Sur l'approximation et la complétude des translatés dans les espaces de fonctions

Florian Le Manach

Institut de Mathématiques de Bordeaux

Soutenance de thèse
22 novembre 2018

Soit X un espace de Banach de fonctions complexes définies sur le cercle unité $\mathbb{T}$. On suppose que l'opérateur shift S, définie par

$$S(f)(z) = zf(z), \quad z \in \mathbb{T}$$

est un isomorphisme topologique de X dans lui même.

On suppose en plus que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans X.

On considèrera principalement, pour $1 \leq p \leq 2$ et $\beta \geq 0$, les espaces

$$A^p(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}),\ \|f\|^p_{A^p(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^p < \infty \right\},$$

et

$$A^p_\beta(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}),\ \|f\|^p_{A^p_\beta(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^p (1+|n|)^{\beta p} < \infty \right\}$$

avec

$$\widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(z) z^{-n} \frac{|dz|}{2\pi}.$$

Soit X un espace de Banach de fonctions complexes définies sur le cercle unité $\mathbb{T}$. On suppose que l'opérateur shift S, définie par

$$S(f)(z) = zf(z), \quad z \in \mathbb{T}$$

est un isomorphisme topologique de X dans lui même.
On suppose en plus que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans X.
On considèrera principalement, pour $1 \leq p \leq 2$ et $\beta \geq 0$, les espaces

$$A^p(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}),\ \|f\|^p_{A^p(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^p < \infty \right\},$$

et

$$A^p_\beta(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}),\ \|f\|^p_{A^p_\beta(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^p (1+|n|)^{\beta p} < \infty \right\}$$

avec

$$\widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(z) z^{-n} \frac{|dz|}{2\pi}.$$

Soit X un espace de Banach de fonctions complexes définies sur le cercle unité $\mathbb{T}$. On suppose que l'opérateur shift S, définie par

$$S(f)(z) = zf(z), \quad z \in \mathbb{T}$$

est un isomorphisme topologique de X dans lui même.
On suppose en plus que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans X.
On considèrera principalement, pour $1 \leq p \leq 2$ et $\beta \geq 0$, les espaces

$$A^p(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}), \ \|f\|^p_{A^p(\mathbb{T})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^p < \infty \right\},$$

et

$$A^p_\beta(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}), \ \|f\|^p_{A^p_\beta(\mathbb{T})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^p (1 + |n|)^{\beta p} < \infty \right\}$$

avec

$$\widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(z) z^{-n} \frac{|dz|}{2\pi}.$$

Definition

On dit qu'une fonction $f \in X$ est cyclique dans X si

$$\mathrm{Vect}\{z^n f,\ n \in \mathbb{N}\} = \{Pf,\ P \text{ polynôme analytique}\}$$

est dense dans X.

Definition

On dit qu'une fonction $f \in X$ est bicyclique dans X si

$$\mathrm{Vect}\{z^n f,\ n \in \mathbb{Z}\} = \{Pf,\ P \text{ polynôme trigonométrique}\}$$

est dense dans X.

Definition

On dit qu'une fonction $f \in X$ est cyclique dans X si

$$\mathrm{Vect}\{z^n f,\ n \in \mathbb{N}\} = \{Pf,\ P \text{ polynôme analytique}\}$$

est dense dans X.

Definition

On dit qu'une fonction $f \in X$ est bicyclique dans X si

$$\mathrm{Vect}\{z^n f,\ n \in \mathbb{Z}\} = \{Pf,\ P \text{ polynôme trigonométrique}\}$$

est dense dans X.

Rappel historique des résultats sur la bicyclicité dans les espaces $A^p(\mathbb{T})$

Théorème de Wiener pour $p = 1$ (1932)

Une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ est bicyclique dans $A(\mathbb{T})$ si et seulement si f ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$.

Théorème de Wiener pour $p = 2$ (1932)

Une fonction $f \in A^2(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T})$ est bicyclique dans $A^2(\mathbb{T})$ si et seulement si f ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$ sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

Conjecture pour $1 < p < 2$

Pour une fonction $f \in A(\mathbb{T})$, l'ensemble des zéros de f caractérise la bicyclicité de f dans $A^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < 2$.

Une telle conjecture pourrait se formuler de la façon suivante :
« Une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ si et seulement si $\mathcal{Z}(f)$ est "petit". »

Théorème de Lev-Olevskii (2011)

Soit $1 < p < 2$. Il existe deux fonctions f et g dans $A(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$, et telles que l'une soit bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ et l'autre non.

Théorème de Wiener pour $p = 1$ (1932)

Une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ est bicyclique dans $A(\mathbb{T})$ si et seulement si f ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$.

Théorème de Wiener pour $p = 2$ (1932)

Une fonction $f \in A^2(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T})$ est bicyclique dans $A^2(\mathbb{T})$ si et seulement si f ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$ sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

Conjecture pour $1 < p < 2$

Pour une fonction $f \in A(\mathbb{T})$, l'ensemble des zéros de f caractérise la bicyclicité de f dans $A^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < 2$.

Une telle conjecture pourrait se formuler de la façon suivante :
« Une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ si et seulement si $\mathcal{Z}(f)$ est "petit". »

Théorème de Lev-Olevskii (2011)

Soit $1 < p < 2$. Il existe deux fonctions f et g dans $A(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$, et telles que l'une soit bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ et l'autre non.

Théorème de Wiener pour $p = 1$ (1932)

Une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ est bicyclique dans $A(\mathbb{T})$ si et seulement si f ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$.

Théorème de Wiener pour $p = 2$ (1932)

Une fonction $f \in A^2(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T})$ est bicyclique dans $A^2(\mathbb{T})$ si et seulement si f ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$ sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

Conjecture pour $1 < p < 2$

Pour une fonction $f \in A(\mathbb{T})$, l'ensemble des zéros de f caractérise la bicyclicité de f dans $A^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < 2$.

Une telle conjecture pourrait se formuler de la façon suivante :
« Une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ si et seulement si $\mathcal{Z}(f)$ est "petit". »

Théorème de Lev-Olevskii (2011)

Soit $1 < p < 2$. Il existe deux fonctions f et g dans $A(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$, et telles que l'une soit bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ et l'autre non.

Théorème de Wiener pour $p = 1$ (1932)

Une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ est bicyclique dans $A(\mathbb{T})$ si et seulement si f ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$.

Théorème de Wiener pour $p = 2$ (1932)

Une fonction $f \in A^2(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T})$ est bicyclique dans $A^2(\mathbb{T})$ si et seulement si f ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$ sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

Conjecture pour $1 < p < 2$

Pour une fonction $f \in A(\mathbb{T})$, l'ensemble des zéros de f caractérise la bicyclicité de f dans $A^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < 2$.

Une telle conjecture pourrait se formuler de la façon suivante :
« Une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ si et seulement si $\mathcal{Z}(f)$ est "petit". »

Théorème de Lev-Olevskii (2011)

Soit $1 < p < 2$. Il existe deux fonctions f et g dans $A(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$, et telles que l'une soit bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ et l'autre non.

Beurling (1951)

Soit $f \in A(\mathbb{T})$ et $1 < p < 2$. Si $\dim(\mathcal{Z}(f)) < \frac{2(p-1)}{p}$ alors f est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.

Salem (1951)

Soit $1 < p < 2$. Si $\frac{2(p-1)}{p} < \alpha \leq 1$ alors il existe $f \in A(\mathbb{T})$ non bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ vérifiant $\dim(\mathcal{Z}(f)) = \alpha$.

Newman (1964)

Il existe une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ vérifiant $\dim(\mathcal{Z}(f)) = 1$ qui est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.

toujours bicyclique $\exists$ *non-bicyclique* $\exists$ *bicyclique*

$\dim(\mathcal{Z}(f))$

$0 \qquad \frac{2(p-1)}{p} \qquad 1$

Rappel historique des résultats sur la bicyclicité dans les espaces $A^p(\mathbb{T})$

Beurling (1951)

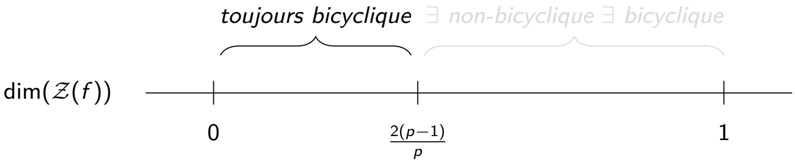
Soit $f \in A(\mathbb{T})$ et $1 < p < 2$. Si $\dim(\mathcal{Z}(f)) < \frac{2(p-1)}{p}$ alors f est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.

Salem (1951)

Soit $1 < p < 2$. Si $\frac{2(p-1)}{p} < \alpha \leq 1$ alors il existe $f \in A(\mathbb{T})$ non bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ vérifiant $\dim(\mathcal{Z}(f)) = \alpha$.

Newman (1964)

Il existe une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ vérifiant $\dim(\mathcal{Z}(f)) = 1$ qui est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.



Rappel historique des résultats sur la bicyclicité dans les espaces $A^p(\mathbb{T})$

Beurling (1951)

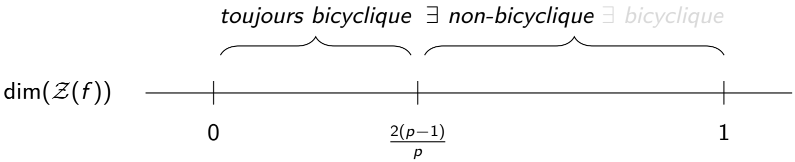
Soit $f \in A(\mathbb{T})$ et $1 < p < 2$. Si $\dim(\mathcal{Z}(f)) < \frac{2(p-1)}{p}$ alors f est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.

Salem (1951)

Soit $1 < p < 2$. Si $\frac{2(p-1)}{p} < \alpha \leq 1$ alors il existe $f \in A(\mathbb{T})$ non bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ vérifiant $\dim(\mathcal{Z}(f)) = \alpha$.

Newman (1964)

Il existe une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ vérifiant $\dim(\mathcal{Z}(f)) = 1$ qui est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.



Beurling (1951)

Soit $f \in A(\mathbb{T})$ et $1 < p < 2$. Si $\dim(\mathcal{Z}(f)) < \frac{2(p-1)}{p}$ alors f est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.

Salem (1951)

Soit $1 < p < 2$. Si $\frac{2(p-1)}{p} < \alpha \leq 1$ alors il existe $f \in A(\mathbb{T})$ non bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ vérifiant $\dim(\mathcal{Z}(f)) = \alpha$.

Newman (1964)

Il existe une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ vérifiant $\dim(\mathcal{Z}(f)) = 1$ qui est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.

toujours bicyclique $\exists$ *non-bicyclique* $\exists$ *bicyclique*

$$\dim(\mathcal{Z}(f)) \quad \overbrace{0 \qquad\qquad \frac{2(p-1)}{p}}^{\textit{toujours bicyclique}} \qquad \overbrace{\qquad\qquad 1}^{\exists\ \textit{non-bicyclique}\ \exists\ \textit{bicyclique}}$$

On rappelle que

$$A^p_\beta(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}),\ \|f\|^p_{A^p_\beta(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^p (1+|n|)^{\beta p} < \infty \right\}.$$

Pour $1 \leq p < \infty$ et $\beta \geq 0$, l'espace $A^p_\beta(\mathbb{T})$ est une algèbre de Banach si et seulement si $\beta q > 1$.

Théorème

Soit $1 \leq p < \infty$ et $\beta \geq 0$. On suppose que $\beta q > 1$. Une fonction $f \in A^p_\beta(\mathbb{T})$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ si et seulement si f ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$.

Théorème Richter-Ross-Sundberg (1994)

Soit $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$ et $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$. La fonction f est bicyclique dans $A^2_\beta(\mathbb{T})$ si et seulement si $C_{1-2\beta}(\mathcal{Z}(f)) = 0$.

On rappelle que

$$A^p_\beta(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}),\ \|f\|^p_{A^p_\beta(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^p (1+|n|)^{\beta p} < \infty \right\}.$$

Pour $1 \leq p < \infty$ et $\beta \geq 0$, l'espace $A^p_\beta(\mathbb{T})$ est une algèbre de Banach si et seulement si $\beta q > 1$.

Théorème

Soit $1 \leq p < \infty$ et $\beta \geq 0$. On suppose que $\beta q > 1$. Une fonction $f \in A^p_\beta(\mathbb{T})$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ si et seulement si f ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$.

Théorème Richter-Ross-Sundberg (1994)

Soit $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$ et $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$. La fonction f est bicyclique dans $A^2_\beta(\mathbb{T})$ si et seulement si $C_{1-2\beta}(\mathcal{Z}(f)) = 0$.

On rappelle que

$$A^p_\beta(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}),\ \|f\|^p_{A^p_\beta(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^p (1+|n|)^{\beta p} < \infty \right\}.$$

Pour $1 \leq p < \infty$ et $\beta \geq 0$, l'espace $A^p_\beta(\mathbb{T})$ est une algèbre de Banach si et seulement si $\beta q > 1$.

Théorème

Soit $1 \leq p < \infty$ et $\beta \geq 0$. On suppose que $\beta q > 1$. Une fonction $f \in A^p_\beta(\mathbb{T})$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ si et seulement si f ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$.

Théorème Richter-Ross-Sundberg (1994)

Soit $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$ et $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$. La fonction f est bicyclique dans $A^2_\beta(\mathbb{T})$ si et seulement si $C_{1-2\beta}(\mathcal{Z}(f)) = 0$.

Conditions pour la bicyclicité dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$

On rappelle que

$$A^p_\beta(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}),\ \|f\|^p_{A^p_\beta(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^p (1+|n|)^{\beta p} < \infty \right\}.$$

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$, $q = p/(p-1)$ et $\beta > 0$ tels que $\beta q \leq 1$.

1. Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $\dim(\mathcal{Z}(f)) < \frac{2}{q}(1-\beta q)$ alors f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
2. Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $\dim(\mathcal{Z}(f)) > 1-\beta q$ alors f n'est pas bicyclique $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
3. Pour $\frac{2}{q}(1-\beta q) < \alpha \leq 1$, il existe un sous-ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = \alpha$ et toute $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ n'est pas bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
4. Soit $p = \frac{2k}{2k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe un ensemble $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = 1-\beta q$ et tel que tout $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

On rappelle que

$$A^p_\beta(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}),\ \|f\|^p_{A^p_\beta(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^p (1+|n|)^{\beta p} < \infty \right\}.$$

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$, $q = p/(p-1)$ et $\beta > 0$ tels que $\beta q \leq 1$.

1. Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $\dim(\mathcal{Z}(f)) < \frac{2}{q}(1-\beta q)$ alors f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
2. Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $\dim(\mathcal{Z}(f)) > 1-\beta q$ alors f n'est pas bicyclique $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
3. Pour $\frac{2}{q}(1-\beta q) < \alpha \leq 1$, il existe un sous-ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = \alpha$ et toute $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ n'est pas bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
4. Soit $p = \frac{2k}{2k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe un ensemble $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = 1-\beta q$ et tel que tout $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

On rappelle que

$$A^p_\beta(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}),\ \|f\|^p_{A^p_\beta(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^p (1+|n|)^{\beta p} < \infty \right\}.$$

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$, $q = p/(p-1)$ et $\beta > 0$ tels que $\beta q \leq 1$.

1. Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $\dim(\mathcal{Z}(f)) < \frac{2}{q}(1-\beta q)$ alors f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
2. Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $\dim(\mathcal{Z}(f)) > 1-\beta q$ alors f n'est pas bicyclique $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
3. Pour $\frac{2}{q}(1-\beta q) < \alpha \leq 1$, il existe un sous-ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = \alpha$ et toute $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ n'est pas bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
4. Soit $p = \frac{2k}{2k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe un ensemble $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = 1-\beta q$ et tel que tout $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

On rappelle que

$$A^p_\beta(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}),\ \|f\|^p_{A^p_\beta(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^p (1+|n|)^{\beta p} < \infty \right\}.$$

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$, $q = p/(p-1)$ et $\beta > 0$ tels que $\beta q \leq 1$.

1. Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $\dim(\mathcal{Z}(f)) < \frac{2}{q}(1-\beta q)$ alors f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
2. Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $\dim(\mathcal{Z}(f)) > 1-\beta q$ alors f n'est pas bicyclique $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
3. Pour $\frac{2}{q}(1-\beta q) < \alpha \leq 1$, il existe un sous-ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = \alpha$ et toute $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ n'est pas bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
4. Soit $p = \frac{2k}{2k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe un ensemble $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = 1-\beta q$ et tel que tout $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

On rappelle que

$$A^p_\beta(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}),\ \|f\|^p_{A^p_\beta(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^p (1+|n|)^{\beta p} < \infty \right\}.$$

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$, $q = p/(p-1)$ et $\beta > 0$ tels que $\beta q \leq 1$.

1. Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $\dim(\mathcal{Z}(f)) < \frac{2}{q}(1-\beta q)$ alors f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
2. Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $\dim(\mathcal{Z}(f)) > 1-\beta q$ alors f n'est pas bicyclique $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
3. Pour $\frac{2}{q}(1-\beta q) < \alpha \leq 1$, il existe un sous-ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = \alpha$ et toute $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ n'est pas bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
4. Soit $p = \frac{2k}{2k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe un ensemble $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = 1-\beta q$ et tel que tout $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

On rappelle que

$$A^p_\beta(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}),\ \|f\|^p_{A^p_\beta(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^p (1+|n|)^{\beta p} < \infty \right\}.$$

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$, $q = p/(p-1)$ et $\beta > 0$ tels que $\beta q \leq 1$.

1. Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $\dim(\mathcal{Z}(f)) < \frac{2}{q}(1-\beta q)$ alors f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
2. Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $\dim(\mathcal{Z}(f)) > 1-\beta q$ alors f n'est pas bicyclique $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
3. Pour $\frac{2}{q}(1-\beta q) < \alpha \leq 1$, il existe un sous-ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = \alpha$ et toute $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ n'est pas bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
4. Soit $p = \frac{2k}{2k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe un ensemble $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = 1-\beta q$ et tel que tout $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Résumé des résultats pour la bicyclicité dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$

Sans poids ($\beta = 0$) $A^p(\mathbb{T})$:

toujours bicyclique $\exists$ *non-bicyclique* $\exists$ *bicyclique*

$\dim(\mathcal{Z}(f))$

$0 \qquad \frac{2}{q} \qquad 1$

Avec poids ($\beta > 0$) $A^p_\beta(\mathbb{T})$:

toujours bicyclique $\exists$ *non-bicyclique* $\exists$ *bicyclique** *toujours non-bicyclique*

$\dim(\mathcal{Z}(f))$

$0 \qquad \frac{2}{q}(1-\beta q) \qquad 1-\beta q \qquad 1$

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$, $q = p/(p-1)$ et $\beta > 0$ tels que $\beta q \leq 1$.

4 Soit $p = \frac{2k}{2k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe un ensemble $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = 1 - \beta q$ et tel que tout $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Comme $p = \frac{2k}{2k-1}$, on a $k = q/2$. Pour $\alpha = 1 - \beta q$, si $C_\alpha(k \times \mathcal{Z}(f)) = 0$ alors f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ avec

$$k \times \mathcal{Z}(f) = \{x_1 + \cdots + x_k,\ x_i \in \mathcal{Z}(f)\}.$$

Donc pour démontrer le résultat, il suffit de trouver un ensemble E vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\dim(k \times E) = 1 - \beta q \quad \text{et} \quad C_{1-\beta q}(k \times E) = 0.$$

Pour cela on considère l'ensemble de Cantor généralisé suivant

$$E = E_\lambda = \left\{ x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}},\ (x_i) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } i \in K_\lambda \Rightarrow x_i = 0 \right\}.$$

avec

$$K_\lambda = \left\{ m \in \mathbb{N},\ \exists j \in \mathbb{N},\ m \in [2^j, 2^j(1 + \lambda + 1/j)] \right\}$$

et λ tel que $\frac{1-\lambda}{1+\lambda} = 1 - \beta q$.

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$, $q = p/(p-1)$ et $\beta > 0$ tels que $\beta q \leq 1$.

4. Soit $p = \frac{2k}{2k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe un ensemble $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = 1 - \beta q$ et tel que tout $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Comme $p = \frac{2k}{2k-1}$, on a $k = q/2$. Pour $\alpha = 1 - \beta q$, si $C_\alpha(k \times \mathcal{Z}(f)) = 0$ alors f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ avec

$$k \times \mathcal{Z}(f) = \{x_1 + \cdots + x_k,\ x_i \in \mathcal{Z}(f)\}.$$

Donc pour démontrer le résultat, il suffit de trouver un ensemble E vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\dim(k \times E) = 1 - \beta q \quad \text{et} \quad C_{1-\beta q}(k \times E) = 0.$$

Pour cela on considère l'ensemble de Cantor généralisé suivant

$$E = E_\lambda = \left\{ x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}},\ (x_i) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } i \in K_\lambda \Rightarrow x_i = 0 \right\}.$$

avec

$$K_\lambda = \left\{ m \in \mathbb{N},\ \exists j \in \mathbb{N},\ m \in [2^j, 2^j(1 + \lambda + 1/j)] \right\}$$

et λ tel que $\frac{1-\lambda}{1+\lambda} = 1 - \beta q$.

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$, $q = p/(p-1)$ et $\beta > 0$ tels que $\beta q \leq 1$.

4. Soit $p = \frac{2k}{2k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe un ensemble $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = 1 - \beta q$ et tel que tout $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Comme $p = \frac{2k}{2k-1}$, on a $k = q/2$. Pour $\alpha = 1 - \beta q$, si $C_\alpha(k \times \mathcal{Z}(f)) = 0$ alors f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ avec

$$k \times \mathcal{Z}(f) = \{x_1 + \cdots + x_k,\ x_i \in \mathcal{Z}(f)\}.$$

Donc pour démontrer le résultat, il suffit de trouver un ensemble E vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\dim(k \times E) = 1 - \beta q \quad \text{et} \quad C_{1-\beta q}(k \times E) = 0.$$

Pour cela on considère l'ensemble de Cantor généralisé suivant

$$E = E_\lambda = \left\{ x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}},\ (x_i) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } i \in K_\lambda \Rightarrow x_i = 0 \right\}.$$

avec

$$K_\lambda = \left\{ m \in \mathbb{N},\ \exists j \in \mathbb{N},\ m \in [2^j, 2^j(1 + \lambda + 1/j)] \right\}$$

et λ tel que $\frac{1-\lambda}{1+\lambda} = 1 - \beta q$.

Idée de preuve

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$, $q = p/(p-1)$ et $\beta > 0$ tels que $\beta q \leq 1$.

4. Soit $p = \frac{2k}{2k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe un ensemble $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = 1 - \beta q$ et tel que tout $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Comme $p = \frac{2k}{2k-1}$, on a $k = q/2$. Pour $\alpha = 1 - \beta q$, si $C_\alpha(k \times \mathcal{Z}(f)) = 0$ alors f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ avec

$$k \times \mathcal{Z}(f) = \{x_1 + \cdots + x_k,\ x_i \in \mathcal{Z}(f)\}.$$

Donc pour démontrer le résultat, il suffit de trouver un ensemble E vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\dim(k \times E) = 1 - \beta q \quad \text{et} \quad C_{1-\beta q}(k \times E) = 0.$$

Pour cela on considère l'ensemble de Cantor généralisé suivant

$$E = E_\lambda = \left\{ x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}},\ (x_i) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } i \in K_\lambda \Rightarrow x_i = 0 \right\}.$$

avec

$$K_\lambda = \left\{ m \in \mathbb{N},\ \exists j \in \mathbb{N},\ m \in [2^j, 2^j(1 + \lambda + 1/j)] \right\}$$

et λ tel que $\frac{1-\lambda}{1+\lambda} = 1 - \beta q$.

Cas $\dim(\mathcal{Z}(f)) = \frac{2}{q}(1-\beta q)$

Pour $1 \leq p \leq 2$ et $\alpha = 2/q$ (et $\beta = 0$)

Question de Newman (1964)

L'égalité $H_\alpha(\mathcal{Z}(f)) = 0$ implique-t-elle que f est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$?

On considère la suite $]a_k, b_k[$ des intervalles contigus à $\mathcal{Z}(f)$. On pose

$$r_n = 2\pi - \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

On dit que $\mathcal{Z}(f)$ est de α-mesure forte 0 si $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\alpha}-1} r_n = 0$.

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$, $q = p/(p-1)$ et $\beta \geq 0$ tel que $\beta q < 1$.

1. Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $\mathcal{Z}(f)$ est de α-mesure forte nulle, où $\alpha = \frac{2}{q}(1-\beta q)$ alors f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
2. Pour tout $\gamma > \frac{2}{q}$, il existe un ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que toute fonction $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ n'est pas bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ et tel que $H_h(E) = 0$ où $h(t) = \frac{t^\alpha}{\log(e/t)^\gamma}$ avec $\alpha = \frac{2}{q}(1-\beta q)$.

Pour $1 \leq p \leq 2$ et $\alpha = 2/q$ (et $\beta = 0$)

Question de Newman (1964)

L'égalité $H_\alpha(\mathcal{Z}(f)) = 0$ implique-t-elle que f est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$?

On considère la suite $]a_k, b_k[$ des intervalles contigus à $\mathcal{Z}(f)$. On pose

$$r_n = 2\pi - \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

On dit que $\mathcal{Z}(f)$ est de α-mesure forte 0 si $\lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{\alpha} - 1} r_n = 0$.

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$, $q = p/(p-1)$ et $\beta \geq 0$ tel que $\beta q < 1$.

1. Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $\mathcal{Z}(f)$ est de α-mesure forte nulle, où $\alpha = \frac{2}{q}(1 - \beta q)$ alors f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
2. Pour tout $\gamma > \frac{2}{q}$, il existe un ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que toute fonction $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ n'est pas bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ et tel que $H_h(E) = 0$ où $h(t) = \frac{t^\alpha}{\log(e/t)^\gamma}$ avec $\alpha = \frac{2}{q}(1 - \beta q)$.

Cas $\dim(\mathcal{Z}(f)) = \frac{2}{q}(1-\beta q)$

Pour $1 \leq p \leq 2$ et $\alpha = 2/q$ (et $\beta = 0$)

Question de Newman (1964)

L'égalité $H_\alpha(\mathcal{Z}(f)) = 0$ implique-t-elle que f est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$?

On considère la suite $]a_k, b_k[$ des intervalles contigus à $\mathcal{Z}(f)$. On pose

$$r_n = 2\pi - \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k).$$

On dit que $\mathcal{Z}(f)$ est de α-mesure forte 0 si $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\alpha}-1} r_n = 0$.

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$, $q = p/(p-1)$ et $\beta \geq 0$ tel que $\beta q < 1$.

1. Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $\mathcal{Z}(f)$ est de α-mesure forte nulle, où $\alpha = \frac{2}{q}(1-\beta q)$ alors f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
2. Pour tout $\gamma > \frac{2}{q}$, il existe un ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que toute fonction $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ n'est pas bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ et tel que $H_h(E) = 0$ où $h(t) = \frac{t^\alpha}{\log(e/t)^\gamma}$ avec $\alpha = \frac{2}{q}(1-\beta q)$.

Cas $\dim(\mathcal{Z}(f)) = \frac{2}{q}(1-\beta q)$

Pour $1 \leq p \leq 2$ et $\alpha = 2/q$ (et $\beta = 0$)

Question de Newman (1964)

L'égalité $H_\alpha(\mathcal{Z}(f)) = 0$ implique-t-elle que f est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$?

On considère la suite $]a_k, b_k[$ des intervalles contigus à $\mathcal{Z}(f)$. On pose

$$r_n = 2\pi - \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

On dit que $\mathcal{Z}(f)$ est de α-mesure forte 0 si $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\alpha}-1} r_n = 0$.

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$, $q = p/(p-1)$ et $\beta \geq 0$ tel que $\beta q < 1$.

1. Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $\mathcal{Z}(f)$ est de α-mesure forte nulle, où $\alpha = \frac{2}{q}(1-\beta q)$ alors f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.
2. Pour tout $\gamma > \frac{2}{q}$, il existe un ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que toute fonction $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ n'est pas bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ et tel que $H_h(E) = 0$ où $h(t) = \frac{t^\alpha}{\log(e/t)^\gamma}$ avec $\alpha = \frac{2}{q}(1-\beta q)$.

Pour $f \in X$, on note

$$[f]_{\mathbb{N}}^X = \overline{\mathrm{Vect}\{z^n f,\ n \in \mathbb{N}\}}^X,$$

$$[f]_{\mathbb{Z}}^X = \overline{\mathrm{Vect}\{z^n f,\ n \in \mathbb{Z}\}}^X.$$

On rappelle que $f \in X$ est bicyclique dans X si $[f]_{\mathbb{Z}}^X = X$ et que f est cyclique dans X si $[f]_{\mathbb{N}}^X = X$.

On peut noter que f est cyclique dans X si et seulement si f est bicyclique dans X et $[f]_{\mathbb{N}}^X = [f]_{\mathbb{Z}}^X$.

Proposition

Une fonction f est cyclique dans X si et seulement s'il existe deux suites $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{T})^{\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_+(\mathbb{T})^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\|1 - P_n f\|_X \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \|f - zQ_n f\|_X \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour $f \in X$, on note

$$[f]_{\mathbb{N}}^X = \overline{\mathrm{Vect}\{z^n f,\ n \in \mathbb{N}\}}^X,$$
$$[f]_{\mathbb{Z}}^X = \overline{\mathrm{Vect}\{z^n f,\ n \in \mathbb{Z}\}}^X.$$

On rappelle que $f \in X$ est bicyclique dans X si $[f]_{\mathbb{Z}}^X = X$ et que f est cyclique dans X si $[f]_{\mathbb{N}}^X = X$.

On peut noter que f est cyclique dans X si et seulement si f est bicyclique dans X et $[f]_{\mathbb{N}}^X = [f]_{\mathbb{Z}}^X$.

Proposition

Une fonction f est cyclique dans X si et seulement s'il existe deux suites $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{T})^{\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_+(\mathbb{T})^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\|1 - P_n f\|_X \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \|f - zQ_n f\|_X \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cyclicité pour $p = 1$ (Wiener-Szegö)

Il n'existe pas de fonctions cycliques dans $A(\mathbb{T})$.

Cyclicité pour $p = 2$ (Wiener-Szegö)

Une fonction f est cyclique dans $A^2(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T})$ si et seulement si f ne s'annule pas presque partout et $\int_{\mathbb{T}} \log|f| = -\infty$.

Question pour $1 < p < 2$?

Pour $f \in A(\mathbb{T})$ vérifiant $\int_{\mathbb{T}} \log|f| = -\infty$, l'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ caractérise-t-il la cyclicité de f dans $A^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < 2$?

Résultats connus sur la cyclicité dans $A^p(\mathbb{T})$

Cyclicité pour $p = 1$ (Wiener-Szegö)

Il n'existe pas de fonctions cycliques dans $A(\mathbb{T})$.

Cyclicité pour $p = 2$ (Wiener-Szegö)

Une fonction f est cyclique dans $A^2(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T})$ si et seulement si f ne s'annule pas presque partout et $\int_{\mathbb{T}} \log |f| = -\infty$.

Question pour $1 < p < 2$?

Pour $f \in A(\mathbb{T})$ vérifiant $\int_{\mathbb{T}} \log |f| = -\infty$, l'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ caractérise-t-il la cyclicité de f dans $A^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < 2$?

Résultats connus sur la cyclicité dans $A^p(\mathbb{T})$

Cyclicité pour $p = 1$ (Wiener-Szegö)

Il n'existe pas de fonctions cycliques dans $A(\mathbb{T})$.

Cyclicité pour $p = 2$ (Wiener-Szegö)

Une fonction f est cyclique dans $A^2(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T})$ si et seulement si f ne s'annule pas presque partout et $\int_{\mathbb{T}} \log |f| = -\infty$.

Question pour $1 < p < 2$?

Pour $f \in A(\mathbb{T})$ vérifiant $\int_{\mathbb{T}} \log |f| = -\infty$, l'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ caractérise-t-il la cyclicité de f dans $A^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < 2$?

Théorème de Lev-Olevskii (2011)

Soit $1 < p < 2$. Il existe deux fonctions f et g dans $A(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$, et telles que l'une soit bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ et l'autre non.

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$. Il existe deux fonctions f et g dans $A(\mathbb{T})$ vérifiant

- $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$
- $\int_{\mathbb{T}} \log|f| = \int_{\mathbb{T}} \log|g| = -\infty$
- *g est cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ et f n'est pas cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.*

Pas de caractérisation de la cyclicité avec $\mathcal{Z}(f)$

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$. Il existe deux fonctions f et g dans $A(\mathbb{T})$ vérifiant

- $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$
- $\int_{\mathbb{T}} \log |f| = \int_{\mathbb{T}} \log |g| = -\infty$
- *g est cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ et f n'est pas cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.*

Idée de preuve :
Ensemble de Helson : ensemble compact K tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}(K),\ \exists g \in A(\mathbb{T}),\ g|_K = f.$$

D'après les résultats de Lev-Olevskii :

- Les ensembles de Helson K sont assez « petits » pour avoir une fonction bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ s'annulant sur K.
- Il existe un ensemble de Helson K assez « gros » pour que toute fonction régulière ayant K pour ensemble de zéros ne soit pas bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$. Il existe deux fonctions f et g dans $A(\mathbb{T})$ vérifiant

- $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$
- $\int_{\mathbb{T}} \log|f| = \int_{\mathbb{T}} \log|g| = -\infty$
- *g est cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ et f n'est pas cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.*

Idée de preuve :
Ensemble de Helson : ensemble compact K tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}(K),\ \exists g \in A(\mathbb{T}),\ g|_K = f.$$

D'après les résultats de Lev-Olevskii :

- Les ensembles de Helson K sont assez « petits » pour avoir une fonction bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ s'annulant sur K.
- Il existe un ensemble de Helson K assez « gros » pour que toute fonction régulière ayant K pour ensemble de zéros ne soit pas bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$. Il existe deux fonctions f et g dans $A(\mathbb{T})$ vérifiant

- $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$
- $\int_{\mathbb{T}} \log|f| = \int_{\mathbb{T}} \log|g| = -\infty$
- *g est cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ et f n'est pas cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.*

Idée de preuve :
Ensemble de Helson : ensemble compact K tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}(K),\ \exists g \in A(\mathbb{T}),\ g|_K = f.$$

D'après les résultats de Lev-Olevskii :

- Les ensembles de Helson K sont assez « petits » pour avoir une fonction bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ s'annulant sur K.
- Il existe un ensemble de Helson K assez « gros » pour que toute fonction régulière ayant K pour ensemble de zéros ne soit pas bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$. Il existe deux fonctions f et g dans $A(\mathbb{T})$ vérifiant

- $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$
- $\int_{\mathbb{T}} \log|f| = \int_{\mathbb{T}} \log|g| = -\infty$
- *g est cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ et f n'est pas cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.*

Idée de preuve :
Soit K un ensemble de Helson. Il suffit de montrer qu'il existe $g \in A(\mathbb{T})$ s'annulant sur K tel que g est cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ pour tout $p > 1$.

$$G(\varepsilon, p) = \{g \in A(\mathbb{T}),\ g|_K = 0,\ \exists P \in \mathcal{P}(\mathbb{T}),\ \exists Q \in \mathcal{P}_+(\mathbb{T}),\ \|1 - Pg\|_{A^p} < \varepsilon \text{ et } \|g - zQg\|_{A^p} < \varepsilon\}.$$

(i) $\bigcap_{n=1}^{\infty} G(1/n, 1+1/n) = \{g \in A(\mathbb{T}),\ g|_K = 0,\ g \text{ cyclique dans } A^p(\mathbb{T}),\ \forall p > 1\}$

(ii) $G(\varepsilon, p)$ est un sous-ensemble ouvert de $\{g \in A(\mathbb{T}),\ g|_K = 0\}$

(iii) $G(\varepsilon, p)$ est un sous-ensemble dense de $\{g \in A(\mathbb{T}),\ g|_K = 0\}$

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$. Il existe deux fonctions f et g dans $A(\mathbb{T})$ vérifiant

- $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$
- $\int_{\mathbb{T}} \log|f| = \int_{\mathbb{T}} \log|g| = -\infty$
- *g est cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ et f n'est pas cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.*

Idée de preuve :
Soit K un ensemble de Helson. Il suffit de montrer qu'il existe $g \in A(\mathbb{T})$ s'annulant sur K tel que g est cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ pour tout $p > 1$.

$$G(\varepsilon, p) = \{g \in A(\mathbb{T}),\ g|_K = 0,\ \exists P \in \mathcal{P}(\mathbb{T}),\ \exists Q \in \mathcal{P}_+(\mathbb{T}),\ \|1 - Pg\|_{A^p} < \varepsilon \text{ et } \|g - zQg\|_{A^p} < \varepsilon\}.$$

(i) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} G(1/n, 1+1/n) = \{g \in A(\mathbb{T}),\ g|_K = 0,\ g \text{ cyclique dans } A^p(\mathbb{T}),\ \forall p > 1\}$

(ii) $G(\varepsilon, p)$ est un sous-ensemble ouvert de $\{g \in A(\mathbb{T}),\ g|_K = 0\}$

(iii) $G(\varepsilon, p)$ est un sous-ensemble dense de $\{g \in A(\mathbb{T}),\ g|_K = 0\}$

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$. Il existe deux fonctions f et g dans $A(\mathbb{T})$ vérifiant

- $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$
- $\int_{\mathbb{T}} \log |f| = \int_{\mathbb{T}} \log |g| = -\infty$
- *g est cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ et f n'est pas cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.*

Idée de preuve :
Soit K un ensemble de Helson. Il suffit de montrer qu'il existe $g \in A(\mathbb{T})$ s'annulant sur K tel que g est cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ pour tout $p > 1$.

$$G(\varepsilon, p) = \{g \in A(\mathbb{T}),\ g|_K = 0,\ \exists P \in \mathcal{P}(\mathbb{T}),\ \exists Q \in \mathcal{P}_+(\mathbb{T}),\\ \|1 - Pg\|_{A^p} < \varepsilon \text{ et } \|g - zQg\|_{A^p} < \varepsilon\}.$$

(*i*) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} G(1/n, 1+1/n) = \{g \in A(\mathbb{T}),\ g|_K = 0,\ g \text{ cyclique dans } A^p(\mathbb{T}),\ \forall p > 1\}$

(*ii*) $G(\varepsilon, p)$ est un sous-ensemble ouvert de $\{g \in A(\mathbb{T}),\ g|_K = 0\}$

(*iii*) $G(\varepsilon, p)$ est un sous-ensemble dense de $\{g \in A(\mathbb{T}),\ g|_K = 0\}$

Théorème de Makarov (1984)

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{T})$. La fonction f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ si et seulement si f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ et $\log|f| \notin L^1(\mathbb{T})$.

Exemple : $f(\zeta) = \exp\left(-1/d(\zeta, E)^\gamma\right), \quad \zeta \in \mathbb{T}, \quad \gamma \geq 1.$

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$ et $\beta > 0$ tel que $\beta q < 1$. Soit $f \in \mathrm{Lip}_\delta(\mathbb{T})$ avec $\delta > \beta + 1/p - 1/2$. On suppose que $\mathcal{Z}(f)$ est de mesure de Lebesgue nulle. Si

$$\int_{\mathbb{T}} \log d(\zeta, \mathcal{Z}(f))|d\zeta| = -\infty$$

alors la fonction f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ si et seulement si f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Théorème (2017)

Soit $1 < p \leq 2$ et $\beta \geq 0$ tels que $\beta q \leq 1$. L'ensemble des vecteurs cycliques dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ est un sous-ensemble G_δ-dense de $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Théorème de Makarov (1984)

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{T})$. La fonction f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ si et seulement si f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ et $\log|f| \notin L^1(\mathbb{T})$.

Exemple : $f(\zeta) = \exp\left(-1/d(\zeta,E)^\gamma\right), \quad \zeta \in \mathbb{T}, \quad \gamma \geq 1.$

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$ et $\beta > 0$ tel que $\beta q < 1$. Soit $f \in \mathrm{Lip}_\delta(\mathbb{T})$ avec $\delta > \beta + 1/p - 1/2$. On suppose que $\mathcal{Z}(f)$ est de mesure de Lebesgue nulle. Si

$$\int_{\mathbb{T}} \log d(\zeta, \mathcal{Z}(f))|d\zeta| = -\infty$$

alors la fonction f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ si et seulement si f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Théorème (2017)

Soit $1 < p \leq 2$ et $\beta \geq 0$ tels que $\beta q \leq 1$. L'ensemble des vecteurs cycliques dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ est un sous-ensemble G_δ-dense de $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Théorème de Makarov (1984)

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{T})$. La fonction f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ si et seulement si f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ et $\log|f| \notin L^1(\mathbb{T})$.

Exemple : $f(\zeta) = \exp\left(-1/d(\zeta, E)^\gamma\right), \quad \zeta \in \mathbb{T}, \quad \gamma \geq 1.$

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$ et $\beta > 0$ tel que $\beta q < 1$. Soit $f \in \mathrm{Lip}_\delta(\mathbb{T})$ avec $\delta > \beta + 1/p - 1/2$. On suppose que $\mathcal{Z}(f)$ est de mesure de Lebesgue nulle. Si

$$\int_{\mathbb{T}} \log d(\zeta, \mathcal{Z}(f))|d\zeta| = -\infty$$

alors la fonction f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ si et seulement si f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Théorème (2017)

Soit $1 < p \leq 2$ et $\beta \geq 0$ tels que $\beta q \leq 1$. L'ensemble des vecteurs cycliques dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ est un sous-ensemble G_δ-dense de $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Théorème de Makarov (1984)

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{T})$. La fonction f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ si et seulement si f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ et $\log|f| \notin L^1(\mathbb{T})$.

Exemple : $f(\zeta) = \exp\left(-1/d(\zeta, E)^\gamma\right), \quad \zeta \in \mathbb{T}, \quad \gamma \geq 1.$

Théorème (2017)

Soit $1 < p < 2$ et $\beta > 0$ tel que $\beta q < 1$. Soit $f \in \mathrm{Lip}_\delta(\mathbb{T})$ avec $\delta > \beta + 1/p - 1/2$. On suppose que $\mathcal{Z}(f)$ est de mesure de Lebesgue nulle. Si

$$\int_{\mathbb{T}} \log d(\zeta, \mathcal{Z}(f))|d\zeta| = -\infty$$

alors la fonction f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ si et seulement si f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Théorème (2017)

Soit $1 < p \leq 2$ et $\beta \geq 0$ tels que $\beta q \leq 1$. L'ensemble des vecteurs cycliques dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ est un sous-ensemble G_δ-dense de $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Soit X un espace de Banach de fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D}$. On suppose que l'opérateur shift S, définie par

$$S(f)(z) = zf(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

est borné sur X. Pour $f \in X$, on dit que f est cyclique dans X si

$$\overline{\mathrm{Vect}}^{X}\{z^n f,\ n \in \mathbb{N}\} = X.$$

Exemple : pour $1 \leq p < \infty$, les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ sont définis par

$$H^p(\mathbb{D}) = \{f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}),\ \|f\|_{H^p}^p = \sup_{r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right) < \infty\}.$$

Théorème (Beurling)

Une fonction f est cyclique dans $H^p(\mathbb{D})$ si et seulement si f est une fonction extérieure, c'est-à-dire si f est de la forme

$$f(z) = c \exp \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log \varphi(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

où $|c| = 1$ et où φ est une fonction positive vérifiant $\log \varphi \in L^1(\mathbb{T})$.

Soit X un espace de Banach de fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D}$. On suppose que l'opérateur shift S, définie par

$$S(f)(z) = zf(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

est borné sur X. Pour $f \in X$, on dit que f est cyclique dans X si

$$\overline{\mathrm{Vect}}^{X}\{z^n f,\ n \in \mathbb{N}\} = X.$$

Exemple : pour $1 \leq p < \infty$, les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ sont définis par

$$H^p(\mathbb{D}) = \{f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}),\ \|f\|_{H^p}^p = \sup_{r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right) < \infty\}.$$

Théorème (Beurling)

Une fonction f est cyclique dans $H^p(\mathbb{D})$ si et seulement si f est une fonction extérieure, c'est-à-dire si f est de la forme

$$f(z) = c \exp \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log \varphi(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

où $|c| = 1$ et où φ est une fonction positive vérifiant $\log \varphi \in L^1(\mathbb{T})$.

Soit X un espace de Banach de fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D}$. On suppose que l'opérateur shift S, définie par

$$S(f)(z) = zf(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

est borné sur X. Pour $f \in X$, on dit que f est cyclique dans X si

$$\overline{\mathrm{Vect}}^X \{z^n f,\ n \in \mathbb{N}\} = X.$$

Exemple : pour $1 \leq p < \infty$, les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ sont définis par

$$H^p(\mathbb{D}) = \{f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}),\ \|f\|_{H^p}^p = \sup_{r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right) < \infty\}.$$

Théorème (Beurling)

Une fonction f est cyclique dans $H^p(\mathbb{D})$ si et seulement si f est une fonction extérieure, c'est-à-dire si f est de la forme

$$f(z) = c \exp \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log \varphi(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

où $|c| = 1$ et où φ est une fonction positive vérifiant $\log \varphi \in L^1(\mathbb{T})$.

Pour $p \geq 1$, $\alpha > -1$, les espaces de Dirichlet $\mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D})$ sont définis par

$$\mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}),\ \|f\|_{\mathscr{D}_\alpha^p}^p = |f(0)|^p + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p (1-|z|^2)^\alpha \mathrm{dA}(z) < \infty \right\},$$

avec dA la mesure de Lebesgue (mesure d'aire) normalisée sur $\mathbb{D}$.

En particulier $\mathscr{D}_1^2(\mathbb{D}) = H^2(\mathbb{D})$ et

$$\mathscr{D}_0^2(\mathbb{D}) = \mathscr{D}(\mathbb{D}) = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n z^n,\ \sum_{n \geq 1} n|a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Théorème de Hedenmalm-Shields (1990)

Soit f une fonction dans $A(\mathbb{D}) \cap \mathscr{D}(\mathbb{D})$. Si f est extérieure et si l'ensemble des zéros de f (sur le cercle) est réduit à un point alors f est cyclique dans $\mathscr{D}(\mathbb{D})$.

Pour $p \geq 1$, $\alpha > -1$, les espaces de Dirichlet $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ sont définis par

$$\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}),\ \|f\|^p_{\mathscr{D}^p_\alpha} = |f(0)|^p + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p (1-|z|^2)^\alpha \mathrm{dA}(z) < \infty \right\},$$

avec dA la mesure de Lebesgue (mesure d'aire) normalisée sur $\mathbb{D}$.

En particulier $\mathscr{D}^2_1(\mathbb{D}) = H^2(\mathbb{D})$ et

$$\mathscr{D}^2_0(\mathbb{D}) = \mathscr{D}(\mathbb{D}) = \left\{ \sum_{n\geq 0} a_n z^n,\ \sum_{n \geq 1} n|a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Théorème de Hedenmalm-Shields (1990)

Soit f une fonction dans $A(\mathbb{D}) \cap \mathscr{D}(\mathbb{D})$. Si f est extérieure et si l'ensemble des zéros de f (sur le cercle) est réduit à un point alors f est cyclique dans $\mathscr{D}(\mathbb{D})$.

Pour $p \geq 1$, $\alpha > -1$, les espaces de Dirichlet $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ sont définis par

$$\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}),\ \|f\|^p_{\mathscr{D}^p_\alpha} = |f(0)|^p + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p (1-|z|^2)^\alpha \mathrm{dA}(z) < \infty \right\},$$

avec dA la mesure de Lebesgue (mesure d'aire) normalisée sur $\mathbb{D}$.

En particulier $\mathscr{D}^2_1(\mathbb{D}) = H^2(\mathbb{D})$ et

$$\mathscr{D}^2_0(\mathbb{D}) = \mathscr{D}(\mathbb{D}) = \left\{ \sum_{n\geq 0} a_n z^n,\ \sum_{n\geq 1} n|a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Théorème de Hedenmalm-Shields (1990)

Soit f une fonction dans $A(\mathbb{D}) \cap \mathscr{D}(\mathbb{D})$. Si f est extérieure et si l'ensemble des zéros de f (sur le cercle) est réduit à un point alors f est cyclique dans $\mathscr{D}(\mathbb{D})$.

Théorème (2018)

Soit $p > 1$ vérifiant $\alpha + 1 < p \le \alpha + 2$. Soit f une fonction dans $A(\mathbb{D}) \cap \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$. Si f est extérieure et si l'ensemble des zéros de f (sur le cercle) est réduit à un point alors f est cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$.

Éléments de preuve :

1. Le dual de $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ peut s'identifier à un espace de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}_e$.
2. On note
$$\mathscr{H}_E(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*) = \left\{\varphi \in \mathscr{H}(\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus E),\ \varphi|_{\mathbb{D}} \in \mathscr{N}^+(\mathbb{D}),\ \varphi|_{\mathbb{D}_e} \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*\right\}.$$
Théorème de Hedenmalm-Shields (1988) : Si $f \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D}) \cap A(\mathbb{D})$ est une fonction extérieure et si $\mathscr{H}_{Z(f)}(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*) = \{0\}$ alors f est cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$.
3. Si $|f(z)| \le C_1 d(z, E)^4$ alors $\mathscr{H}_E(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*) \subset \left([f]_{\mathbb{N}}^{\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})}\right)^\perp$.
4. La fonction $f(z) = (z-1)^4$ est cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ pour $\alpha + 1 < p \le \alpha + 2$.

Théorème (2018)

Soit $p > 1$ vérifiant $\alpha + 1 < p \leq \alpha + 2$. Soit f une fonction dans $A(\mathbb{D}) \cap \mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D})$. Si f est extérieure et si l'ensemble des zéros de f (sur le cercle) est réduit à un point alors f est cyclique dans $\mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D})$.

Éléments de preuve :

1. Le dual de $\mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D})$ peut s'identifier à un espace de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}_e$.
2. On note
$$\mathscr{H}_E(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D})^*) = \left\{\varphi \in \mathscr{H}(\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus E),\ \varphi|_{\mathbb{D}} \in \mathscr{N}^+(\mathbb{D}),\ \varphi|_{\mathbb{D}_e} \in \mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D})^*\right\}.$$
Théorème de Hedenmalm-Shields (1988) : Si $f \in \mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D}) \cap A(\mathbb{D})$ est une fonction extérieure et si $\mathscr{H}_{Z(f)}(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D})^*) = \{0\}$ alors f est cyclique dans $\mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D})$.
3. Si $|f(z)| \leq C_1 d(z, E)^4$ alors $\mathscr{H}_E(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D})^*) \subset \left([f]_{\mathbb{N}}^{\mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D})}\right)^\perp$.
4. La fonction $f(z) = (z-1)^4$ est cyclique dans $\mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D})$ pour $\alpha + 1 < p \leq \alpha + 2$.

Théorème (2018)

Soit $p > 1$ vérifiant $\alpha + 1 < p \leq \alpha + 2$. Soit f une fonction dans $A(\mathbb{D}) \cap \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$. Si f est extérieure et si l'ensemble des zéros de f (sur le cercle) est réduit à un point alors f est cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$.

Éléments de preuve :

1. Le dual de $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ peut s'identifier à un espace de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}_e$.
2. On note
$$\mathscr{H}_E(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*) = \left\{\varphi \in \mathscr{H}(\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus E),\ \varphi|_{\mathbb{D}} \in \mathscr{N}^+(\mathbb{D}),\ \varphi|_{\mathbb{D}_e} \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*\right\}.$$
Théorème de Hedenmalm-Shields (1988) : Si $f \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D}) \cap A(\mathbb{D})$ est une fonction extérieure et si $\mathscr{H}_{Z(f)}(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*) = \{0\}$ alors f est cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$.
3. Si $|f(z)| \leq C_1 d(z, E)^4$ alors $\mathscr{H}_E(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*) \subset \left([f]^{\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})}_{\mathbb{N}}\right)^\perp$.
4. La fonction $f(z) = (z-1)^4$ est cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ pour $\alpha + 1 < p \leq \alpha + 2$.

Théorème (2018)

Soit $p > 1$ vérifiant $\alpha + 1 < p \leq \alpha + 2$. Soit f une fonction dans $A(\mathbb{D}) \cap \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$. Si f est extérieure et si l'ensemble des zéros de f (sur le cercle) est réduit à un point alors f est cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$.

Éléments de preuve :

1. Le dual de $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ peut s'identifier à un espace de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}_e$.
2. On note

$$\mathscr{H}_E(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*) = \left\{\varphi \in \mathscr{H}(\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus E),\ \varphi|_{\mathbb{D}} \in \mathscr{N}^+(\mathbb{D}),\ \varphi|_{\mathbb{D}_e} \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*\right\}.$$

   Théorème de Hedenmalm-Shields (1988) : Si $f \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D}) \cap A(\mathbb{D})$ est une fonction extérieure et si $\mathscr{H}_{\mathcal{Z}(f)}(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*) = \{0\}$ alors f est cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$.
3. Si $|f(z)| \leq C_1 d(z,E)^4$ alors $\mathscr{H}_E(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*) \subset \left([f]_{\mathbb{N}}^{\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})}\right)^{\perp}$.
4. La fonction $f(z) = (z-1)^4$ est cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ pour $\alpha + 1 < p \leq \alpha + 2$.

Théorème (2018)

Soit $p > 1$ vérifiant $\alpha + 1 < p \leq \alpha + 2$. Soit f une fonction dans $A(\mathbb{D}) \cap \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$. Si f est extérieure et si l'ensemble des zéros de f (sur le cercle) est réduit à un point alors f est cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$.

Éléments de preuve :

1. Le dual de $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ peut s'identifier à un espace de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}_e$.
2. On note
$$\mathscr{H}_E(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*) = \left\{\varphi \in \mathscr{H}(\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus E),\ \varphi|_{\mathbb{D}} \in \mathscr{N}^+(\mathbb{D}),\ \varphi|_{\mathbb{D}_e} \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*\right\}.$$
Théorème de Hedenmalm-Shields (1988) : Si $f \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D}) \cap A(\mathbb{D})$ est une fonction extérieure et si $\mathscr{H}_{\mathcal{Z}(f)}(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*) = \{0\}$ alors f est cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$.
3. Si $|f(z)| \leq C_1 d(z, E)^4$ alors $\mathscr{H}_E(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*) \subset \left([f]_{\mathbb{N}}^{\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})}\right)^\perp$.
4. La fonction $f(z) = (z-1)^4$ est cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ pour $\alpha + 1 < p \leq \alpha + 2$.

Théorème (2018)

Soit $p > 1$ vérifiant $\alpha + 1 < p \leq \alpha + 2$. Soit f une fonction dans $A(\mathbb{D}) \cap \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$. Si f est extérieure et si l'ensemble des zéros de f (sur le cercle) est réduit à un point alors f est cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$.

Éléments de preuve :

1. Le dual de $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ peut s'identifier à un espace de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}_e$.
2. On note

$$\mathscr{H}_E(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*) = \left\{\varphi \in \mathscr{H}(\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus E),\ \varphi|_{\mathbb{D}} \in \mathscr{N}^+(\mathbb{D}),\ \varphi|_{\mathbb{D}_e} \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*\right\}.$$

   Théorème de Hedenmalm-Shields (1988) : Si $f \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D}) \cap A(\mathbb{D})$ est une fonction extérieure et si $\mathscr{H}_{\mathcal{Z}(f)}(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*) = \{0\}$ alors f est cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$.

3. Si $|f(z)| \leq C_1 d(z, E)^4$ alors $\mathscr{H}_E(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*) \subset \left([f]_{\mathbb{N}}^{\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})}\right)^\perp$.
4. La fonction $f(z) = (z-1)^4$ est cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ pour $\alpha + 1 < p \leq \alpha + 2$.