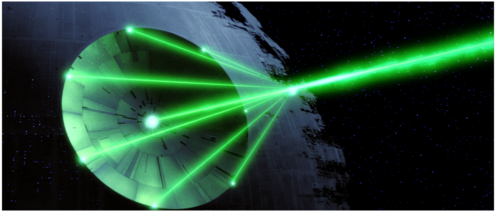
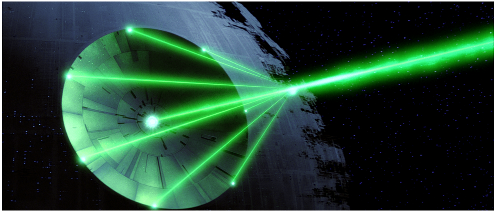
# Velkommen til LinAlg



# Velkommen til LinAlg



Nummer et værktøj til alle dine projekter!

# Plan

Spørgsmål 1: Hvad er Lineær Algebra?

Spørgsmål 2: Hvad skal LinAlg bruges til?

# Spørgsmål 1

Hvad er Lineær Algebra?

# Spørgsmål 1

Hvad er Lineær Algebra?

En historie om kærlighed, ild og is... ♡

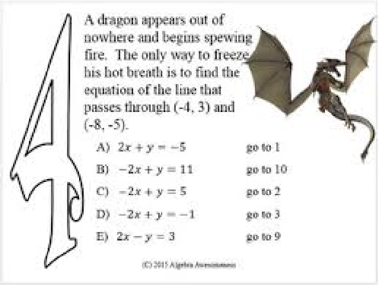
# Spørgsmål 1

Hvad er Lineær Algebra?

# Spørgsmål 1

Hvad er Lineær Algebra?

En historie om linearitet, skalar-multiplikation og sum ♡♡♡!

Vi starter med 4 begreber:

- vektor
- sum
- skalar-multiplikation
- linje

Vi starter med 4 begreber:

- vektor
- sum
- skalar-multiplikation
- linje

Det udvikles til et nyt koncept: et vektorrum.

# Vektorrum

**Definition:** et $\mathbb{R}$-*vektorrum* er en triple $(V, +, \cdot)$ af en mængde $V$ og to afbildninger $+ \colon V \times V \to V$ og $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, der opfylder:

(A1) For alle $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ er $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$.

(A2) Der findes $\mathbf{0} \in V$, sådan at der for alle $\boldsymbol{u} \in V$ gælder $\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u} = \mathbf{0} + \boldsymbol{u}$.

(A3) For alle $\boldsymbol{u} \in V$ findes der $-\boldsymbol{u} \in V$, sådan at der gælder $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0} = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}$.

(A4) For alle $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ er $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.

(V1) For alle $\boldsymbol{u} \in V$ og $a, b \in \mathbb{R}$ er $a \cdot (b \cdot \boldsymbol{u}) = (ab) \cdot \boldsymbol{u}$.

(V2) For alle $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ og $a \in \mathbb{R}$ er $a \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = (a \cdot \boldsymbol{u}) + (a \cdot \boldsymbol{v})$.

(V3) For alle $\boldsymbol{u} \in V$ og $a, b \in \mathbb{R}$ er $(a + b) \cdot \boldsymbol{u} = (a \cdot \boldsymbol{u}) + (b \cdot \boldsymbol{u})$.

(V4) For alle $\boldsymbol{u} \in V$ er $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

# Spørgsmål 1

Hvad er Lineær Algebra?

# Spørgsmål 1

Hvad er Lineær Algebra?

Brugen af vektorrum, lineære afbildninger, matrixteori, egenvektorer, lineære systemer, osv.

# Spørgsmål 2

Hvad skal LinAlg bruges til?

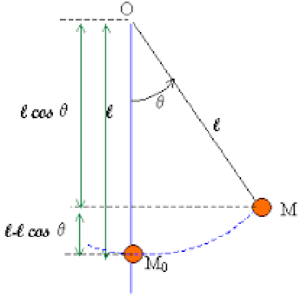
# Spørgsmål 2

Hvad skal LinAlg bruges til?

- Fysik
- Kemi
- Biologi
- Internet og kunstig intelligens
- Meget mere!

# Fysik: pendul eksempel

# Fysik: pendul eksempel




Det giver ligningen (efter nogle anstrengelser) for bevægelse af punktet M:

$$\theta'' + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

# Fysik: pendul eksempel

Ligningen

$$\theta'' + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

er meget svært at løse, men bekomer, hvis $\sin\theta \simeq \theta$,

$$\theta'' + \frac{g}{\ell}\theta = 0.$$

# Fysik: pendul eksempel

Ligningen

$$\theta'' + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0$$

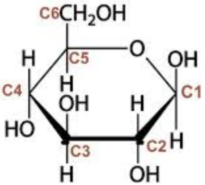
er meget svært at løse, men bekomer, hvis $\sin\theta \simeq \theta$,

$$\theta'' + \frac{g}{\ell}\theta = 0.$$

Lad $V = \{\theta \,|\, \theta'' + \frac{g}{\ell}\theta = 0\}$. V er et vektorrum!

# Fysik: pendul eksempel

# Kemi: energi fra slik




Man starter med

$$C_6H_{12}O_6 + O_2 \to CO_2 + H_2O,$$

og prøver at finde equilibrium med $a, b, x, y \in \mathbb{R}$

$$aC_6H_{12}O_6 + bO_2 \to xCO_2 + yH_2O.$$

Det giver: $C : 6a = x$, $H : 12a = 2y$ og $O : 6a + 2b = 2x + y$.

# Kemi: energi fra slik

Fra linear systemet: $(S) = \begin{cases} 6a = x, \\ 12a = 2y, \\ 6a + 2b = 2x + y, \end{cases}$

vi har $x = y = b$ og $6a = x$, så hvis $a = 1$, equilibrium er

$$C_6H_{12}O_6 + 6O_2 \rightarrow 6CO_2 + 6H_2O.$$

# Kemi: energi fra slik

Fra linear systemet: $(S) = \begin{cases} 6a = x, \\ 12a = 2y, \\ 6a + 2b = 2x + y, \end{cases}$

vi har $x = y = b$ og $6a = x$, så hvis $a = 1$, equilibrium er

$$C_6H_{12}O_6 + 6O_2 \to 6CO_2 + 6H_2O.$$

Lad $V = \{(a, b, x, y) \mid (S)\}$. V er et vektorrum!

# Kemi: energi fra slik

Slik er også LinAlg?!

# Biologi: farven på blomster

Fokus er nu: en blomst kan vær rose (dominerende, gen R) eller hvid (recessiv gen h). Vi starter med en rosehave med genotype $G_0 = (RR, Rh, hh)^t = (0, 1/2, 1/2)^t$. Hvor mange blomster med fænotype ***rose farve*** har vi efter krydet med en blomst af genotypen Rh?

Vi giver den ***Rh-matrix*** sandsynlighed:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} RR + Rh & Rh + Rh & hh + Rh \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} RR \\ Rh \\ hh \end{array} \end{array} \quad og\ M_{Rh} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

# Biologi: farven på blomster

Hvis $G_n$ er den genotype vektor for generation $n$, vi har

$$G_{n+1} = M_{Rh} G_n$$

For eksempel,

$$G_1 = M_{Rh} G_0 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/2 \\ 3/8 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = M_{Rh} G_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/2 \\ 3/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/16 \\ 8/16 \\ 5/16 \end{pmatrix} \ldots$$

# Biologi: farven på blomster

Lad $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. V er et vektorrum!

# Biologi: farven på blomster

Du har ret, skat, der er også LinAlg!

# Internet og Kunstig Intelligens

Vi tager en eksempel. Der er $N$ websider, som hver kan indeholde links til andre sider. Det kræves at bestemme, hvilke sider der er de vigtigste. Lad os starte med en naturlig antagelse: jo flere links til denne side, jo større er dens vægt. Vi har denne formel:

$$p_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} p_j$$

Denne formel kan læses som følger: vægten af den side $i$ er lig med summen af produkterne af vægten på den side $j$ med brøkdelen af links fra den side $j$ til den side $i$.

Hvis vi skriver matricerne

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_N \end{pmatrix} \quad og \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix},$$

vi har med ***matrix product***:

$$p = Ap$$

Vi kalder denne løsning $p$ en ***egenvektor*** for den ***egenværdi*** $\lambda = 1$ med hensyn til $A$.

**Konklusion:** for at bestemme, hvilken webside der er den vigtigste, prøver vi (vi=Google, Bing, osw.) at løse et lineært system med variabel vektor $p$. For at fået hurtigt resultat bruger vi algoritmer baseret på Perron–Frobenius teorem (med iteration). Og...

Lad $V = \{p \,|\, p = Ap\}$. V er et vektorrum!

LinAlg for ever.

# Konklusion

Fysik, Kemi, Biologi, Internet og kunstig intelligens, men også økonomi, datalogi, statistik, matematik, osw.

Lineær algebra er en abstrakt konstruktion, der hjælper os med at forstå videnskab og verden.