname{supp}(\mu_1) \subset K$ et $\operatorname{supp}(\mu_2) \subset K$.
Ainsi pour $k \in \{1, 2\}$,

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mu_k}(n)| \geq \delta \int_{\mathbb{T}} |\mathrm{d}\mu_k|.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{\mu_1}(n) = \frac{\widehat{\mu}(n) + \overline{\widehat{\mu}(-n)}}{2} \quad \text{et} \quad \widehat{\mu_2}(n) = \frac{\widehat{\mu}(n) - \overline{\widehat{\mu}(-n)}}{2i}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{\mu}(n)| &\geq \frac{1}{2}\left(\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mu_1}(n)| + \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mu_2}(n)|\right) \\ &\geq \frac{\delta}{2}\int_{\mathbb{T}} |\,\mathrm{d}\mu_1| + |\,\mathrm{d}\mu_2| \geq \frac{\delta}{2}\int_{\mathbb{T}} |\,\mathrm{d}\mu|. \end{aligned}$$

On obtient donc (ii) ce qui montre que K est un ensemble de Helson. □

Une première propriété des ensembles de Helson est d'être « trop petit » pour supporter une mesure non nul de $A_q(\mathbb{T})$.

Proposition 3.2.6. *Soit K un ensemble de Helson et $q \in [1, \infty[$.*
Pour tout $\mu \in A_q(\mathbb{T}) \cap \mathcal{M}(\mathbb{T})$ on a

$$\operatorname{supp}(\mu) \subset K \implies \mu = 0.$$

Démonstration :
Comme K vérifie la condition (iii) de la proposition 3.2.1 on a

$$\delta_2 \int_{\mathbb{T}} |\mathrm{d}\mu| \leq \limsup_{|n|\to\infty} |\hat{\mu}(n)| = 0$$

car $\mu \in A_q(\mathbb{T})$ avec $q < \infty$ ce qui implique $\lim\limits_{|n|\to\infty} |\hat{\mu}(n)| = 0$.
Ainsi $\mu = 0$. □

Le lemme suivant nous donne une condition suffisante pour qu'un ensemble compacte soit de Helson. Il fait intervenir la notion d'ensemble totalement discontinue : X est dit totalement discontinue si et seulement si les composantes connexes de X sont les singletons de X.

Lemme 3.2.7. *Soit K un ensemble compact totalement discontinue.*
S'il existe $C > 0$ tel que pour tout $h \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ à valeurs réelles on ait

$$Z_h \cap K = \varnothing \implies \exists P \in \mathcal{P}(\mathbb{T}) \text{ vérifiant } \begin{cases} P(t)h(t) > 0, \ \forall t \in K \\ \inf\limits_{t\in K} |P(t)| > 1 \\ \quad ||P||_{A_1} \leq C \end{cases} \tag{3.3}$$

alors K est un ensemble de Helson.

Démonstration :
Utilisons la caractérisation du lemme 3.2.5. Soit $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ non nulle telle que $\operatorname{supp}(\mu) \subset K$. Pour $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe $h \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tel que $h(K) \subset \{-1, 1\}$ et $\int_{\mathbb{T}} h \,\mathrm{d}\mu > \int_{\mathbb{T}} |\,\mathrm{d}\mu| - \varepsilon$.

Cela vient du fait que K est un ensemble compact totalement discontinue.
En effet, en considérant une décomposition de Hahn de (K, μ), il existe E_1 et E_2 deux ensembles mesurables vérifiant $K = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ et pour tout $A \subset E_1$ (resp. $B \subset E_2$), $\mu(A) \geq 0$ (resp. $\mu(B) \leq 0$).

Considérons alors la décomposition de Jordan de μ composée de $\mu_+ : A \mapsto \mu(E_1 \cap A)$ la partie positive de μ et $\mu_- : B \mapsto \mu(E_2 \cap B)$ sa partie négative.
On a donc $\mu = \mu_+ - \mu_-$, $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$ et $\mu_+(E_2) = \mu_-(E_1) = 0$.
Or μ_+ et μ_- sont des mesures positives boréliennes sur le compact K donc elles sont régulières. Ainsi il existe deux ensembles compacts $K_1 \subset E_1$ et $K_2 \subset E_2$ vérifiant

$$\begin{cases} \mu(E_1) \leq \mu(K_1) + \varepsilon \\ \mu(E_2) \leq \mu(K_2) + \varepsilon \end{cases} \tag{3.4}$$

Montrons maintenant qu'il existe deux ensembles U et V à la fois ouverts et fermés dans K qui vérifient $K_1 \subset U$, $K_2 \subset V$ et $U \cap V = \varnothing$.
Pour tout $x \in K_1$ et $y \in K_2$ il existe deux ensembles $U_{x,y}$ et $V_{x,y}$ ouverts et fermés dans K tels que $x \in U_{x,y}$, $y \in V_{x,y}$ et $U_{x,y} \cap V_{x,y} = \varnothing$ ceci car K est totalement discontinue [2]
Soit $y \in K_2$. Comme K_1 est compact, il existe un ensemble fini $I \subset K_1$ tel que $K_1 \subset \bigcup\limits_{x \in I} U_{x,y}$.
Posons alors

$$U_y = \bigcup_{x \in I} U_{x,y} \quad \text{et} \quad V_y = \bigcap_{x \in I} V_{x,y}.$$

Les ensembles U_y et V_y sont ouverts et fermés dans K, car I est fini, et vérifient $K_1 \subset U_y$, $y \in V_y$ et $U_y \cap V_y = \varnothing$.
De même, il existe un ensemble fini $J \subset K_2$ tel que $K_2 \subset \bigcup\limits_{y \in J} V_y$. On pose alors

$$U = \bigcap_{y \in J} U_y \quad \text{et} \quad V = \bigcup_{y \in J} V_y$$

et on obtient que U et V sont ouverts et fermés dans K et vérifient $K_1 \subset U$, $K_2 \subset V$ et $U \cap V = \varnothing$.
Ainsi U et $K \setminus U$ sont des ensembles ouverts dans K et disjoints,
donc l'application $h : K \to \{-1, 1\}$ définit par

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in U \\ -1 & \text{si } t \in K \setminus U \end{cases}$$

est continue sur K. On peut alors, grâce au théorème de prolongement de Tietze vu que K est fermé, prolonger la fonction h en une fonction continue sur $\mathbb{T}$ qui vérifie $h(\mathbb{T}) \subset [-1, 1]$.
De plus on a que h vaut 1 sur K_1 et -1 sur K_2, donc d'après (3.4),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} h \, \mathrm{d}\mu &= \int_{E_1} h \, \mathrm{d}\mu - \int_{E_2} h \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_{K_1} \mathrm{d}\mu + \int_{E_1 \setminus K_1} h \, \mathrm{d}\mu + \int_{K_2} \mathrm{d}\mu - \int_{E_2 \setminus K_2} h \, \mathrm{d}\mu \\ &\geq \mu(K_1) - \mu(E_1 \setminus K_1) + \mu(K_2) - \mu(E_2 \setminus K_2) \\ &\geq \mu(E_1) + \mu(E_2) - 4\varepsilon \\ &\geq \mu_+(E_1) + \mu_-(E_2) - 4\varepsilon = \int_{\mathbb{T}} |\, \mathrm{d}\mu| - 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Utilisons maintenant l'hypothèse (3.3). Comme h ne s'annule pas sur K, il existe $P \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ vérifiant

$$\begin{cases} P(t)h(t) > 0, \ \forall t \in K \\ \inf\limits_{t \in K} |P(t)| > 1 \\ \quad ||P||_{A_1} \leq C \end{cases}$$

2. Si par exemple $x < y$, il suffit de voir qu'il existe $\xi \notin K$ tel que $x < \xi < y$. On prend alors $U_{x,y} = [0, \xi[\cap K = [0, \xi] \cap K$ et $V_{x,y} =]\xi, 2\pi] \cap K = [\xi, 2\pi] \cap K$.

Or pour tout $t \in K$ on a $1 < |P(t)| = P(t)h(t)$ car $P(t)h(t) > 0$ et $h(t) \in \{-1, 1\}$. De plus $P(t)h(t) = |P(t)| \leq ||P||_{A_1} \leq C$. Ainsi, comme $h^2 = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_K P \, \mathrm{d}\mu &= \int_K Ph \, | \, \mathrm{d}\mu| - \int_K Ph \, (| \, \mathrm{d}\mu| - h \, \mathrm{d}\mu) \\ &\geq \int_K | \, \mathrm{d}\mu| - \int_K C \, (| \, \mathrm{d}\mu| - h \, \mathrm{d}\mu) \\ &\geq \int_K | \, \mathrm{d}\mu| - C\varepsilon. \end{aligned}$$

D'autre part, comme $\mathrm{supp}(\mu) \subset K$, on a

$$\int_K P \, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{T}} P \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{P}(-n)\hat{\mu}(n) \leq C \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\mu}(n)|.$$

Ainsi on a pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_K | \, \mathrm{d}\mu| - C\varepsilon \leq C \sup\limits_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\mu}(n)|$ et comme C est indépendant de ε on obtient, en faisant tendre ε vers 0, que μ vérifie l'hypothèse du lemme 3.2.5 ce qui démontre que K est un ensemble de Helson. □

Dans le lemme suivant nous allons affiner la condition (i) de la proposition 3.2.1 en contrôlant les normes $|| \cdot ||_{A_1}$ et $|| \cdot ||_{A_p}$ de g.

Lemme 3.2.8. *Soit K un ensemble de Helson. Pour $\varepsilon > 0$, $p > 1$ et $f \in \mathcal{C}(K)$ il existe $g \in A(\mathbb{T})$ vérifiant*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g|_K &=& f \\ ||g||_{A_1} &\leq& \frac{2}{\delta_2}||f||_\infty \\ ||g||_{A_p} &<& \varepsilon \end{array} \right.$$

avec δ_2 une constante vérifiant la condition (iii) de la proposition 3.2.1.

Démonstration :
Soit $\varepsilon > 0$, $p > 1$ et $f \in \mathcal{C}(K)$. Posons $\varepsilon' = \frac{\delta_2 \varepsilon}{4||f||_\infty}$ et considérons l'espace $B = A(\mathbb{T})$ munit de la norme $|| \cdot ||_B = || \cdot ||_{A_1} + \frac{1}{\varepsilon'} || \cdot ||_{A_p}$ qui est un espace de Banach car $|| \cdot ||_B$ équivalente à la norme $|| \cdot ||_{A_1}$.
Soit

$$\begin{array}{rccc} T: & B & \longrightarrow & \mathcal{C}(K) \\ & g & \longmapsto & g|_K \end{array}.$$

Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathrm{supp}(\mu) \subset K$.
Il existe une « sous-suite » de $(|\hat{\mu}(n)|)_{n \in \mathbb{Z}}$ qui converge vers $\limsup\limits_{|n| \to \infty} |\hat{\mu}(n)|$, c'est-à-dire qu'il existe $(n_j) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $j \in \mathbb{N}$, $|n_j| < |n_{j+1}|$ et il existe $(\theta_j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\lim_{j \to \infty} |\hat{\mu}(n_j)| = \lim_{j \to \infty} \hat{\mu}(n_j) e^{-i\theta_j} = \limsup_{|n| \to \infty} |\hat{\mu}(n)|.$$

On définit alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ la fonction g_N définie sur $\mathbb{T}$ par

$$g_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} e^{-i(n_j t + \theta_j)}.$$

On a que $g_N \in B = A(\mathbb{T})$. De plus $||g_N||_{A_1} = 1$ et $||g_N||_{A_p} = \left(\frac{N}{N^p}\right)^{\frac{1}{p}} = N^{\frac{1}{p}-1}$ car les n_j sont deux à deux distincts et $|e^{-i\theta_j}| = 1$. Ainsi

$$||g_N||_B = 1 + \frac{1}{\varepsilon'} N^{\frac{1}{p}-1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

De plus en utilisant le théorème de Cesàro on obtient

$$< T'\mu, g_N >_{B',B} = < \mu, Tg_N > = \int_K g_N(t)\ \mathrm{d}\mu(t) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \hat{\mu}(n_j)e^{-i\theta_j} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \limsup_{|n|\to\infty} |\hat{\mu}(n)|.$$

Ainsi pour tout $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathrm{supp}(\mu) \subset K$ on a

$$||T'\mu||_{B'} \geq \lim_{N\to\infty} \frac{|< T'\mu, g_N >|}{||g_N||_B} = \limsup_{|n|\to\infty} |\hat{\mu}(n)| \geq \delta_2 \int_{\mathbb{T}} |\mathrm{d}\mu|$$

car K est un ensemble de Helson.

En utilisant le lemme 3.2.2 on obtient donc qu'il existe $g \in B = A(\mathbb{T})$ tel que

$$\begin{cases} Tg &= f \\ ||g||_B &\leq \frac{2}{\delta_2}||f||_\infty \end{cases}$$

Cela signifie que $g|_K = f$, $||g||_{A_1} \leq ||g||_B \leq \frac{2}{\delta_2}||f||_\infty$ et que

$$||g||_{A_p} \leq \varepsilon' ||g||_B \leq \frac{\delta_2 \varepsilon}{4||f||_\infty} \frac{2}{\delta_2}||f||_\infty < \varepsilon.$$

$\square$

Nous souhaitons maintenant montrer le théorème 3.1.3 qui établit l'existence d'un ensemble de Helson supporté par une distribution non nulle de $A_q(\mathbb{T})$ ceci pour tout $q > 2$. Pour cela, nous avons besoin d'un résultat intermédiaire qui sera démontré dans toute la prochaine partie.

3.3 De l'existence d'un ensemble compact

Le but de cette partie est d'établir l'existence d'un compact K vérifiant le théorème suivant.

Théorème 3.3.1. *Soit $q > 2$.*
Il existe une constante $C_q > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et $u \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$ on peut trouver un ensemble compact K, une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ et un polynôme trigonométrique réel $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ vérifiant

(i) $\mathrm{supp}(f) \subset K$ *et* $||1 - f||_{A_q} < \varepsilon$ *;*

(ii) $\forall t \in K \quad P(t)u(t) > 0, \quad \inf_{t \in K} |P(t)| > 1, \quad ||P||_{A_1} \leq C_q.$

Remarques
La démonstration de ce théorème nécessitera plusieurs lemmes énoncés et démontrés à la suite de cette preuve. Ces lemmes sont indépendants les uns des autres et n'utilisent aucun élément de la démonstration du théorème 3.3.1.

Démonstration :
Soit $q > 2$.
Soit $I_0 = \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right[$. Considérons une constante $C_1 > 0$ vérifiant le lemme 3.3.2 pour l'intervalle I_0.
On considère également des constantes strictement positives C_2 et C_3 vérifiant le lemme 3.3.5 puis C_4 et γ vérifiant $C_4 = \frac{C_3}{C_1}$ et $\gamma = (C_4\ q)^{\frac{1}{q}}$.
On remarque que jusqu'ici toutes les constantes ne dépende que de q.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ et $u \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$.
Dès lors on considère la constante $\delta = e^{-2C_4 N} > 0$ pour $N \in \mathbb{N}^*$ assez grand, que l'on déterminera ensuite et qui ne dépendra uniquement de ε et des constantes C_k.

On peut alors, d'après le lemme 3.3.3, poser $\phi \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ vérifiant

$$\hat{\phi}(0) = 0\ , \quad ||\phi||_\infty \leq 1\ , \quad ||\phi||_{L^2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad ||\phi||_{A_q} < \gamma.$$

On remarque alors que ϕ ne dépend que du paramètre q.
D'après le lemme 3.3.4, on pose $\omega \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ vérifiant

$$||\omega||_{L^2} > \left(\frac{1}{1 + e^{-N}}\right)^{\frac{1}{2N}} \quad \text{et} \quad ||\omega||_\infty \leq 1$$

ainsi que pour tout $t \in \mathbb{T}$

$$\omega(t)u(t) > 0 \quad \text{ou} \quad |\omega(t)| < \frac{C_2}{2}.$$

On pose également, en utilisant le lemme 3.3.2, une mesure $\rho \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ à support dans I_0 vérifiant

$$\rho(\mathbb{T}) = 1\ , \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \ \left|\int_{\mathbb{T}} s^k \ \mathrm{d}\rho(s)\right| < \delta \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{T}} |\ \mathrm{d}\rho| < \delta^{-C_1}.$$

Ceci étant, nous allons tout d'abord nous intéresser à la condition (i).
Pour cela on commence par définir la fonction $\lambda : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ qui vérifie pour $t \in \mathbb{T}$,

$$\lambda(t) = \int_{\mathbb{T}} \lambda_s(t)\ \mathrm{d}\rho(s)$$

avec

$$\lambda_s(t) = \prod_{j=1}^{N} \left(1 + s\omega(t)\phi(n^j t)\right) \qquad \text{et} \qquad n > 2\max\left(\deg(\phi), N\deg(\omega)\right).$$

Or $\phi(n^j t) = \sum_{|k|\leq \deg(\phi)} \hat{\phi}(k) e^{ikn^j t}$ donc en développant $\lambda_s(t)$ on obtient

$$\lambda_s(t) = 1 + \sum_{k\in\Lambda} s^{l(k)}\omega(t)^{l(k)} \prod_{k_j\neq 0} \hat{\phi}(k_j) e^{ik_j n^j t} \tag{3.5}$$

avec $\Lambda = [\![-\deg(\phi), \deg(\phi)]\!]^N \setminus \{0\}$ et $l(k) = \mathrm{card}(j \in [\![1, N]\!],\ k_j \neq 0)$.
Ainsi on a pour tout $t \in \mathbb{T}$,

$$\lambda(t) = 1 + \sum_{k\in\Lambda} \left(\int_{\mathbb{T}} s^{l(k)}\ \mathrm{d}\rho(s)\right) \left(\prod_{k_j\neq 0} \hat{\phi}(k_j)\right) \omega(t)^{l(k)} e^{i(k_1 n + k_2 n^2 + \ \cdots\ + k_N n^N)t}$$

Or pour tout $k \in [\![-\deg(\phi), \deg(\phi)]\!]^N$ on a $\deg(\omega^{l(k)}) \leq N\deg(\omega) < n$ et l'application $k \mapsto k_1 n + k_2 n^2 + \ \cdots\ + k_N n^N$ est injective car si $k_1 n + k_2 n^2 + \ \cdots\ + k_N n^N = 0$ alors, en divisant par n, on obtient que n divise k_1 puis que $k_1 = 0$ car $|k_1| < n$ et on conclut par récurrence en montrant que $k = 0$. Ainsi

$$||1-\lambda||_{A_q}^q = \sum_{k\in\Lambda} \left|\int_{\mathbb{T}} s^{l(k)}\ \mathrm{d}\rho(s)\right|^q \left|\prod_{k_j\neq 0} \hat{\phi}(k_j)\right|^q ||\omega^{l(k)}||_{A_q}^q.$$

De plus on a $||\omega^{l(k)}||_{A_q} \leq ||\omega^{l(k)}||_{A_2} = ||\omega^{l(k)}||_{L^2} \leq ||\omega||_\infty^{l(k)} \leq 1$ et $\left|\int_{\mathbb{T}} s^{l(k)}\ \mathrm{d}\rho(s)\right| < \delta$, donc

$$\begin{aligned} ||1-\lambda||_{A_q}^q &< \delta^q \sum_{k\in\Lambda} \prod_{k_j\neq 0} |\hat{\phi}(k_j)|^q = \delta^q \left(1 + ||\phi||_{A_q}^q\right)^N - \delta^q \\ &< \delta^q\ e^{N||\phi||_{A_q}^q}. \end{aligned}$$

Or $||\phi||_{A_q} < \gamma$, on obtient alors une première majoration

$$||1-\lambda||_{A_q} < \delta\ e^{\frac{1}{q}\gamma^q N} = e^{-C_4 N}. \tag{3.6}$$

Cependant la fonction λ ne peut être la fonction recherchée dans la condition (i) car on ne possède aucune information sur sont support. Posons alors

$$X : t \mapsto \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \omega(t)\phi(n^j t)\ , \quad E = \{t \in \mathbb{T},\ X(t) \geq C_2\} \quad \text{et} \quad h = \lambda\ \chi_E.$$

Dès lors, en utilisant $\int_{\mathbb{T}} |\mathrm{d}\rho| < \delta^{-C_1}$, on obtient grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} ||\lambda - h||_{A_q}^2 &\leq ||\lambda - h||_{L^2}^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{T}\setminus E} \lambda(t)^2\ \mathrm{d}t \\ &\leq \int_{\mathbb{T}\setminus E} \left(\int_{\mathbb{T}} |\lambda_s(t)|\ |\mathrm{d}\rho(s)|\right)^2\ \mathrm{d}t \\ &\leq \delta^{-C_1} \int_{\mathbb{T}\setminus E}\int_{\mathbb{T}} \lambda_s(t)^2\ |\mathrm{d}\rho(s)|\ \mathrm{d}t \\ &\leq \delta^{-C_1} \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}\setminus E} \lambda_s(t)^2\ \mathrm{d}t\ |\mathrm{d}\rho(s)| \end{aligned}$$

Or d'après le lemme 3.3.5 on a $\int_{\mathbb{T}\setminus E} \lambda_s(t)^2 \, \mathrm{d}t < 2e^{-6C_3N}$, donc finalement on obtient

$$||\lambda - h||_{A_q} \leq \sqrt{2}\ \delta^{-C_1} e^{-3C_3N} = \sqrt{2}\ e^{(2C_1C_4-3C_3)N} = \sqrt{2}\ e^{-C_3N}. \tag{3.7}$$

On choisit maintenant N tel que $e^{-C_4N} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\sqrt{2}\ e^{-C_3N} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi d'après (3.6) et (3.7) on obtient

$$||1 - h||_{A_q} \leq \varepsilon.$$

Il suffit maintenant de régulariser h pour obtenir la fonction f désirée.
La fonction X étant continue, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{T}$ vérifiant $\mathrm{d}(t, E) \leq \alpha$ on a $X(t) > \frac{C_2}{2}$.
On considère alors $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathrm{supp}(\chi) \subset [-\alpha, \alpha]$, $\chi \geq 0$ et $||\chi||_{L^1} = 1$.

Posons $f = h * \chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ et $K = \mathrm{supp}(f)$.
Comme $\hat{\chi}(0) = 1$ et pour $k \in \mathbb{Z}^*$, $|\hat{\chi}(k)| \leq ||\chi||_{L^1} = 1$, on a

$$\begin{aligned} ||1 - f||_{A_q}^q &= |1 - \hat{\chi}(0)\hat{h}(0)|^q + \sum_{k \neq 0} |\hat{\chi}(k)\hat{h}(k)|^q \\ &\leq ||1 - h||_{A_q}^q \leq \varepsilon^q. \end{aligned}$$

On obtient donc la condition (i).

De plus on remarque que $K = \mathrm{supp}(h * \chi) \subset \{t \in \mathbb{T},\ \mathrm{d}(t, E) \leq \alpha\} \subset \{t \in \mathbb{T},\ X(t) > \frac{C_2}{2}\}$.
Ainsi on pose

$$P : t \mapsto \frac{2}{C_2}\ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \phi(n^j t).$$

On a bien que $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$. De plus, comme pour tout $t \in K$, $X(t) > \frac{C_2}{2}$ et $||\omega||_\infty \leq 1$, on a pour tout $t \in K$, $|P(t)| \geq |\omega(t)P(t)| = \frac{2}{C_2}|X(t)| > 1$.
En remarquant que pour tout $t \in K$, $\omega(t)P(t) > 0$ (car $X(t) > 0$) et $\omega(t)u(t) > 0$ par définition de ω et parce que $|\omega(t)| \geq X(t) > \frac{C_2}{2}$ (car $||\phi||_\infty \leq 1$), on obtient que pour tout $t \in K$, $P(t)u(t) > 0$.

Finalement on pose $C_q = \frac{2}{C_2}||\phi||_{A_1}$ qui ne dépend que de q et qui vérifie $||P||_{A_1} \leq C_q$. □

Nous allons maintenant démontrer les lemmes utilisés dans le théorème 3.3.1.

Lemme 3.3.2. *Soit $I =]a, b[$ avec $0 < a < b < \frac{1}{2}$.*
Il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $\delta \in]0, 1[$, il existe une mesure réelle signée $\rho \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ supportée par un ensemble fini de I vérifiant

$$\rho(\mathbb{T}) = 1\ , \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \ \left|\int_{\mathbb{T}} s^k \ \mathrm{d}\rho(s)\right| < \delta \quad et \quad \int_{\mathbb{T}} |\mathrm{d}\rho| < \delta^{-C_1}.$$

Démonstration :
Soit $\delta \in]0, 1[$.
Considérons un entier naturel n grand et s_1, s_2, ..., s_n des éléments de I deux à deux distincts que l'on déterminera par la suite.
Posons la mesure [3]

$$\rho = \sum_{k=1}^{n} \delta_{s_k} \prod_{j \neq k} \frac{0 - s_j}{s_k - s_j}$$

3. avec δ_a la mesure de Dirac au point a.

qui est une mesure réelle signée supporté par l'ensemble fini $\{s_k,\ k \in [\![1, n]\!]\}$.
On a alors pour tout polynôme réelle P de degré strictement inférieur à n,

$$\int_{\mathbb{T}} P \ \mathrm{d}\rho = P(0)$$

ceci grâce au théorème d'interpolation de Lagrange qui assure que $P = \sum_{k=1}^{n} P(s_k) \prod_{j \neq k} \frac{X - s_j}{s_k - s_j}$.
Ce premier résultat nous donne pour tout $k < n$

$$\rho(\mathbb{T}) = \int_{\mathbb{T}} \mathrm{d}\rho = 1 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{T}} s^k \ \mathrm{d}\rho(s) = 0$$

De plus, si pour toute fonction réelle $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ on note P_f l'unique polynôme de degré strictement inférieur à n interpolant f sur les s_k, alors on a

$$\int_{\mathbb{T}} f \ \mathrm{d}\rho = P_f(0).$$

Or si f est de classe C^n on peut contrôler le défaut d'interpolation en 0 par le résultat suivant : il existe $\xi \in [0, b[$ vérifiant

$$f(0) = P_f(0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{j=1}^{n} (0 - s_j).$$

En effet pour montrer cela il suffit de considérer la fonction $g : x \mapsto f(x) - P_f(x) - \frac{A}{n!} \prod_{j=1}^{n} (x - s_j)$ avec la constante A telle que $g(0) = 0$. Ainsi la fonction g s'annule en $n+1$ points distincts et par le théorème de Rolle, il existe $\xi \in [0, b[$ vérifiant $g^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - A = 0$, d'où le résultat.

Ainsi pour tout $k \geq n$, il existe $\xi \in [0, b[$ tel que

$$0^k = P_{s^k}(0) + \frac{k!}{n!(k-n)!} \xi^{k-n} \prod_{j=1}^{n} (0 - s_j).$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}} s^k \ \mathrm{d}\rho(s) \right| &= \left| \binom{k}{n} \xi^{k-n} \prod_{j=1}^{n} s_j \right| \\ &\leq \binom{k}{n} b^k \\ &\leq (2b)^k \leq (2b)^n \end{aligned}$$

car $2b < 1$. Prenons alors $n = \mathrm{E}\left(\frac{\ln(\delta)}{\ln(2b)}\right) + 1$. On a ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \int_{\mathbb{T}} s^k \ \mathrm{d}\rho(s) \right| < \delta.$$

On pose maintenant pour $k \in [\![1, n]\!]$, $s_k = a + \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}$. On a alors

$$\begin{aligned} |\rho(\{s_k\})| &= \prod_{j \neq k} \frac{s_j}{|s_k - s_j|} \\ &= \prod_{j \neq k} \frac{s_j}{\frac{b-a}{n}|k-j|} \\ &= \left(\frac{n}{b-a}\right)^{n-1} \frac{1}{(k-1)!\,(n-k)!} \prod_{j \neq k} s_j \\ &\leq \left(\frac{b\,n}{b-a}\right)^{n-1} \frac{1}{(k-1)!\,(n-k)!}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} |\mathrm{d}\rho| = \sum_{k=1}^{n} |\rho(\{s_k\})| &\leq \left(\frac{b\,n}{b-a}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!\,(n-k)!} \\ &\leq \left(\frac{b\,n}{b-a}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \\ &\leq \left(\frac{2b}{b-a}\right)^{n-1} \frac{n^n}{n!} \end{aligned}$$

Or on montre, par récurrence en utilisant l'inégalité $1 + \frac{1}{n} \leq e^{\frac{1}{n}}$, que $\frac{n^n}{n!} \leq e^{n-1}$.
Ainsi, comme $\frac{2be}{b-a} \geq 2e > 1$ et $n - 1 \leq \frac{\ln(\delta)}{\ln(2b)}$, on obtient que

$$\int_{\mathbb{T}} |\mathrm{d}\rho| \leq \left(\frac{2be}{b-a}\right)^{n-1} \leq e^{\ln(\delta^{-1})C_1} = \delta^{-C_1}$$

avec $C_1 = \frac{1}{-\ln(2b)} \ln\left(\frac{2be}{b-a}\right)$ ne dépendant que de l'intervalle I. □

Lemme 3.3.3. *Soit $q > 2$ et $\gamma > 0$. Il existe $\phi \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ vérifiant*

$$\hat{\phi}(0) = 0\ , \quad ||\phi||_\infty \leq 1\ , \quad ||\phi||_{L^2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad ||\phi||_{A_q} < \gamma.$$

Démonstration :
On définit récursivement les suites de polynômes (P_n) et (Q_n) vérifiant $P_0 = Q_0 = 1$ et

$$\begin{cases} P_{n+1} = Q_n - X^{2^n} P_n \\ Q_{n+1} = Q_n + X^{2^n} P_n \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Shapiro et vérifient pour tout $z \in \mathbb{U}$ et $n \in \mathbb{N}$

$$|P_n(z)|^2 + |Q_n(z)|^2 = 2^{n+1}. \tag{3.8}$$

En effet ceci se montre par récurrence en utilisant l'égalité du parallélogramme qui nous donne $|P_{n+1}(z)|^2 + |Q_{n+1}(z)|^2 = 2\left(|P_n(z)|^2 + |Q_n(z)|^2\right)$.
De plus on remarque, toujours par récurrence, que $\deg(P_n) = \deg(Q_n) = 2^n - 1$ et donc que les polynômes P_n et Q_n sont à coefficients dans $\{-1, 1\}$.

Posons alors pour k suffisamment grand, ici on prendra $k > \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)^{-1}\left(1 + \frac{\ln(\gamma)}{\ln(2)}\right)$,

$$\phi(t) = 2^{-\frac{k+1}{2}}\left(\frac{e^{it}Q_k(e^{it}) + e^{-it}Q_k(e^{-it})}{2}\right) = 2^{-\frac{k+1}{2}}\sum_{n=1}^{2^k}\varepsilon_n\cos(nt), \quad t \in \mathbb{T}$$

avec $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tel que $Q_k = \sum_{n=0}^{2^k-1}\varepsilon_{n+1}\ X^n$.
On remarque tout d'abord que $\hat{\phi}(0) = 0$. Ensuite pour tout $t \in \mathbb{T}$ on a d'après (3.8)

$$|\phi(t)| \leq 2^{-\frac{k+1}{2}}\left(\frac{|Q_k(e^{it})| + |Q_k(e^{-it})|}{2}\right) \leq 1.$$

Donc $||\phi||_\infty \leq 1$. Par ailleurs la famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ étant orthonormée dans $L^2(\mathbb{T})$ on a

$$||\phi||^2_{L^2} = 2^{-k-1}\ 2\sum_{n=1}^{2^k}\left(\frac{\varepsilon_n}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Pour finir

$$||\phi||_{A_q} = 2^{-\frac{k+1}{2}-1}\left(2\sum_{n=1}^{2^k}|\varepsilon_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} = 2^{(k+1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})-1} < \gamma$$

car $k > \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)^{-1}\left(1 + \frac{\ln(\gamma)}{\ln(2)}\right)$ et $q > 2$. □

Lemme 3.3.4. *Soit $u \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $C_2 > 0$.*
Il existe $\omega \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ vérifiant

$$||\omega||_{L^2} > \left(\frac{1}{1+e^{-N}}\right)^{\frac{1}{2N}} \qquad et \quad ||\omega||_\infty \leq 1$$

et pour tout $t \in \mathbb{T}$,

$$\omega(t)u(t) > 0 \quad ou \quad |\omega(t)| < \frac{C_2}{2}.$$

Démonstration :
Comme u est un polynôme trigonométrique non nul l'ensemble Z_u des zéros de u est fini.
On va considérer la fonction signe de u que l'on va régulariser en une fonction continue.
Pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\inf\{|x-y|,\ x \neq y \in Z_u\}$, on considère la fonction affine par morceaux v_ε définie sur $\mathbb{T}$ par

$$v_\varepsilon(t) = \begin{cases} \operatorname{sign}(u(t)) = \frac{u(t)}{|u(t)|} & \text{si} \quad \mathrm{d}(t, Z_u) > \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon}t - \frac{a_i}{\varepsilon} & \text{si} \quad \mathrm{d}(t, a_i) \leq \varepsilon \ \text{ et } \ \operatorname{sign}(u(a_i - \varepsilon)) \leq 0 \\ -\frac{1}{\varepsilon}t + \frac{a_i}{\varepsilon} & \text{si} \quad \mathrm{d}(t, a_i) \leq \varepsilon \ \text{ et } \ \operatorname{sign}(u(a_i - \varepsilon)) \geq 0 \end{cases}$$

avec $Z_u = \{a_i,\ i \in [\![1, n]\!]\}$.

La fonction v_ε est donc continue et C^1 par morceaux. Ainsi sa série de Fourier converge uniformément. De plus on remarque que $0 < \left(\frac{1}{1+e^{-N}}\right)^{\frac{1}{2N}} < 1$. Ainsi on considère des constantes α et β vérifiant $\left(\frac{1}{1+e^{-N}}\right)^{\frac{1}{2N}} < \beta < 1$ et $0 < \alpha < \min\left(\beta - \left(\frac{1}{1+e^{-N}}\right)^{\frac{1}{2N}}, 1-\beta,\ \frac{C_2}{4}\right)$.

Posons alors $\omega = \beta S_l(v_\varepsilon)$ avec $S_l(v_\varepsilon)$ la somme partielle de la série de Fourier de v_ε pour l assez grand tel que l'on ait $\|\omega - \beta v_\varepsilon\|_\infty \leq \alpha$. Ainsi $||\omega||_\infty \leq \beta + \alpha \leq 1$ car $||v_\varepsilon||_\infty \leq 1$.
De plus $||\omega - \beta v_\varepsilon||_{L^2} \leq \alpha$ donc $||\omega||_{L^2} \geq \beta||v_\varepsilon||_{L^2} - \alpha$.
Or v_ε vaut ± 1 sur $\{t \in \mathbb{T},\ \ \mathrm{d}(t, Z_u) > \varepsilon\}$ qui est de mesure $1 - \frac{2n\varepsilon}{2\pi}$ avec n le cardinal de Z_u.
Ainsi

$$\begin{array}{rcl} ||\omega||_{L^2} & \geq & \beta||v_\varepsilon||_{L^2} - \alpha \\ & \geq & \beta\sqrt{1 - \dfrac{2n\varepsilon}{2\pi}} - \alpha \\ & \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} & \beta - \alpha > \left(\dfrac{1}{1+e^{-N}}\right)^{\frac{1}{2N}}. \end{array}$$

Il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que $||\omega||_{L^2} > \left(\frac{1}{1+e^{-N}}\right)^{\frac{1}{2N}}$.

Finalement prenons $t \in \mathbb{T}$ tel que $|\omega(t)| \geq \frac{C_2}{2}$. Comme $\alpha < \frac{C_2}{4}$, on a

$$2\alpha < \frac{C_2}{2} \leq |\omega(t)| \leq \alpha + \beta|v_\varepsilon(t)|.$$

Ainsi $\frac{\alpha}{\beta} < |v_\varepsilon(t)|$. Or par construction v_ε est de même signe que u.
Donc si $u(t) > 0$ on a

$$\omega(t) \geq \beta v_\varepsilon(t) - \alpha = \beta|v_\varepsilon(t)| - \alpha > 0$$

et si $u(t) < 0$ on a

$$\omega(t) \leq \beta v_\varepsilon(t) + \alpha = -\beta|v_\varepsilon(t)| + \alpha < 0.$$

Ainsi pour $t \in \mathbb{T}$ on a $|\omega(t)| < \frac{C_2}{2}$ ou $u(t)\omega(t) > 0$ ce qui termine la preuve de ce lemme. □

Lemme 3.3.5. *Il existe deux constantes $C_2 > 0$ et $C_3 > 0$ vérifiant :*
pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $(\phi, \omega) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}(\mathbb{T})^2$ tels que

$$\begin{cases} \hat{\phi}(0) = 0\ ,\quad ||\phi||_{L_2} = \dfrac{1}{2}\ ,\quad ||\phi||_\infty \leq 1 \\ ||\omega||_{L^2} > \left(\dfrac{1}{1+e^{-N}}\right)^{\frac{1}{2N}}\quad ,\quad ||\omega||_\infty \leq 1 \end{cases}$$

et pour tout $s \in I_0 = \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right[$ et $n > 2\max\left(\deg(\phi), N\deg(\omega)\right)$, on a la relation suivante :

$$\int_{\{X<C_2\}} \lambda_s(t)^2\ \mathrm{d}t < 2e^{-6C_3N}$$

avec $X : t \mapsto \frac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{N}\omega(t)\phi(n^jt)$ et $\lambda_s : t \mapsto \prod\limits_{j=1}^{N}\left(1 + s\omega(t)\phi(n^jt)\right)$.

Démonstration :
Soit $s \in I_0$. En utilisant l'inégalité $1 + x \leq e^x$, on obtient tout d'abord que pour tout $t \in \mathbb{T}$

$$\lambda_s(t) = \prod_{j=1}^{N}\left(1 + s\omega(t)\phi(n^jt)\right) \leq \exp\left(s\sum_{j=1}^{N}\omega(t)\phi(n^jt)\right) = e^{sNX(t)}.$$

Ainsi pour tout $C > 0$ on a

$$\int_{\{X<C\}} \lambda_s(t)^2 \ \mathrm{d}t \leq e^{\frac{1}{3}CN} \int_{\{X<C\}} \lambda_s(t) \ \mathrm{d}t. \tag{3.9}$$

Posons alors la mesure $\mu_s \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathrm{d}\mu_s(t) = \lambda_s(t) \ \mathrm{d}t$. Nous allons montrer que μ_s est une mesure de probabilité sur $\mathbb{T}$. On rappelle que $\mathrm{d}t$ est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$ de sorte que $\mathrm{d}t$ soit une mesure de probabilité. Nous utiliserons ensuite une variante de l'inégalité de Bernstein pour majorer $\mu_s(\{X < C\})$.

Avant de montrer que μ_s est une mesure de probabilité nous avons besoin du résultat suivant qui explique l'introduction des nombres n^j dans le polynôme trigonométrique ϕ.

Lemme 3.3.6. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $j \in [\![0, N]\!]$, $P_j \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ vérifiant $\deg(P_j) < n$.*
Alors on a

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\prod_{j=0}^{N} P_j(n^j t) \right) \ \mathrm{d}t = \prod_{j=0}^{N} \left(\int_{\mathbb{T}} P_j(t) \ \mathrm{d}t \right).$$

Démonstration :
Pour tout $j \in [\![0, N]\!]$ et $t \in \mathbb{T}$ on a $P_j(t) = \sum\limits_{|k|<n} \widehat{P_j}(k) e^{ikt}$.
Ainsi en utilisant les formules de développements on obtient pour tout $t \in \mathbb{T}$,

$$\prod_{j=0}^{n} P_j(n^j t) = \sum_{k \in [\![-n+1, n-1]\!]^N} \prod_{j=0}^{N} \widehat{P_j}(k_j) e^{ik_j n^j t} .$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \left(\prod_{j=0}^{N} P_j(n^j t) \right) \ \mathrm{d}t &= \sum_{k \in [\![-n+1, n-1]\!]^N} \prod_{j=0}^{N} \left(\widehat{P_j}(k_j) \right) \int_{\mathbb{T}} \exp\left(it \sum_{j=0}^{N} k_j n^j \right) \ \mathrm{d}t \\ &= \prod_{j=0}^{N} \left(\widehat{P_j}(0) \right) = \prod_{j=0}^{N} \left(\int_{\mathbb{T}} P_j(t) \ \mathrm{d}t \right) \end{aligned}$$

car pour $m \in \mathbb{Z}$, $\int_{\mathbb{T}} e^{imt} \ \mathrm{d}t = \delta_0(m)$ et car

$$\sum_{j=0}^{N} k_j n^j = 0 \implies k = 0.$$

En effet en supposant $k \neq 0$ et en prenant le plus grand indice l tel que $k_l \neq 0$ on a

$$|k_l n^l| \leq \sum_{j=0}^{l-1} |k_j| n^j < n \sum_{j=0}^{l-1} n^j = n \frac{n^l - 1}{n - 1} \leq n^l$$

ce qui est absurde. □

Montrons maintenant que μ_s est une mesure de probabilité. Tout d'abord, comme $||\omega||_\infty \leq 1$ et $||\phi||_\infty \leq 1$ on a pour tout $t \in \mathbb{T}$ et $j \in [\![1, N]\!]$, $|s\omega(t)\phi(n^j t)| \leq s < 1$ donc la mesure μ_s est une mesure positive. De plus en développant λ_s on obtient,

$$\begin{aligned} \mu_s(\mathbb{T}) &= \int_{\mathbb{T}} \prod_{j=1}^{N} (1 + s\omega(t)\phi(n^j t)) \ \mathrm{d}t \\ &= 1 + \sum_{\substack{B \subset [\![1, N]\!] \\ B \neq \varnothing}} s^{|B|} \int_{\mathbb{T}} \omega(t)^{|B|} \prod_{j \in B} \phi(n^j t) \ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

avec $|B|$ le cardinal de l'ensemble B.
On peut alors appliquer le lemme 3.3.6 avec $P_0 = \omega^{|B|}$ et $P_j = \phi$ si $j \in B$ et $P_j = 1$ sinon. Ainsi

$$\mu_s(\mathbb{T}) = 1 + \sum_{\substack{B \subset [\![1,N]\!] \\ B \neq \varnothing}} s^{|B|} \int_{\mathbb{T}} \omega(t)^{|B|} \ \mathrm{d}t \ \prod_{j \in B} \underbrace{\int_{\mathbb{T}} \phi(t) \ \mathrm{d}t}_{=\hat{\phi}(0)=0}.$$

Finalement $\mu_s(\mathbb{T}) = 1$ ce qui montre que μ_s est bien une mesure de probabilité su $\mathbb{T}$.

Considérons maintenant les polynômes trigonométriques $X_j : t \mapsto \omega(t)\phi(n^j t)$. Nous allons alors appliquer le lemme 3.4.1, énoncé dans la section suivante, qui est une variante de l'inégalité de Bernstein permettant de majorer $\mu_s(\{X < C\})$.
Pour cela montrons que dans l'espace probabilisé $\mathbb{T}$ muni de la mesure μ_s, les variables aléatoires $X_j : t \mapsto \omega(t)\phi(n^j t)$ vérifient les hypothèses du lemme 3.4.1. Soit $A \subset [\![1, N]\!]$. Montrons que l'on a

$$\int_{\mathbb{T}} \prod_{j \in A} X_j \ \mathrm{d}\mu_s = \left(s \int_{\mathbb{T}} \phi(t)^2 \ \mathrm{d}t \right)^{|A|} \ \left(\int_{\mathbb{T}} \omega(t)^{2|A|} \ \mathrm{d}t \right). \tag{3.10}$$

En effet en développant λ_s on obtient que

$$\lambda_s(t) = (s\omega(t))^{|A|} \prod_{j \in A} \phi(n^j t) \ + \sum_{\substack{B \subset [\![1,N]\!] \\ B \neq A}} (s\omega(t))^{|B|} \prod_{j \in B} \phi(n^j t).$$

Ainsi [4]

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \prod_{j \in A} X_j \ \mathrm{d}\mu_s &= \int_{\mathbb{T}} \left(\prod_{j \in A} \omega(t)\phi(n^j t) \right) \lambda_s(t) \ \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{T}} s^{|A|} \ \omega(t)^{2|A|} \ \prod_{j \in A} \phi(n^j t)^2 \ \mathrm{d}t \ + \\ &\quad \sum_{\substack{B \subset [\![1,N]\!] \\ B \neq A}} \int_{\mathbb{T}} s^{|B|} \ \omega(t)^{|A|+|B|} \left(\prod_{j \in A \Delta B} \phi(n^j t) \right) \left(\prod_{j \in A \cap B} \phi(n^j t)^2 \right) \ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 3.3.6 on obtient que le premier terme vaut

$$\left(s \int_{\mathbb{T}} \phi(t)^2 \ \mathrm{d}t \right)^{|A|} \ \left(\int_{\mathbb{T}} \omega(t)^{2|A|} \ \mathrm{d}t \right)$$

car $n > 2 \max(\deg(\phi), N \deg(\omega))$ et le second terme est nul puisque $A \Delta B \neq \varnothing$ et $\hat{\phi}(0) = 0$.

Ainsi on obtient la formule (3.10). On a alors pour tout $j \in [\![1, N]\!]$,

$$\mathrm{E}(X_j) = \int_{\mathbb{T}} X_j \ \mathrm{d}\mu_s = s \ ||\phi||_{L^2}^2 ||\omega||_{L^2}^2 = \mu > 0.$$

On a également que $-1 \leq X_j \leq 1$ car $||\phi||_\infty \leq 1$ et $||\omega||_\infty \leq 1$.
De plus, pour $A \subset [\![1, N]\!]$, on a en utilisant l'inégalité de Jensen à la fonction convexe $x \mapsto x^{|A|}$,

$$\mathrm{E}\left(\prod_{j \in A} X_j \right) = \left(s \int_{\mathbb{T}} \phi(t)^2 \ \mathrm{d}t \right)^{|A|} \left(\int_{\mathbb{T}} \omega(t)^{2|A|} \ \mathrm{d}t \right) \geq \left(s \int_{\mathbb{T}} \phi(t)^2 \ \mathrm{d}t \int_{\mathbb{T}} \omega(t)^2 \ \mathrm{d}t \right)^{|A|} = \prod_{j \in A} \mathrm{E}(X_j).$$

4. On note $A \Delta B = A \cup B \setminus A \cap B$ la différence symétrique de A et B

Par hypothèse on a $||\omega||_\infty \leq 1$ et

$$\left(\int_{\mathbb{T}} \omega(t)^2 \, \mathrm{d}t\right)^N > \frac{1}{1+e^{-N}}.$$

Ainsi

$$\mathrm{E}\left(\prod_{j\in A} X_j\right) \leq \left(s\int_{\mathbb{T}} \phi(t)^2 \, \mathrm{d}t\right)^{|A|} \leq \left(1+e^{-N}\right)\left(s\int_{\mathbb{T}} \phi(t)^2 \, \mathrm{d}t \int_{\mathbb{T}} \omega(t)^2 \, \mathrm{d}t\right)^{|A|} = (1+\varepsilon)\prod_{j\in A} \mathrm{E}(X_j)$$

avec $\varepsilon = e^{-N} \in]0,1[$.
Toutes les hypothèses du lemme 3.4.1 sont donc réunies. Ainsi on obtient pour tout $\alpha > 0$

$$\mu_s(\{X < \mu - \alpha\}) \leq e^{-\frac{1}{8}\alpha^2 N} + e^{-N} e^{\frac{1}{4}N}.$$

Or $\frac{1}{N}\ln(1+e^{-N}) \leq \frac{1}{N}e^{-N} \leq e^{-1} \leq \ln(3)$ car $N \geq 1$ donc $\left(\frac{1}{1+e^{-N}}\right)^{\frac{1}{N}} \geq \frac{1}{3}$ et on a alors

$$\mu = s\ ||\phi||_{L^2}^2 ||\omega||_{L^2}^2 \geq \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{1+e^{-N}}\right)^{\frac{1}{N}} \geq \frac{1}{48}.$$

Ainsi pour tout $0 < C < \frac{1}{48}$ on a

$$\begin{aligned}\mu_s(\{X < C\}) &\leq e^{-\frac{1}{8}(\mu - C)^2 N} + e^{-\frac{3}{4}N} \\ &\leq 2e^{-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{48} - C\right)^2 N}\end{aligned}$$

car $\left(\frac{1}{48} - C\right)^2 \leq (\mu - C)^2$ et $-\frac{3}{4} \leq -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{48} - C\right)^2$.

Ainsi en reprenant l'inégalité (3.9) on obtient

$$\int_{\{X<C\}} \lambda_s(t)^2 \, \mathrm{d}t \leq 2e^{-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{48}-C\right)^2 N + \frac{1}{3}CN}.$$

Or

$$-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{48} - C\right)^2 + \frac{1}{3}C \underset{C\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{8\times 48^2} < 0$$

Donc il existe $C_2 > 0$ (par exemple $C_2 = 10^{-4}$) tel que

$$6\ C_3 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{48} - C_2\right)^2 - \frac{1}{3}C_2 > 0.$$

Ainsi on obtient le résultat recherché, à savoir

$$\int_{\{X<C_2\}} \lambda_s(t)^2 \, \mathrm{d}t < 2e^{-6C_3 N}$$

avec C_2 et C_3 des constantes absolues. $\square$

3.4 Inégalité de Bernstein

Cette partie présente une variante de l'inégalité de Bernstein (cas où $\varepsilon = 0$ dans le lemme suivant) qui est utilisée dans le lemme 3.3.5.

Lemme 3.4.1. *Soit* $(X_j)_{1\leq j\leq N}$ *une famille de variables aléatoires sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ *vérifiant*

(i) pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, $\mathrm{E}(X_j) = \mu > 0$ *;*

(ii) pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, $-1 \leq X_j \leq 1$ *;*

(iii) il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ *tel que pour tout* $A \subset [\![1, N]\!]$ *on ait*

$$(1-\varepsilon)\mu^{|A|} \leq \mathrm{E}\left(\prod_{j\in A} X_j\right) \leq (1+\varepsilon)\mu^{|A|}.$$

Si on note $X = \frac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{N} X_j$ *alors on a pour tout* $\alpha > 0$

$$P(X < \mu - \alpha) \leq e^{-\frac{1}{8}\alpha^2 N} + \varepsilon e^{\frac{1}{4}N}.$$

Avant de démontrer ce lemme on observe que par rapport à l'inégalité de Bernstein, où l'on suppose les variables X_j mutuellement indépendantes, on suppose ici que les variables sont «presque indépendantes». On obtient alors, dans la majoration de $P(X < \mu - \alpha)$, le terme supplémentaire $\varepsilon e^{\frac{1}{4}N}$ qui n'apparaît pas dans l'inégalité de Bernstein.

Démonstration :
Soit $\lambda > 0$. On a

$$\begin{aligned} P(X < \mu - \alpha) &= P\left(e^{\lambda N X} < e^{\lambda N(\mu-\alpha)}\right) \\ &= P\left(\prod_{j=1}^{N} e^{\lambda X_j} < e^{\lambda N(\mu-\alpha)}\right) \\ &= P\left(1 < e^{-\lambda N\alpha} \prod_{j=1}^{N} e^{\lambda(\mu - X_j)}\right) \\ &\leq \int_\Omega e^{-\lambda N\alpha} \prod_{j=1}^{N} e^{\lambda(\mu-X_j)}\,\mathrm{d}P \\ &\leq e^{-\lambda N\alpha}\,\mathrm{E}\left(\prod_{j=1}^{N} e^{\lambda(\mu-X_j)}\right). \end{aligned}$$

De plus on a

$$\lambda(\mu - X_j) = 2\lambda\left(\frac{1+\frac{\mu-X_j}{2}}{2}\right) - 2\lambda\left(\frac{1-\frac{\mu-X_j}{2}}{2}\right)$$

Or $\frac{1+\frac{\mu-X_j}{2}}{2} + \frac{1-\frac{\mu-X_j}{2}}{2} = 1$ et $|\mu - X_j| \leq 2$ donc $\frac{1\pm\frac{\mu-X_j}{2}}{2} \in [0, 1]$.

Ainsi par convexité de la fonction exponentielle on obtient

$$\begin{aligned}
e^{\lambda(\mu - X_j)} &\leq \frac{e^{2\lambda}}{2}\left(1 + \frac{\mu - X_j}{2}\right) + \frac{e^{-2\lambda}}{2}\left(1 - \frac{\mu - X_j}{2}\right) \\
&\leq \cosh(2\lambda) + \frac{\mu - X_j}{2}\ \sinh(2\lambda) \\
&\leq b - aX_j
\end{aligned}$$

avec $a = \frac{\sinh(2\lambda)}{2}$ et $b = \cosh(2\lambda) + \mu\frac{\sinh(2\lambda)}{2}$.
On a donc, en utilisant l'hypothèse (iii),

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\prod_{j=1}^{N} e^{\lambda(\mu - X_j)}\right) &\leq \mathrm{E}\left(\prod_{j=1}^{N}(b - aX_j)\right) \\
&\leq \sum_{A\subset [\![1,N]\!]} (-a)^{|A|}\ b^{N-|A|}\ \mathrm{E}\left(\prod_{j\in A} X_j\right) \\
&\leq \sum_{A\subset [\![1,N]\!]} (-a)^{|A|}\ b^{N-|A|}\ (1 + (-1)^{|A|}\varepsilon)\mu^{|A|} \\
&\leq (b - \mu a)^N + \varepsilon(b + \mu a)^N.
\end{aligned}$$

Or $b - \mu a = \cosh(2\lambda) \leq e^{2\lambda^2}$ et $b + \mu a = \cosh(2\lambda) + \mu\sinh(2\lambda) = \frac{e^{2\lambda}}{2}(1+\mu) + \frac{e^{-2\lambda}}{2}(1-\mu) \leq e^{2\lambda}$.
Ainsi en prenant $\lambda = \frac{\alpha}{4}$ on obtient finalement que

$$\begin{aligned}
P(X < \mu - \alpha) &\leq e^{-\lambda N\alpha}\ \left((b - \mu a)^N + \varepsilon\ (b + \mu a)^N\right) \\
&\leq e^{-N\frac{\alpha^2}{4}}\ \left(e^{N\frac{\alpha^2}{8}} + \varepsilon\ e^{N\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&\leq e^{-N\frac{\alpha^2}{8}} + \varepsilon\ e^{\frac{N}{4}\alpha(2-\alpha)} \\
&\leq e^{-N\frac{\alpha^2}{8}} + \varepsilon\ e^{\frac{N}{4}}
\end{aligned}$$

car pour tout $\alpha > 0$, $\alpha(2 - \alpha) \leq 1$. $\square$

3.5 Contre-exemple de Lev et Olevskii

Revenons au ensembles de Helson et démontrons le théorème 3.1.3, rappelé ci dessous, grâce au théorème 3.3.1 démontré dans la partie 3.2.

Théorème. *Soit* $q > 2$.
Il existe un ensemble de Helson K *et il existe* $S \in A_q(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$ *vérifiant* $\mathrm{supp}(S) \subset K$.

Démonstration :
D'après le théorème de Stone-Weierstrass, l'ensemble $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ des polynômes trigonométriques réels est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ munit de la norme infini. De plus il existe un ensemble A dénombrable qui soit dense dans $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ pour la norme infini. En effet tout élément de $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ est de la forme $t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{N} a_n \cos(nt)$ avec $a_n \in \mathbb{R}$. Il suffit donc de prendre l'ensemble des polynômes trigonométriques réels à coefficients a_n rationnels qui est dense dans $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ pour la norme de $A(\mathbb{T})$ et d'utiliser le fait que $||\cdot||_\infty \leq ||\cdot||_{A_1}$.
Ainsi $A = \{u_j,\ j \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

On construit alors récursivement les suites (ε_j), (f_j), (K_j) et (P_j) vérifiant pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\varepsilon_j = \frac{2^{-2-j}}{||f_1 \cdots f_{j-1}||_{A_1}} \qquad (\varepsilon_1 = 2^{-3})$$

et f_j, K_j, P_j qui vérifient le théorème 3.3.1 pour $\varepsilon = \varepsilon_j$ et $u = u_j$.
Posons pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$S_j = \prod_{k=1}^{j} f_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}) \subset Aq$$

et montrons que la suite (S_j) converge dans $A_q(\mathbb{T})$ vers une distribution $S \in Aq \setminus \{0\}$.
Pour cela utilisons le critère de Cauchy puisque $A_q(\mathbb{T})$ est un espace de Banach. Soit $m \leq n$. On a

$$\begin{aligned}
||S_n - S_m||_{A_q} &\leq \sum_{j=m}^{n-1} ||S_{j+1} - S_j||_{A_q} \\
&\leq \sum_{j=m}^{n-1} \|(f_{j+1} - 1) \prod_{k=1}^{j} f_k\|_{A_q} \\
&\leq \sum_{j=m}^{n-1} \|(f_{j+1} - 1)\|_{A_q} \left\| \prod_{k=1}^{j} f_k \right\|_{A_1}
\end{aligned}$$

Or par définition de f_{j+1} on a, d'après la condition (i) du théorème 3.3.1, $||1 - f_{j+1}||_{A_q} \leq \varepsilon_{j+1}$. De plus par construction de ε_{j+1}, on a $||f_1 \cdots f_j||_{A_1} \varepsilon_{j+1} \leq 2^{-2-j}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
||S_n - S_m||_{A_q} &\leq \sum_{j=m}^{n-1} ||f_1 \cdots f_j||_{A_1}\ \varepsilon_{j+1} \\
&\leq \sum_{j=m}^{n-1} 2^{-2-j} \\
&\leq 2^{-m-2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

ce qui montre que la suite (S_j) est de Cauchy dans $A_q(\mathbb{T})$ et donc converge vers $S \in A_q(\mathbb{T})$.
De plus $S \neq 0$ car on a

$$||1 - S||_{A_q} \leq \sum_{j=0}^{\infty} ||S_{j+1} - S_j||_{A_q} \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j-2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Posons alors

$$K = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$$

et observons que $\mathrm{supp}(S) \subset K$ car pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{supp}(f_j) \subset K_j$ d'après la condition (i) du théorème 3.3.1. Montrons que K est un ensemble de Helson en utilisant le lemme 3.2.7.

L'ensemble K est tout d'abord compact en tant qu'intersection de compact de $\mathbb{T}$. Ensuite en utilisant la condition (ii) du théorème 3.3.1 on obtient pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\inf_{t\in K} |P_j(t)| \geq \inf_{t \in K_j} |P_j(t)| > 1 \quad ; \quad \forall t \in K \subset K_j, \ P_j(t)u_j(t) > 0 \quad ; \quad ||P_j||_{A_1} \leq C_q.$$

En particulier pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et $t \in K$, on a $u_j(t) \neq 0$. Or $\{u_j, \ j \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. Donc si K contient un intervalle I non réduit à un point, tous les u_j sont de signe fixe sur I car continue. Ceci est absurde car il existe une fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ qui change de signe sur I. Ainsi K ne contient pas d'intervalle et donc K est totalement discontinue.

Soit $h \in \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ vérifiant $Z_h \cap K = \varnothing$. Par densité il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $t \in K$, $u_j(t)h(t) > 0$. En effet il suffit de prendre $0 < \varepsilon < \min\{h(t)^2, \ t \in K\}$ et u_j vérifiant $||hu_j - h^2||_\infty \leq \varepsilon$.
Ainsi pour $P = P_j$ on a

$$\inf_{t\in K} |P(t)| > 1 \quad ; \quad \forall t \in K, \ P(t)h(t) > 0 \quad ; \quad ||P||_{A_1} \leq C_q.$$

Donc par le lemme 3.2.7, on déduit que K est un ensemble de Helson. □

Le lemme qui suit établit que les ensembles de Helson sont assez petits pour être contenus dans l'ensemble des zéros d'une fonction $g \in A(\mathbb{T})$ cyclique dans tous les $A_p(\mathbb{T})$ pour $p > 1$. Ce lemme utilise le lemme de Baire et n'est donc pas constructif. Il permettra de démontrer le théorème 3.1.2.

Lemme 3.5.1. *Soit K un ensemble de Helson sur $\mathbb{T}$.*
Il existe $g \in A(\mathbb{T})$ tel que $K \subset Z_g$ et tel que g soit cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$ pour tout $p > 1$.

Démonstration :
Soit K un ensemble de Helson sur $\mathbb{T}$. On définit

$$I(K) = \{g \in A(\mathbb{T}), \ g|_K = 0\}$$

qui, munit de la norme $||\cdot||_{A_1}$, est un espace de Banach en tant que sous-espace fermé de $A(\mathbb{T})$.
Posons

$$A = \{g \in I(K), \ g \text{ est cyclique dans } A_p(\mathbb{T}), \ \forall p > 1\}$$

et montrons que A est dense dans $I(K)$ ce qui prouvera que A est non vide.
Pour cela on considère pour $\varepsilon > 0$ et $p > 1$ l'ensemble

$$G(\varepsilon, p) = \{g \in I(K), \ \exists P \in \mathcal{P}(\mathbb{T}), \ ||1 - Pg||_{A_p} < \varepsilon\}.$$

Montrons alors que pour $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ et $p_n = 1 + \frac{1}{n}$ on a

$$\begin{array}{ll} (i) & \bigcap_{n=1}^{\infty} G(\varepsilon_n, p_n) \subset A \\ (ii) & \forall n \geq 1, \quad G(\varepsilon_n, p_n) \text{ est ouvert dans } I(K) \\ (iii) & \forall n \geq 1, \quad G(\varepsilon_n, p_n) \text{ est dense dans } I(K) \end{array}$$

ce qui permettra de conclure par le lemme de Baire.

(i) : Soit $g \in I(K)$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $P_n \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ vérifiant $||1 - P_n g||_{A_{p_n}} < \varepsilon_n$. Or pour tout $p > 1$ il existe N tel que pour $n \geq N$ on a $p > p_n$. Ainsi

$$||1 - P_n g||_{A_p} \leq ||1 - P_n g||_{A_{p_n}} < \varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui d'après la proposition 2.1.3 montre que g est cyclique pour tout $p > 1$ et donc que $g \in A$.

(ii) : Soit $g_0 \in G(\varepsilon_n, p_n)$. Il existe $P \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ tel que $||1 - P g_0||_{A_{p_n}} < \varepsilon_n$.
Alors, en posant $\eta = \frac{\varepsilon_n - ||1-Pg_0||_{A_{p_n}}}{2||P||_{A_{p_n}}}$, on a que $g \in G(\varepsilon_n, p_n)$ pour tout $g \in I(K)$ tel que $||g - g_0||_{A_1} < \eta$ car

$$||1 - Pg||_{A_{p_n}} < ||1 - Pg_0||_{A_{p_n}} + \eta ||P||_{A_{p_n}} < \varepsilon_n.$$

Ainsi $G(\varepsilon_n, p_n)$ est ouvert dans $I(K)$.

(iii) : Soit $g_0 \in I(K)$. Montrons que pour tout $\eta > 0$ il existe $g \in G(\varepsilon_n, p_n)$ tel que $||g - g_0||_{A_1} < \eta$. Prenons δ_2 une constante vérifiant la condition (iii) de la proposition 3.2.1. Il existe alors un polynôme trigonométrique non nul h tel que

$$||h - g_0||_{A_1} < \frac{\delta_2}{2(1 + \delta_2)} \eta.$$

On a donc que pour tout $t \in K$,

$$|h(t)| = |h(t) - g_0(t)| \leq ||h - g_0||_\infty \leq ||h - g_0||_{A_1} < \frac{\delta_2}{2(1 + \delta_2)} \eta.$$

De plus comme $h \in \mathcal{P}(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$, la fonction h admet un nombre fini de zéro donc, d'après la proposition 2.3.3, h est cyclique dans tous les $A_p(\mathbb{T})$ avec $p > 1$. Ainsi il existe $P \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ tel que $||1 - Ph||_{A_{p_n}} < \frac{\varepsilon_n}{2}$.
Or, d'après le lemme 3.2.8, il existe $f \in A(\mathbb{T})$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f|_K & = & h|_K \\ ||f||_{A_1} & \leq & \frac{2}{\delta_2} ||h|_K||_\infty < \frac{\eta}{1+\delta_2} \\ ||f||_{A_p} & < & \frac{\varepsilon_n}{2||P||_{A_1}} \end{array} \right.$$

Posons alors $g = h - f$. On a bien que $g \in I(K)$ car $f|_K = h|_K$. De plus $g \in G(\varepsilon_n, p_n)$ car

$$||1 - Pg||_{A_{p_n}} \leq ||1 - Ph||_{A_{p_n}} + ||P||_{A_1} ||f||_{A_{p_n}} < \varepsilon_n.$$

Finalement on a

$$||g - g_0||_{A_1} \leq ||h - g_0||_{A_1} + ||f||_{A_1} < \frac{\delta_2}{2(1 + \delta_2)} \eta + \frac{\eta}{1 + \delta_2} < \eta$$

ce qui démontre que $G(\varepsilon_n, p_n)$ est dense dans $I(K)$.

Ainsi par le lemme de Baire, $\bigcap_{n=1}^{\infty} G(\varepsilon_n, p_n)$ est dense dans l'espace de Banach $I(K)$ en tant qu'intersection dénombrable d'ouverts denses. L'ensemble A est donc non vide ce qui démontre ce lemme. □

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3.1.2 rappelé ci-dessous.

Théorème. *Soit $p \in]1, 2[$ et $\varepsilon > 0$. Il existe K un compact de $\mathbb{T}$ vérifiant*
(a) si $f \in A(\mathbb{T}) \cap \mathrm{Lip}_\varepsilon(\mathbb{T})$ et si f s'annule sur K alors f n'est pas cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$;
(b) il existe $g \in A(\mathbb{T})$ s'annulant sur K et tel que g soit cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$.

Démonstration :
Soit $p \in]1, 2[$. Prenons le compact K du théorème 3.1.3 pour $q = \frac{p}{p-1} > 2$.

(i) : si $f \in A(\mathbb{T}) \cap \mathrm{Lip}_\varepsilon(\mathbb{T})$ s'annule sur K on a alors d'après la proposition 2.3.6 que f n'est pas cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$ car il existe $S \in A_q(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{supp}(S) \subset K \subset Z_f$.

(ii) : d'après le lemme 3.5.1 et comme K est un ensemble de Helson, il existe $g \in A(\mathbb{T})$ s'annulant sur K tel que g soit cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$. □

Avant de démontrer le théorème 3.1.1, il nous reste à prouver un dernier lemme sur l'ensemble des zéros des fonctions régulières. Ce lemme, qui résulte de la souplesse des fonctions de classe C^1, affirme que tout compact est égal à l'ensemble des zéros d'une fonction de classe C^1 (le résultat est aussi vrai pour les fonctions C^∞)

Lemme 3.5.2. *Soit K un compact de $\mathbb{T}$. Il existe $f \in C^1(\mathbb{T})$ tel que $K = Z_f$.*

Démonstration :
Considérons tout d'abord la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x}} & si \quad x < 1 \\ 0 & si \quad x \geq 1 \end{cases}.$$

Il est facile de voir que la fonction g est de classe C^∞, est positive et est borné sur $\mathbb{R}$ et que la fonction g' est également bornée sur $\mathbb{R}$.

Soit K un compact de $\mathbb{T}$. On peut recouvrir $\mathbb{T} \setminus K$ par une union dénombrable de boules ouvertes. En effet il suffit de prendre $\{a_j,\ j \in \mathbb{N}\} = (\mathbb{T} \setminus K) \cap \mathbb{Q}$ et $r_j = \mathrm{d}(a_j, K) > 0$ de sorte que

$$\mathbb{T} \setminus K = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{B}(a_j, r_j).$$

Posons alors f la fonction définie sur $\mathbb{T}$ par[5]

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_j^2}{2^j}\, g\left(\frac{(t-a_j)^2}{r_j^2}\right).$$

Comme les r_j sont majorés par 2π et g est bornée sur $\mathbb{R}$, on a que f est bien définie en tant que somme d'une série normalement convergente sur $\mathbb{T}$. De plus f est de classe C^1 et pour tout $t \in \mathbb{T}$,

$$f'(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2(t-a_j)}{2^j}\, g'\left(\frac{(t-a_j)^2}{r_j^2}\right)$$

5. on identifie ici $\mathbb{T}$ à l'intervalle $[0, 2\pi[$

car
$$\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{2(t-a_j)}{2^j}\,g'\left(\frac{(t-a_j)^2}{r_j^2}\right)\right|\leq\sum_{j=0}^{\infty}\frac{8\pi}{2^j}||g'||_\infty<\infty.$$
Finalement on observe que $t\in K$ si et seulement si pour tout $j\in\mathbb{N}$, $|t-a_j|\geq r_j$. Or $Z_g=[1,\infty[$ donc $t\in K$ si et seulement si pour tout $j\in\mathbb{N}$, $g\left(\frac{(t-a_j)^2}{r_j^2}\right)=0$.
Ainsi on a $Z_f=K$ car g est positive. La fonction f vérifie donc le lemme. $\square$

Nous pouvons alors démontrer le théorème 3.1.1 qui constitue un contre-exemple à la conjecture de Wiener pour $p\in]1,2[$.

Théorème. *Pour tout $p\in]1,2[$, il existe $(f,g)\in A(\mathbb{T})^2$ tel que $Z_f=Z_g$ et tel que*

$$\begin{cases} f \text{ n'est pas cyclique dans } A_p(\mathbb{T}) \\ g \text{ est cyclique dans } A_p(\mathbb{T}) \end{cases}$$

Démonstration :
Soit $p\in]1,2[$. Considérons le compact K du théorème 3.1.2 ainsi que la fonction g s'annulant sur K qui est cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$. D'après le lemme 3.5.2 il existe une fonction $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ tel que $Z_f=Z_g$. Ainsi comme f est de classe C^1 sur le compact $\mathbb{T}$, on a $f\in A(\mathbb{T})\cap\mathrm{Lip}_1(\mathbb{T})$ et donc d'après le théorème 3.1.2 f n'est pas cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$ car f s'annule sur K. $\square$

Chapitre 4

Cyclicité dans $L^p(\mathbb{R})$

Nous avons jusqu'à présent étudié la cyclicité dans les espaces $l^p(\mathbb{Z})$. Nous allons maintenant élargir la notion de cyclicité aux espaces $L^p(\mathbb{R})$ et nous verrons qu'il est possible d'adapter le théorème 3.1.1 à ces espaces.

Dans cette partie on notera $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ l'espace des distributions tempérées. On identifie $L^p(\mathbb{R})$ à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On rappelle également que pour $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ on note $\hat{S}$ ou $\mathcal{F}S$ la transformée de Fourier de S définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par

$$< \hat{S}, \varphi > = < S, \hat{\varphi} > \qquad \text{avec} \qquad \hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}x.$$

L'application $\mathcal{F}$ est un automorphisme sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
On notera $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$.

Définition 4.0.3. *Pour $p \in [1, \infty[$, on définit l'espace $A_p(\mathbb{R}) = \{\hat{F},\ F \in L^p(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ muni de la norme $|| \cdot ||_{A_p(\mathbb{R})}$ vérifiant pour tout $F \in L^p(\mathbb{R})$, $||\hat{F}||_{A_p(\mathbb{R})} = ||F||_{L^p}$.*

Remarques
Voici quelques propriétés élémentaires des espaces $A_p(\mathbb{R})$.

- L'espace $A_p(\mathbb{R})$ est isométriquement isomorphe à $L^p(\mathbb{R})$. Ainsi $A_p(\mathbb{R})$ est un espace de Banach.
- L'espace $A(\mathbb{R}) = A_1(\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.
- Pour $p \in [1, 2]$, on a $A_p(\mathbb{R}) \subset L^q(\mathbb{R})$ avec $q = \frac{p}{p-1}$ si $p > 1$ et $q = \infty$ si $p = 1$.

Définition 4.0.4. *Soit $p \in [1, \infty[$.*
On dit que $F \in L^p(\mathbb{R})$ est cyclique dans $L^p(\mathbb{R})$ si $\mathrm{Vect}\{F(\cdot - y),\ y \in \mathbb{R}\}$ *est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.*

Nous avons, comme dans les espaces $l^p(\mathbb{Z})$, les théorèmes de Wiener qui permettent de caractériser les vecteurs cycliques de $L^p(\mathbb{R})$, pour $p = 1$ ou $p = 2$, en fonction de l'ensemble des zéros de la transformée de Fourier. Nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 4.0.5. *(de Wiener dans $L^p(\mathbb{R})$)*
Une fonction $F \in L^1(\mathbb{R})$ est cyclique dans $L^1(\mathbb{R})$ si et seulement si $\hat{F}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Une fonction $F \in L^2(\mathbb{R})$ est cyclique dans $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\hat{F}$ ne s'annule pas sur un ensemble de mesure de Lebesgue non nulle.

Corollaire 4.0.6. *Soit* $F \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\mathbb{R})$.
Si $\hat{F}$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$ *alors* F *est cyclique dans* $L^p(\mathbb{R})$ *pour tout* $p \geq 1$.

Démonstration :
On remarque tout d'abord que F n'est pas cyclique dans $L^p(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $G \in L^q(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ (avec $q = \frac{p}{p-1}$) vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(F*G)(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x-\xi)G(\xi)\ \mathrm{d}\xi = 0$.
En effet le théorème de Hahn-Banach assure qu'un sous-espace E est n'est pas dense dans $L^p(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $G \in (L^p(\mathbb{R}))' = L^q(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant pour tout $H \in E$, $\int_{\mathbb{R}} HG = 0$.

Comme $\hat{F}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ on a d'après le théorème de Wiener que F est cyclique dans $L^1(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $p > 1$ tel que F ne soit pas cyclique dans $L^p(\mathbb{R})$ et montrons alors que F ne peut pas être cyclique dans $L^1(\mathbb{R})$.
D'après la première remarque il existe $G \in L^q(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ (avec $q = \frac{p}{p-1}$) vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(F*G)(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x-\xi)G(\xi)\ \mathrm{d}\xi = 0.$$

Posons H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = \int_x^{x+1} G(t)\ \mathrm{d}t.$$

La fonction H est bornée car d'après l'inégalité de Hölder on a

$$|H(x)| \leq \left(\int_x^{x+1} |G|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq ||G||_{L^q}.$$

De plus, en utilisant le théorème de Fubini, on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} F(x-\xi)H(\xi)\ \mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}}\int_0^1 F(x-\xi)G(t+\xi)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}\xi \\ &= \int_0^1\int_{\mathbb{R}} F(x+t-u)G(u)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

car $(F*G)(x+t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$.
Or $H \in L^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas nulle car sinon $|G|^q$ serait 1-périodique intégrable donc nulle. Ainsi d'après la première remarque, cela montre que F n'est pas cyclique dans $L^1(\mathbb{R})$ ce qui est absurde. $\square$

Nous allons maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre qui affirme que l'on ne peut pas caractériser les vecteurs cycliques de $L^p(\mathbb{R})$, pour $1 < p < 2$, uniquement par l'ensemble des zéros de la transformée de Fourier. Pour démontrer ce résultat nous allons utiliser le théorème 3.1.1 qui est l'analogue, dans les espaces $l^p(\mathbb{Z})$, du résultat suivant.

Théorème 4.0.7. *Pour tout* $p \in]1,2[$, *il existe deux fonctions* F *et* G *appartenant à* $L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ *telles que* $\hat{F}$ *et* $\hat{G}$ *ont les mêmes zéros et telles que*

$$\begin{cases} F \text{ n'est pas cyclique dans } L^p(\mathbb{R}) \\ G \text{ est cyclique dans } L^p(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Démonstration :
Soit $p \in]1,2[$. On considère une application $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier $\widehat{\gamma}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On peut par exemple prendre $\gamma : x \mapsto e^{-x^2}$.
On définit alors l'application linéaire T définie sur $A_p(\mathbb{T})$ par

$$Tf : x \ \mapsto \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\gamma(x+n).$$

On remarque que T est bien définie car $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée et $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Montrons que l'opérateur $T : A_p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{R})$ est borné. Comme $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on pose

$$M = \int_{\mathbb{R}} |\gamma(x)| \ \mathrm{d}x + \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\gamma(x+n)| < \infty.$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\gamma(x+n)\right|^p & \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^p|\gamma(x+n)|\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\gamma(x+n)|\right)^{p-1} \\ & \leq M^{p-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^p|\gamma(x+n)|. \end{aligned}$$

Donc, en intégrant puis en élevant à la puissance $\frac{1}{p}$, on obtient $||Tf||_{L^p} \leq M||f||_{A_p}$.

On montre, par changement de variable, que T vérifie les deux propriétés suivantes : pour $f \in A(\mathbb{T}) \cap A_p(\mathbb{T})$, $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$\begin{cases} T(e_nf)(x) = (Tf)(x+n) \\ \widehat{(Tf)}(x) = \widehat{\gamma}(x)f(x) \end{cases}$$

en considérant f comme une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

On peut maintenant construire les applications F et G du théorème.
On considère le compact K et l'application $g \in A(\mathbb{T})$ du théorème 3.1.2.
Posons alors $G = Tg \in L^p(\mathbb{R})$.
Pour tout $P \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ on a

$$||\gamma - T(Pg)||_{L^p} = ||T(1-Pg)||_{L^p} \leq ||T|| \ ||1-Pg||_{A_p}.$$

Or g est cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$ donc d'après la proposition 2.1.3 il existe une suite (P_n) de polynômes trigonométriques telle que $||1-P_ng||_{A_p}$ tende vers 0. Mais comme $T(e_nf)(x) = (Tf)(x+n)$, on a que $T(P_ng) \in \text{Vect}\{G(\cdot - y), \ y \in \mathbb{R}\}$. Ainsi $\gamma \in \overline{\text{Vect}\{G(\cdot - y), \ y \in \mathbb{R}\}}$. Or d'après le corollaire 4.0.6, γ est cyclique dans $L^p(\mathbb{R})$ car sa transformée de Fourier ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On obtient donc que G est cyclique dans $L^p(\mathbb{R})$.

Considérons maintenant une fonction $h : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ et vérifiant $Z_h = Z_g$.
Posons $F = Th$. D'après les propriétés de l'opérateur T, on a $\hat{F} = \widehat{\gamma}\ h$ et $\hat{G} = \widehat{\gamma}\ g$.
Comme $Z_h = Z_g$ et $\widehat{\gamma}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ on a bien que $\hat{F}$ et $\hat{G}$ ont les mêmes zéros.

Montrons alors que F n'est pas cyclique dans $L^p(\mathbb{R})$. Pour cela nous allons utilisé la proposition 2.3.6 généralisée [1] aux espaces $L^p(\mathbb{R})$.
D'après les théorèmes 3.1.2, h n'est pas cyclique dans $A_p(\mathbb{T})$. Ainsi d'après le théorème 2.3.4, il existe $S \in A_q(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$ (avec $q = \frac{p}{p-1}$) tel que $\mathrm{supp}(S) \subset Z_h$. Or, comme $Z_h \neq \mathbb{T}$, on peut considérer S comme une distribution non nulle de $A_q(\mathbb{R})$ à support dans Z_h (cf. [7] Corollaire 10.6.6 p197).
De plus comme h est de classe C^∞ et borné et comme $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $\hat{F} = \widehat{\gamma}\ h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ainsi $\hat{F} \in \mathrm{Lip}_\varepsilon(\mathbb{R})$ pour $\varepsilon > 0$ et comme $\mathrm{supp}(S) \subset Z_h \subset Z_{\hat{F}}$ on a par la proposition 2.3.6 généralisée à $L^p(\mathbb{R})$ que F n'est pas cyclique dans $L^p(\mathbb{R})$, ce qui conclut la preuve. $\square$

1. La démonstration de la proposition 2.3.6 dans les espaces $l^p(\mathbb{Z})$ et $L^p(\mathbb{R})$ est identique (cf. [6])

Bibliographie

[1] Nir Lev, Alexander Olevskii, *Wiener's 'closure of translates' problem and Piatetski-Shapiro's uniqueness phenomenon*, Ann. Math. (2) 174, No. 1, 519-541 (2011)

[2] Jean-Pierre Kahane, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, 2nd ed., Her- mann, 1994

[3] Donald J. Newman, *The closure of translates in l^p*, Amer. J. Math. 86 (1964), 651–667

[4] Donald J. Newman, *A simple proof of Wiener's $1/f$ theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 48 (1975), 264-265

[5] Arne Beurling, *On a closure problem*, Ark. Mat. 1 (1951), 301–303

[6] Carl S. Herz, *A note on the span of translations in L^p*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 724–727

[7] Ralph P. Boas, Jr., *Entire functions*, Academic Press Inc., 1954.

[8] Nikolai K. Nikolski, *Operators, Functions, and Systems - An Easy Reading : Hardy, Hankel, and Toeplitz, Volume 1*, Ame. Math. Soc. (2002)

[9] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1974

[10] Norbert Wiener, *Tauberian theorems*, Ann. of Math. (2) 33 (1932), 1–100